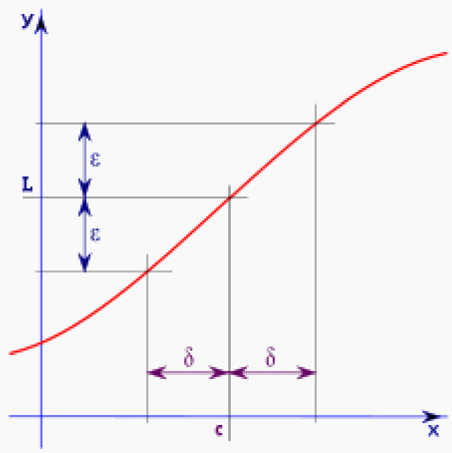
LIMITE DE UNA FUNCIÓN

El **límite de una función** es un concepto fundamental del análisis matemático, un caso de límite aplicado a las funciones.

Informalmente, el hecho que una función *f* tiene un límite *L* en el punto *c*, significa que el valor de *f* puede ser tan cercano a *L* como se desee, tomando puntos suficientemente cercanos a *c*, independientemente de lo que ocurra en *c*.

Definición Formal

Funciones de variable real



Visualización de los parámetros utilizados en la definición de límite.

Si la función f tiene límite L en c podemos decir de manera informal que la función f tiende hacia el límite L cerca de c si se puede hacer que $f(x)$ esté tan cerca como queramos de L haciendo que x esté suficientemente cerca de c siendo x distinto de c.

Los conceptos *cerca* y *suficientemente cerca* son matemáticamente poco precisos. Por esta razón, se da una definición formal de límite que precisa estos conceptos. Entonces se dice:

> El límite de una función f(*x*), cuando *x* tiende a *c* es *L* si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para todo número real *x* en el dominio de la función $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Esto, escrito en notación formal:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 / \forall x \in \mathrm{Dom}(f), 0 < |x - c| < \delta \longrightarrow |f(x) -$$

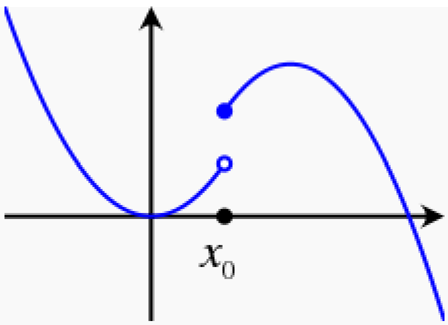
Lo importante es comprender que el formalismo no lo hacen los símbolos matemáticos, sino, la precisión con la que queda definido el concepto de límite. Esta notación es tremendamente poderosa, pues, nos dice que si el límite existe, entonces se puede estar tan cerca de él como se desee. Si no se logra estar lo suficientemente cerca, entonces la elección del δ no era adecuada. La definición asegura que si el límite existe, entonces es posible encontrar tal δ.

No obstante, hay casos como por ejemplo la función de Dirichlet $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como:

$$D(x) = \begin{cases} c & \text{para } x \text{ racional} \\ d & \text{para } x \text{ irracional} \end{cases}$$

Donde no existe un número c para el cual exista $\lim_{x \to c} f(x)$. Por lo tanto, para demostrar la anterior afirmación es necesario hacer uso del hecho de que cada intervalo contiene tanto números racionales como irracionales.

Límites laterales



El límite cuando: $x \to x_0^+ \neq x \to x_0^-$. Por lo tanto, el límite cuando $x \to x_0$ no existe.

De manera similar, x puede aproximarse a c tomando valores más grandes que éste (derecha):

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L^+$$

o tomando valores más pequeños (izquierda), en cuyo caso los límites pueden ser escritos como:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L^-$$

Si los dos límites anteriores son iguales:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

entonces **L** se pueden referir como *el límite* de $f(x)$ en c. Dicho de otro modo, si estos no son iguales a L entonces *el límite*, como tal, no existe.

[editar]**Funciones en espacios métricos**

Existe otra manera de definir el límite que tiene que ver con el concepto de bolas y entornos:

Supóngase $f: (M, d_M) \to (N, d_N)$ es mapeado entre dos espacios métricos, c es un punto límite de M y $L \in N$. Se dice que "el límite de f en c es L" y se escribe:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que para toda $x \in M$ en $0 < d_M(x, c) < \delta$, tenemos $d_N(f(x), L) < \varepsilon$.

En términos de desigualdades, tenemos que el límite de la función f(x) en $x = c$ es L si se cumple que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que, para todo x:

si $0 < |x - c| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \epsilon$

De la desigualdad $0 < | x - c | < \delta$ se obtiene lo siguiente:

1. x pertenece a la vecindad $(c - \delta , c) \cup (c, c + \delta)$.
2. x no es igual a c, pues $0 < | x - c |$ implica x distinto de c.
3. La solución de $| f(x) - L | < \varepsilon$ pertenece al intervalo $(L - \varepsilon , L + \varepsilon)$.

Esto proporciona la clave de comprensión del concepto de límite, pues mientras que el valor de x está en la vecindad horizontal alrededor del punto c y agujereada en c con radio delta y centro c, aun cuando en ese punto c no esté definida, el valor de y está en el intervalo vertical con centro en f(c) y radio épsilon.

Unicidad del Límite

Teorema. Si el límite de una función existe, entonces es único.

Este teorema es válido en espacios topológicos Hausdorff.

Supongamos que

$\lim_{x \to c} f(x) = L$, veamos que no puede ser que $L' \neq L$ también verifique la definición. Para ello tomamos un entorno E de L y un entorno E' de L' que no se intersecten. Por definición de límite $f(x) \in E$ para todo x en algún entorno agujereado de c, por lo que no puede estar en E', evitando que el límite sea L'.

Propiedades generales de los límites

Si f(*x*) y g(*x*) son funciones de variable real y *k* es un escalar, entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

Límite de	Expresión
Una constante	$\lim_{x\to c} k = k$
La función identidad	$\lim_{x\to c} x = c$
El producto de una función y una constante	$\lim_{x\to c} kf(x) = k\lim_{x\to c} f(x)$
Una suma	$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$
Una resta	$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
Un producto	$\lim_{x\to c}(f(x)g(x)) = \lim_{x\to c} f(x)\cdot\lim_{x\to c} g(x)$
Un cociente	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ si $\lim_{x\to c} g(x) \neq 0,$
Una potencia	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to c} f(x)^{\lim_{x\to c} g(x)}$ si $f(x) > 0$
Un logaritmo	$\lim_{x\to c}\log f(x) = \log\lim_{x\to c} f(x)$
El número e	$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$

Función f(x) acotada y g(x) infinitesimal	$\lim_{x\to c} (f(x) \cdot g(x)) = 0$.

Indeterminaciones

Hay varios tipos de indeterminaciones, entre ellas las siguientes (considere ∞ como el límite que tiende a infinito y 0 al límite cuando tiende a 0; y no al número 0):

Operación	**Indeterminación**
Sustracción	$\infty - \infty$
Multiplicación	$\infty \cdot 0$
División	$\frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$
Elevación a potencia	$1^{\infty}, \infty^{0}, 0^{0}$

Ejemplo.

0/0 es una indeterminación, es decir, no es posible, a priori, saber cuál es el valor de un límite que tiende a cero sobre otro que también tiende a cero ya que el resultado no es siempre el mismo. Por ejemplo:

$$\lim_{t\to 0} \frac{t}{t^2} = \infty \lim_{t\to 0} \frac{t}{t} = 1 \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t} = 0$$