



5 — Integral Indefinida

Dada una función f , una primitiva arbitraria de ésta se denomina generalmente integral indefinida de f y se escribe en la forma $\int f(x) dx$.

La primitiva de una función también recibe el nombre de antiderivada.

Si λ es una función tal que $\lambda'(x) = f(x)$ para x en un intervalo I , entonces la integral indefinida de $f(x)$ está dada por:

$$\int f(x) dx = \lambda(x) + C$$

C es cualquier número real y recibe el nombre de constante de integración.

Teorema 5.1

Si $F_1(x)$ y $F_2(x)$ son dos funciones primitivas de la función f sobre un intervalo $[a, b]$, entonces

$$F_1(x) - F_2(x) = C$$

es decir, su diferencia es igual a una constante.

Puede decirse a partir del teorema 5.1 que si se conoce cualquier función primitiva de F de la función f , entonces cualquier otra primitiva de f tiene la forma $F(x) + C$, donde C es una constante. Luego

$$\int f(x) dx = F(x) + C \text{ si } F'(x) = f(x)$$

Nos dedicaremos ahora a estudiar los métodos que permiten determinar las funciones primitivas, (y por tanto las integrales indefinidas), de ciertas clases de funciones elementales.

El proceso que permite determinar la función primitiva de una función f recibe el nombre de “integración de la función f ”.

Las propiedades estudiadas para la integral definida también se cumplen para la integral indefinida.

5.1 Fórmulas y métodos de integración

5.1.1 Regla de la cadena para la antiderivación

Sea g una función derivable en un intervalo I .

Sea f una función definida en I y H una antiderivada de f en I . Entonces:

$$\int f[g(x)] \cdot g'(x) dx = H[g(x)] + C$$

Note que $\frac{d}{dx} [H(g(x)) + C] = H'(g(x)) \cdot g'(x) + 0 = H'(g(x)) \cdot g'(x)$, como H es una primitiva de f entonces $H'(x) = f(x)$ por lo que:

$$H'[g(x)] \cdot g'(x) = f[g(x)] \cdot g'(x)$$

Luego tenemos que:

1. $\int [g(x)]^n \cdot g'(x) dx = \frac{[g(x)]^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$. ¡Compruébelo!
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, x \neq -1$, ¡Compruébelo!

El caso en que $n = -1$ será estudiado luego.

Ejemplo 5.1

$$\int x dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C = \frac{x^2}{2}$$

Ejemplo 5.2

$$\int 4x^5 dx = 4 \int x^5 dx = 4 \frac{x^6}{6} + C = \frac{2x^6}{3} + C$$

Ejemplo 5.3

$$\int x^{-\frac{3}{7}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{7}+1}}{-\frac{3}{7}+1} + C = \frac{x^{\frac{4}{7}}}{\frac{4}{7}} + C = \frac{7}{4} x^{\frac{4}{7}} + C$$

Ejemplo 5.4

$$\int (2x+1)^5 dx$$

Note que $\frac{d}{dx}(2x+1) = 2$, por lo que es necesario multiplicar por 2 y $\frac{1}{2}$ de la siguiente manera:

$$\int (2x+1)^5 dx = \frac{1}{2} \int 2(2x+1)^5 dx = \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)^6}{6} + C = \frac{(2x+1)^6}{12} + C$$

Ejemplo 5.5

$$\begin{aligned} \int \frac{5x}{\sqrt{3x^2+4}} dx &= 5 \int \frac{x}{\sqrt{3x^2+4}}, \text{ Note que } \frac{d}{dx}(3x^2+4) = 6x \\ &= \frac{5}{6} \int 6x(3x^2+4)^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= \frac{5}{6} \cdot \frac{(3x^2+4)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\ &= \frac{5}{3} \sqrt{3x^2+4} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.6

$$\begin{aligned} \int (2+y)(4y+y^2+5)^{\frac{1}{3}} dy &= \frac{1}{2} \cdot \int 2(2+y)(4y+y^2+5)^{\frac{1}{3}} dy \text{ Note que } d_y(4y+y^2+5) = 2(y+2) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int (4+2y)(4y+y^2+5)^{\frac{1}{3}} dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(4y+y^2+5)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C \\ &= \frac{3}{8}(4y+y^2+5)^{\frac{4}{3}} + C \end{aligned}$$

62 Ejercicios

5.1 $\int \frac{5}{\sqrt[4]{x^2}} dx, x > 0$

5.2 $\int \frac{3x+4}{\sqrt[3]{x}} dx$

5.3 $\int (4\sqrt[3]{x} + 3\sqrt[6]{x^5}) dx$

$$5.4 \int 5u(3+2u^3)^{\frac{2}{3}} du$$

$$5.5 \int \frac{7(1+5x)}{\sqrt[3]{2x+5x^2+4}} dx$$

$$5.6 \int \frac{dx}{\sqrt[4]{3-2x}}, \quad x < \frac{3}{2}$$

5.1.2 Integral de la función exponencial de base e

Recuerde que $\frac{d}{dx} e^x = e^x$ y que $\frac{d}{dx} [e^{g(x)}] = e^{g(x)} \cdot g'(x)$

Luego $\int e^x dx = e^x + C$ y $\int e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^{g(x)} + C$

Ejemplo 5.7

$$\int e^{2x} dx$$

En este caso $\frac{d}{dx} (2x) = 2$, por lo que multiplicamos y dividimos por 2 para tener la integral completa.

$$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} \int 2 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$$

Ejemplo 5.8

$$\int 5xe^{3x^2} dx$$

Note que $\frac{d}{dx} (3x^2) = 6x$

$$\int 5xe^{3x^2} dx = 5 \cdot \frac{1}{6} \int 6x \cdot e^{3x^2} dx = \frac{5}{6} e^{3x^2} + C$$

Ejemplo 5.9

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

Note que $\frac{d}{dx} (\sqrt{x}) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = 2 e^{\sqrt{x}} + C$$

Ejemplo 5.10

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx$$

Recuerde que $\frac{d}{dx} (\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{1+x^2} e^{\arctan x} dx = e^{\arctan x} + C$$

63 Ejercicios

$$5.7 \int \frac{4x}{e^{5x^2}} dx$$

$$5.8 \int e^x (2+3e^x)^5 dx$$

$$5.9 \int \frac{e^{(3+\ln x)}}{x} dx$$

$$5.10 \int x(e^{4x^2} - x + 1) dx$$

$$5.11 \int \frac{e^{\tan x}}{\cos^2 x} dx$$

$$5.12 \int \frac{e^2}{\sqrt{4-6e^x}} dx$$

5.1.3 Integral de la función exponencial de base “a” ($a > 0, a \neq 1$)

Como $\frac{d}{dx} (a^x) = a^x \ln a$ entonces:

$$\int a^x \ln a dx = a^x + C \quad \text{y} \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Ejemplo 5.11

$$\int 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} \int 2^x \ln 2 dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$$

Ejemplo 5.12

$$\int x 3^{4x^2} dx = \frac{1}{8} \int 8x 3^{4x^2} dx = \frac{3^{4x^2}}{8} + C$$

Ejemplo 5.13

$$\int (2t+1) 5^{t^2+t+4} dt$$

$$\begin{aligned} \int (2t+1) 5^{t^2+t+4} dt &= \frac{1}{\ln 5} \int (2t+1) t^{(t^2+t+4)} \ln t dt \\ &= \frac{1}{\ln 5} 5^{(t^2+t+4)} + C \end{aligned}$$

5.1.4 Integral que da como resultado la función logaritmo natural

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \tag{5.1}$$

Prueba:Si $x > 0$ entonces $|x| = x, \ln |x| = \ln x$ por lo que:

$$\frac{d}{dx} (\ln |x|) = \frac{d}{dx} (\ln x) = \frac{1}{x}$$

Si $x < 0$ entonces $|x| = -x, \ln |x| = \ln (-x)$ por lo que:

$$\frac{d}{dx} (\ln |x|) = \frac{d}{dx} (\ln (-x)) = \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x}$$

De esta manera queda comprobado la igualdad dada en 5.1.

En general se tiene que

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

Observe que la expresión en el denominador debe tener exponente uno y que además en el integrando debe aparecer la derivada de f .

Ejemplo 5.14

$$\int \frac{3}{x} dx = 3 \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$$

Ejemplo 5.15

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2+1| + C$$

Ejemplo 5.16

$$\int \frac{-4x+1}{4x^2-2x+5} dx$$

Note que $\frac{d}{dx}(4x^2-2x+5) = 8x-2$

$$\begin{aligned} \int \frac{-4x+1}{4x^2-2x+5} dx &= \frac{-1}{2} \int \frac{-2(-4x+1)}{4x^2-2x+5} dx \\ &= \frac{-1}{2} \int \frac{8x-2}{4x^2-2x+5} dx \\ &= \frac{-1}{2} \ln |4x^2-2x+5| + C \end{aligned}$$

Nota. Cuando en un cociente, la variable de la expresión en el numerador tiene exponente mayor o igual al de la variable en el denominador, debe efectuarse primero una división y luego integrar como se especifica en los ejemplos siguientes:

Ejemplo 5.17

$$\int \frac{3y}{y+5} dy = \int \left(3 - \frac{15}{y+5}\right) dy = \int 3 dy - 15 \int \frac{dy}{y+5} = 3y - 15 \ln |y+5| + C$$

Ejemplo 5.18

$$\begin{aligned}\int \frac{4y^2}{2y+5} dy &= \int \left(2y - \frac{5}{2} + \frac{\frac{25}{2}}{2y+5} \right) dy \\ &= \int \left(2y - \frac{5}{2} \right) dy + \frac{25}{2} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{2}{2y+5} dy \\ &= y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{25}{4} \ln |2y+5| + C\end{aligned}$$

64 Ejercicios

5.13 $\int \frac{5y^2 + 6y}{10y + 3} dy$

5.1.5 Integrales de las funciones trigonométricas

Se debe tener muy claro cuál es la derivada de cada una de las funciones trigonométricas estudiadas.

Daremos a continuación la lista de las fórmulas:

1. $\int a \cos u \, du = a \operatorname{sen} u + C$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x) \, dx$, por lo que

$$\int a f'(x) \cos f(x) \, dx = a \operatorname{sen} f(x) + C$$

Ejemplo 5.19

$$\int 2x \cos x^2 \, dx = \operatorname{sen} x^2 + C. \text{ Note que } u = x^2 \text{ y } du = 2x \, dx$$

Ejemplo 5.20

$$\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \, dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos \sqrt{x} \, dx = 2 \operatorname{sen} \sqrt{x} + C.$$

Note que $u = \sqrt{x}$ y $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

Ejemplo 5.21

$$\int 5 \cos 4x \, dx = \frac{5}{4} \int 4 \cos 4x \, dx = \frac{5}{4} \sin 4x + C$$

65 Ejercicios

$$5.14 \int e^x \cos(2e^x + 1) \, dx$$

$$5.15 \int \frac{\cos(\ln x)}{x} \, dx$$

$$2. \int a \sin u \, du = -a \cos u + C$$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x) \, dx$ por lo que

$$\int a f'(x) \sin f(x) \, dx = -a \cos f(x) + C$$

Ejemplo 5.22

$$\int 3 \sin 5x \, dx = \frac{3}{5} \int 5 \sin 5x \, dx = \frac{-3}{5} \cos 5x + C$$

Ejemplo 5.23

$$\int x^2 \sin(x^3 + 4) \, dx$$

Note que $u = x^3 + 4$ y $du = 3x^2 \, dx$

$$\int x^2 \sin(x^3 + 4) \, dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 \sin(x^3 + 4) \, dx$$

$$= \frac{-1}{3} \cos(x^3 + 4) + C$$

Ejemplo 5.24

$$\int 4x \sin(4 - x^2) \, dx$$

$$\int 4x \sin(4 - x^2) \, dx = \frac{4}{-2} \int -2x \sin(4 - x^2) \, dx, \quad u = 4 - x^2 \text{ y } du = -2x \, dx$$

$$= -2(-\cos(4 - x^2)) + C$$

$$= 2 \cos(4 - x^2) + C$$

66 Ejercicios

$$5.16 \int \frac{\cos 6x}{\operatorname{sen}(6x) + 4} dx$$

$$5.17 \int \frac{\operatorname{sen}(4e^{-x})}{e^x} dx$$

$$3. \int a \tan u \, du = a \int \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \, du = -a \int \frac{-\operatorname{sen} u}{\cos u} \, du = -a \ln |\cos u| + C.$$

Válido para $\{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } u \neq \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x) dx$, por lo que

$$\int a f'(x) \tan f(x) \, dx = -a \ln |\cos f(x)| + C$$

Ejemplo 5.25

$$\int \tan 6x \, dx = \frac{1}{6} \int 6 \tan 6x \, dx = \frac{-1}{6} \ln |\cos 6x| + C$$

Ejemplo 5.26

$$\int e^x \tan e^x \, dx = -\ln |\cos e^x| + C, \quad u = e^x, \, du = e^x \, dx$$

67 Ejercicios

$$5.18 \int \frac{\tan \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} \, dx$$

$$5.19 \int \frac{\tan(e^{\operatorname{sen} x})}{\sec x} \, dx$$

$$4. \int a \cot u \, du = a \int \frac{\cos u}{\operatorname{sen} u} \, du = a \ln |\operatorname{sen} u| + C$$

Válido para $\{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } u \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x) dx$, por lo que

$$\int a f'(x) \cot f(x) \, dx = a \ln |\operatorname{sen} f(x)| + C$$

Ejemplo 5.27

$$\int x \cot(x^2 + 4) dx = \frac{1}{2} \int 2x \cot(x^2 + 4) dx = \frac{1}{2} \cdot \ln |\sin(x^2 + 4)| + C$$

Ejemplo 5.28

$$\int \frac{\cot(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \cot(\sqrt{x}) dx = 2 \ln |\sin(\sqrt{x})| + C$$

68 Ejercicios

$$5.20 \int \frac{\cot(\sin x)}{\sec x} dx$$

$$5.21 \int \frac{\csc^2(2x)}{\cot 2x + 3} dx$$

$$5. \int a \sec^2 u du = a \tan u + C$$

Válida para $\{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } u \neq \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x) dx$, por lo que

$$\int a f'(x) \sec^2[f(x)] dx = a \tan f(x) + C$$

$$\int 2 \sec^2(3x) dx = \frac{2}{3} \int 3 \sec^2(3x) dx = \frac{2}{3} \tan 3x + C$$

Ejemplo 5.29

$$\int \frac{\sec^2\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2} dx = - \int \frac{-1}{x^2} \sec^2\left(\frac{1}{x}\right) dx = -\tan\left(\frac{1}{x}\right) + C$$

Ejemplo 5.30

$$\int \frac{\sec^2(\ln x)}{x} dx = \tan(\ln x) + C \quad \text{Si } u = \ln x, du = \frac{1}{x} dx$$

69 Ejercicios

$$5.22 \int \frac{dx}{\cos^2(2x+1)} dx$$

$$5.23 \int \frac{\sec^2(\tan x)}{\cos^2 x} dx$$

$$6. \int a \csc^2 u du = -a \cot u + C$$

Esta fórmula tiene sentido en $\{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } u \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x) dx$ y por tanto

$$\int a f'(x) \csc^2 f(x) dx = -a \cot f(x) + C$$

Ejemplo 5.31

$$\int 2x \csc^2(5x^2) dx = \frac{1}{5} \int 10 \csc^2(5x^2) dx = \frac{-1}{5} \cot(5x^2) + C$$

Ejemplo 5.32

$$\int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x)} = \int \frac{1}{x} \csc^2(\ln x) dx = -\cot(\ln x) + C$$

Ejemplo 5.33

$$\int \frac{\csc^2(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} \csc^2 \sqrt{x} dx = -2 \cot \sqrt{x} + C$$

Note que si $u = \sqrt{x}$ entonces $du = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$

70 Ejercicios

$$5.24 \int \frac{\csc^2(e^{-x})}{e^x} dx$$

$$5.25 \int (3x^2 + x) \csc^2(2x^3 + x^2 + 1) dx$$

$$7. \int \sec u \tan u du = \sec u + C$$

Esta igualdad es válida para $\{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } u \neq \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x) dx$, por lo que

$$\int f'(x) \sec[f(x)] \tan[f(x)] dx = \sec[f(x)] + C$$

Ejemplo 5.34

$$\int \sec(5x) \tan(5x) dx = \frac{1}{5} \int \sec(5x) \tan(5x) dx = \frac{1}{5} \sec(5x) + C$$

Ejemplo 5.35

$$\int e^x \sec(e^x) \tan(e^x) dx = \sec(e^x) + C$$

Ejemplo 5.36

$$\begin{aligned} \int \frac{x \operatorname{sen}(x^2)}{\cos^2(x^2)} dx \\ \int \frac{x \operatorname{sen}(x^2)}{\cos^2(x^2)} dx &= \int x \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\cos x^2 \cos x^2} dx \\ &= \int x \operatorname{sen} x^2 \tan x^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \int 2x \sec(x^2) \tan(x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \sec(x^2) + C \end{aligned}$$

71 Ejercicios

$$5.26 \int \frac{\sec 3x}{\cot 3x} dx$$

$$5.27 \int \frac{\tan\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)} dx$$

$$8. \int \csc u \cot u du = -\csc u + C$$

Esta igualdad vale para $\{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } u \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x) dx$, por lo que

$$\int f'(x) \csc[f(x)] \cot[f(x)] dx = -\csc[f(x)] + C$$

Ejemplo 5.37

$$\int x \csc(4x^2) \cot(4x^2) dx$$

$$\begin{aligned} \int x \csc(4x^2) \cot(4x^2) dx &= \frac{1}{8} \int 8x \csc(4x^2) \cot(4x^2) dx \\ &= \frac{1}{8} [-\csc(4x^2)] + C \\ &= \frac{-\csc(4x^2)}{8} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.38

$$\int \frac{\csc(3x)}{\tan(3x)} dx = \frac{1}{3} \int 3 \csc(3x) \cot(3x) dx = \frac{-1}{3} \csc(3x) + C$$

Ejemplo 5.39

$$\int \frac{e^x \cos(e^x)}{\sin^2(e^x)} dx = \int e^x \frac{\cos(e^x) dx}{\sin(e^x) \sin(e^x)} = \int e^x \cot(e^x) \csc(e^x) dx = -\csc(e^x) + C$$

72 Ejercicios

$$5.28 \int \frac{dx}{x \sin^2(\ln x) \sin(\ln x)}$$

$$5.29 \int \csc x (\csc x + \cot x) dx$$

9. Calculemos ahora $\int \sec u du$. Para ello se multiplica el numerador y el denominador por la expresión $\sec u + \tan u$ en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \int \sec u du &= \int \frac{\sec u (\sec u + \tan u) du}{\sec u + \tan u} + C \\ &= \int \frac{\sec^2 u + \sec u \tan u du}{\sec u + \tan u} = \ln |\sec u + \tan u| + C \end{aligned}$$

Esto es así ya que, según lo estudiado sobre la integral que da como resultado la función logaritmo natural, si $f(u) = \sec u + \tan u$ entonces $f'(u) = \sec u \tan u + \sec^2 u$ y se tiene por tanto una integral de la forma

$$\int \frac{f'(u) du}{f(u)}$$

El resultado anterior es válido para $\{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } u \neq \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x) dx$, por lo que:

$$\int f'(x) \sec[f(x)] dx = \ln |\sec[f(x)] + \tan[f(x)]| + C$$

Ejemplo 5.40

$$\int \sec 6x dx = \frac{1}{6} \int 6 \sec 6x dx = \frac{1}{6} \ln |\sec 6x + \tan 6x| + C$$

Ejemplo 5.41

$$\int 3x \sec x^2 dx = \frac{3}{2} \int 2x \sec x^2 dx = \frac{3}{2} \ln |\sec x^2 + \tan x^2| + C$$

Ejemplo 5.42

$$\int \frac{\sec(\ln x)}{x} dx = \ln |\sec(\ln x) + \tan(\ln x)| + C$$

73 Ejercicios

$$5.30 \int \frac{\sec(e^{2x})}{e^{-2x}} dx$$

$$5.31 \int \frac{\sec(\tan x) dx}{\cos^2 x}$$

10. En forma similar al procedimiento seguido en el caso anterior calcularemos $\int \csc u du$.

$$\begin{aligned} \int \csc u du &= \int \frac{\csc u (\csc u - \cot u)}{\csc u - \cot u} du \\ &= \int \frac{\csc^2 u - \csc u \cot u}{\csc u - \cot u} dx = \ln |\csc u - \cot u| + C \end{aligned}$$

Este resultado es válido para $\{u \in \mathbb{R} \text{ tal que } u \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$

Si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x) dx$, por lo que:

$$\int f'(x) \csc[f(x)] dx = \ln |\csc[f(x)] - \cot[f(x)]| + C$$

Ejemplo 5.43

$$\int x \csc x^2 dx = \frac{1}{2} \int 2x \csc x^2 dx = \frac{1}{2} \ln |\csc x^2 - \cot x^2| + C$$

Ejemplo 5.44

$$\int e^x \csc e^x dx = \ln |\csc e^x - \cot e^x| + C$$

Ejemplo 5.45

$$\int \frac{3}{x} \csc \left(\frac{1}{x} \right) dx = -3 \int \frac{-1}{x^2} \csc \left(\frac{1}{x} \right) dx = -3 \ln \left| \csc \left(\frac{1}{x} \right) - \cot \left(\frac{1}{x} \right) \right| + C$$

74 Ejercicios

$$5.32 \int \frac{\csc(\cot x)}{\sec^2 x} dx$$

$$5.33 \int \csc \left(\frac{x}{2a} \right) dx$$

5.1.6 Integrales que involucran potencias y productos de funciones trigonométricas

Antes de proceder a determinar este tipo de integrales es conveniente recordar las fórmulas siguientes:

- a.) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \alpha \in \mathbb{R}$
- b.) $\tan^2 \alpha + 1 = \sec^2 \alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq \pi/2 + n\pi, n \in \mathbb{Z}$
- c.) $\cot^2 \alpha + 1 = \csc^2 \alpha, \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq n\pi, n \in \mathbb{Z}$
- d.) $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \alpha \in \mathbb{R}$
- e.) $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}, \alpha \in \mathbb{R}$
- f.) $\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \alpha \in \mathbb{R}$

Estudiaremos mediante ejemplos los casos generales que se enuncian a continuación:

1. Integrales del tipo $\int \sin^n x dx, \int \cos^n x dx$ con n un entero positivo par.

Ejemplo 5.46

$$\int \operatorname{sen}^2 x \, dx$$

Se utiliza la fórmula dada en e.)

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^2 x \, dx &= \int \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx \\ &= \int \frac{1}{2} \, dx - \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.47

$$\int \operatorname{sen}^4 x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^4 x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 x)^2 \, dx \\ &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int (1 - 2 \cos 2x + \cos^2 2x) \, dx \\ &= \frac{1}{4} \int dx - \frac{1}{4} \int 2 \cos 2x \, dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx \end{aligned}$$

En la última integral se utiliza nuevamente la fórmula dada en e.), solo que en este caso α es igual a $2x$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^4 x \, dx &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos 4x}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8} \int dx - \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx \\ &= \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{8} x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C \\ &= \frac{3}{8} x - \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{32} \operatorname{sen} 4x + C \end{aligned}$$

75 Ejercicios

5.34 $\int \cos^2 x \, dx$

En forma similar se procede con $\int \cos^4 x \, dx$ y en general con las integrales de las potencias pares de las funciones seno y coseno.

2. Integrales del tipo $\int \sec^n x \, dx$, $\int \csc^n x \, dx$ con n un entero positivo par.

Ejemplo 5.48

$$\int \sec^4 x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x \, dx &= \int \sec^2 x \sec^2 x \, dx, \quad \text{note que } \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x \\ &= \int (\tan^2 x + 1) \sec^2 x \, dx \\ &= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + C \end{aligned}$$

Similarmente, utilizando la identidad c.) puede determinarse $\int \csc^4 x \, dx$

Ejemplo 5.49

$$\int \sec^6 x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int (\sec^2 x)^2 \sec^2 x \, dx &= \int (\tan^2 x + 1)^2 \sec^2 x \, dx \\ &= \int (\tan^4 x + 2 \tan^2 x + 1) \sec^2 x \, dx \\ &= \int \tan^4 x \sec^2 x \, dx + 2 \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx \\ &= \frac{\tan^5 x}{5} + 2 \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x + C \end{aligned}$$

76 Ejercicios

5.35 $\int \csc^6 x \, dx$

Utilizando el procedimiento anterior pueden calcularse las integrales de las potencias pares de las funciones secante y cosecante. En el caso de potencias impares debe utilizarse el método de la integración por partes que se estudiará más adelante.

3. Integrales del tipo $\int \tan^n x \, dx$, $\int \cot^n x \, dx$ con n un entero positivo par.

Ejemplo 5.50

$$\int \tan^2 x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int \tan^2 x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \int \sec^2 x \, dx - \int dx \\ &= \tan x - x + C \end{aligned}$$

Utilizando la fórmula dada en c., calcule $\int \cot^2 x \, dx$

Ejemplo 5.51

$$\int \tan^4 x \, dx$$

$$\begin{aligned} \int \tan^4 x \, dx &= \int (\sec^2 x - 1)^2 \, dx &&= \int \sec^4 x \, dx - 2 \int \sec^2 x \, dx + \int dx \\ &= \int \sec^2 x \sec^2 x \, dx - 2 \tan x + x &&= \int (\tan^2 x + 1) \sec^2 x \, dx - 2 \tan x + x \\ &= \tan x - x + C &&= \int \tan^2 x \sec^2 x \, dx + \int \sec^2 x \, dx - 2 \tan x + x \\ &= \frac{\tan^3 x}{3} + \tan x - 2 \tan x + x + C &&= \frac{\tan^3 x}{3} + x - \tan x + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.52

Determine $\int \cot^4 x \, dx$

4. Integrales del tipo $\int \sin^m x \, dx$, $\int \cos^m x \, dx$, $\int \tan^m x \, dx$, $\int \cot^m x \, dx$ con m un entero positivo impar.

Ejemplo 5.53

$$\int \sin^3 x \, dx$$

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^3 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \, dx = \int (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos^2 x \operatorname{sen} x \, dx \\ &= \int \operatorname{sen} x \, dx + \int (\cos x)^2 (-\operatorname{sen} x) \, dx \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.54

Determine $\int \cos^3 x \, dx$

Ejemplo 5.55

$$\begin{aligned}\int \cos^5 x \, dx &= \int \cos^4 x \cos x \, dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x \, dx \\ &= \int (1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx = \int (1 - 2 \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^4 x) \cos x \, dx \\ &= \int \cos x \, dx - 2 \int \operatorname{sen}^2 x \cos x \, dx + \int \operatorname{sen}^4 x \cos x \, dx \\ &= \operatorname{sen} x - \frac{2}{3} \operatorname{sen}^3 x + \frac{1}{4} \operatorname{sen}^4 x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.56

Calcule $\int \operatorname{sen}^7 x \, dx$

Ejemplo 5.57

$$\begin{aligned}
 \int \tan^3 x \, dx &= \int \tan^2 x \tan x \, dx \\
 &= \int (\sec^2 x - 1) \tan x \, dx \\
 &= \int \sec^2 x \tan x \, dx - \int \tan x \, dx \\
 &= \frac{1}{2} \tan^2 x \, dx + \ln |\cos x| + C
 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.58

$$\begin{aligned}
 \int \cot^5 x \, dx &= \int \cot^4 x \cot x \, dx = \int (\cot^2 x)^2 \cot x \, dx \\
 &= \int \csc^4 x \cot x \, dx - 2 \int \csc^2 x \cot x \, dx + \int \cot x \, dx \\
 &= \int (\cot^2 x + 1) \csc^2 x \cot x \, dx - 2 \int \cot x \csc^2 x \, dx + \int \cot x \, dx \\
 &= -\frac{1}{4} \csc^4 x + \cot^2 x + \ln |\sen x| + C
 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.59

Determine $\int \tan^5 x \, dx$

5. Integrales del tipo $\int \cos^n x \sen^r x \, dx$, $\int \tan^n x \sec^r x \, dx$, $\int \cot^n x \sec^r x \, dx$, con n y r ambos enteros positivos pares.

Ejemplo 5.60

[[[$I = \int \sen^2 x \cos^4 x \, dx$ (utilizando las fórmulas e. y f.)

$$\begin{aligned}
 I &= \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 \, dx \\
 &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2 \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx \\
&= \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 2x dx - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x \cos 2x dx \\
&= \frac{1}{8} x + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{8} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \frac{1}{8} \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x) \cos 2x dx \\
&= \frac{1}{8} x + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos 4x dx - \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x) \cos 2x dx \\
&= \frac{1}{16} x + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{64} \operatorname{sen} 4x - \frac{1}{8} \int (\cos 2x - \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{16} x + \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x - \frac{1}{64} \operatorname{sen} 4x - \frac{1}{16} \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{48} \operatorname{sen}^3 2x + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.61

$$\begin{aligned}
&\int \tan^2 x \sec^4 x dx \\
&\int \tan^2 x \sec^4 x dx = \int \tan^2 x \sec^2 x \sec^2 x dx \\
&= \int \tan^2 x (\tan^2 x + 1) \sec^2 x dx \\
&= \int \tan^4 x \sec^2 x dx + \int \tan^2 x \sec^2 x dx \\
&= \frac{1}{5} \tan^5 x + \frac{1}{5} \tan^3 x + C
\end{aligned}$$

77 Ejercicios

5.36 Calcule $\int \cot^2 x \csc^4 x dx$

5.37 Calcule $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x dx$

5.38 Calcule $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^2 x dx$

6. Integrales del tipo $\int \operatorname{sen}^n x \cos^r x dx$, $\int \tan^n x \sec^r x dx$, $\int \cot^n x \csc^r x dx$, con n y r ambos enteros positivos, siendo por lo menos uno de los exponentes impar.

Ejemplo 5.62

$$\begin{aligned}
 & \int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx \\
 \int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, dx &= \int \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \cos^4 x \, dx \\
 &= \int (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x \cos^4 x \, dx = \int \operatorname{sen} x \cos^4 x \, dx - \int \cos^6 x \operatorname{sen} x \, dx \\
 &= -\int \cos^4 x (-\operatorname{sen} x) \, dx + \int \cos^6 x (-\operatorname{sen} x) \, dx \\
 &= \frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C
 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.63

$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx \quad \text{Ejercicio para el estudiante}$$

Ejemplo 5.64

$$\begin{aligned}
 & \int \cos^5 x \operatorname{sen}^3 x \, dx \\
 \int \cos^5 x \operatorname{sen}^3 x \, dx &= \int \cos^5 x \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} x \, dx \\
 &= \int \cos^5 x (1 - \cos^2 x) \operatorname{sen} x \, dx \\
 &= \int \cos^5 x \operatorname{sen} x \, dx - \int \cos^7 x \operatorname{sen} x \, dx \\
 &= -\frac{1}{6} \cos^6 x + \frac{1}{8} \cos^8 x + C
 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.65

$$\int \tan^3 x \sec x \, dx$$

$$\begin{aligned}
 \int \tan^3 x \sec x \, dx &= \int \tan^2 x \tan x \sec x \, dx \\
 &= \int (\sec^2 x - 1) \tan x \sec x \, dx \\
 &= \int \sec^2 x (\tan x \sec x) \, dx - \int \tan x \sec x \, dx \\
 &= \frac{1}{3} \sec^3 x - \sec x + C
 \end{aligned}$$

Ejemplo 5.66

$$\int \cot^5 x \csc x \, dx$$

Ejercicio para el estudiante

78 Ejercicios

$$5.39 \int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$$

$$5.40 \int \sqrt{\cos x} \sin^3 x \, dx$$

$$5.41 \int \sec^6 x \, dx$$

$$5.42 \int \frac{\cos^3 t}{\sin^2 t} \, dt$$

$$5.43 \int \frac{\tan^4 y}{\sec^5 y} \, dy$$

$$5.44 \int \frac{\sec^3 x}{\tan^4 x} \, dx$$

$$5.45 \int \frac{\csc^4 x}{\cot^2 x} \, dx$$

5.1.7 Integrales que dan como resultado funciones trigonométricas inversas

A partir de las fórmulas estudiadas en el capítulo de derivación sobre las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, pueden determinarse varias integrales indefinidas.

$$1. \text{ Como } \frac{d}{dx} \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ entonces } \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + C$$

Además

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0 \quad (\text{Compruébelo})$$

En general

$$\int \frac{f'(x) dx}{\sqrt{a^2 - [f(x)]^2}} = \arcsen\left(\frac{f(x)}{a}\right) + C, a > 0$$

Ejemplo 5.67

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} = \arcsen\left(\frac{x}{3}\right) + C$$

Ejemplo 5.68

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{8})^2-x^2}} = \arcsen\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right) + C$$

Ejemplo 5.69

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{\sqrt{2-(2x)^2}} = \frac{1}{2} \arcsen(2x) + C. \quad (\text{En este caso, } f(x) = 2x)$$

Ejemplo 5.70

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9-7x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-(\sqrt{7}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \int \frac{\sqrt{7} dx}{\sqrt{3^2-(\sqrt{7}x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{7}} \arcsen\left(\frac{\sqrt{7}x}{3}\right) + C$$

Ejemplo 5.71

$$\int \frac{dx}{\sqrt{16-(x+1)^2}} = \arcsen\left(\frac{x+1}{4}\right) + C$$

Ejemplo 5.72

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{9-(3-x^2)^2}} = \frac{-1}{2} \int \frac{-2x dx}{\sqrt{9-(3-x^2)^2}} = \frac{-1}{2} \arcsen\left(\frac{3-x^2}{3}\right) + C$$

Note que $f(x) = 3 - x^2$ y $f'(x) = -2x dx$

Ejemplo 5.73

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$$

En este caso debe “completarse cuadrados” en la expresión que aparece en el subradical.

$$4 - 2x - x^2 = 5 - (x + 1)^2$$

Sustituyendo en la integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+1)^2}} = \arcsen\left(\frac{x+1}{\sqrt{5}}\right) + C$$

Ejemplo 5.74

$$\int \frac{(x+3) dx}{\sqrt{3-2x^2}}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+3) dx}{\sqrt{3-2x^2}} &= \int \frac{x dx}{\sqrt{3-2x^2}} + \int \frac{3 dx}{\sqrt{3-2x^2}} \\ &= \int x(3-2x^2)^{-\frac{1}{2}} dx + 3 \int \frac{dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2}x)^2}} \\ &= -\frac{1}{4} \int -4x(3-2x^2)^{-\frac{1}{2}} dx + \frac{3}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2} dx}{\sqrt{(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2}x)^2}} \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{3-2x^2} + \frac{3}{\sqrt{2}} \arcsen\left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.75

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 12x}}$$

Volvemos a completar cuadrados en el subradical $-4x^2 + 12x = 9 - (2x - 3)^2$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{-4x^2 + 12x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{9 - (2x - 3)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{\sqrt{9 - (2x - 3)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \arcsen\left(\frac{2x - 3}{3}\right) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.76

$$\int \frac{(2+x) dx}{\sqrt{4-2x-x^2}}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{(2+x) dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} &= \int \frac{x dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} + \int \frac{2 dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} \\ &= \frac{-1}{2} \int \frac{-2x dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} \\ &= \frac{-1}{2} \int \frac{-2x-2+2}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} \\ &= \frac{-1}{2} \int \frac{(-2x-2)}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} \\ &= \frac{-1}{2} \int \frac{(-2x-2)}{\sqrt{4-2x-x^2}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} + 2 \int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} \\ &= \frac{-1}{2} \int (-2x-2) (4-2x-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx + \int \frac{dx}{\sqrt{5-(x+1)^2}} \\ &= \frac{-1}{2} \frac{(4-2x-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \operatorname{arcsen} \left(\frac{x+1}{\sqrt{5}} \right) + C \\ &= -\sqrt{4-2x-x^2} + \operatorname{arcsen} \left(\frac{x+1}{\sqrt{5}} \right) + C \end{aligned}$$

79 Ejercicios

$$5.46 \int \frac{(2x-3)}{\sqrt{1-4x^2}} dx$$

$$5.47 \int \frac{x dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$$

$$5.48 \int \frac{(2x+3)}{\sqrt{5-x^2-4x}} dx$$

2. Como $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, entonces

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \arctan x + C$$

Además $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C$, donde $a > 0$. (Compruébelo!)

En general:

$$\int \frac{f'(x) dx}{a^2 + [f(x)]^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{f(x)}{a}\right) + C$$

Ejemplo 5.77

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \int \frac{dx}{3^2+x^2} = \frac{1}{3} \arctan \frac{x}{3} + C$$

Ejemplo 5.78

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2+4x^2} &= \int \frac{dx}{(\sqrt{2})^2 + (2x)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{(\sqrt{2})^2 + (2x)^2} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{2x}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2} x) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.79

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{5+2x^2} dx &= \int \frac{x}{5+2x^2} dx + \int \frac{2}{5+2x^2} dx \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{4x dx}{5+2x^2} + \frac{2}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2} dx}{(\sqrt{5})^2 + (\sqrt{2}x)^2} \\ &= \frac{1}{4} \ln |5+2x^2| + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \arctan \frac{\sqrt{2} x}{\sqrt{5}} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.80

$$\int \frac{dx}{4x^2+4x+3} dx$$

Se "completa cuadrados" en la expresión que está en el denominador.

$$4x^2+4x+3 = 4x^2+4x+4-1+3 = (2x+1)^2+2$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 3} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2 + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{2 dx}{(\sqrt{2})^2 + (2x+1)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{2}}\right) + C$$

Ejemplo 5.81

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5}$$

Ejercicio para el estudiante

Ejemplo 5.82

$$\int \frac{3x^3 dx}{4x^2 + 12x + 13}$$

Ejercicio para el estudiante

Ejemplo 5.83

$$\begin{aligned} \int \frac{3x dx}{x^2 + 6x + 12} &= \frac{3}{2} \int \frac{2x dx}{x^2 + 6x + 12} \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{2x + 6 - 6}{x^2 + 6x + 12} dx \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x + 6) dx}{x^2 + 6x + 12} + \frac{3}{2} \int \frac{-6 dx}{x^2 + 6x + 12} \\ &= \frac{3}{2} \int \frac{(2x + 6) dx}{x^2 + 6x + 12} - 9 \int \frac{dx}{3 + (x+3)^2} \\ &= \frac{3}{2} \ln |x^2 + 6x + 12| - \frac{9}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.84

$$\int \frac{2x^3 dx}{2x^2 - 4x + 3}$$

En este caso se debe hacer primero la división, pues el exponente de la variable en el numerador es mayor que el exponente de la variable en el denominador.

$$\begin{aligned}
\int \frac{2x^3 dx}{2x^2 - 4x + 3} &= \int \frac{2x^3}{2x^2 - 4x + 3} dx = \int (x+2) + \frac{5x-6}{2x^2 - 4x + 3} dx \\
&= \int (x+2) dx + \int \frac{5x}{x^2 - 4x + 3} dx - 6 \int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 3} \\
&= \int (x+2) dx + \frac{5}{4} \int \frac{4x dx}{2x^2 - 4x + 3} - 6 \int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 3} \\
&= \int (x+2) dx + \frac{5}{4} \int \frac{(4x-4+4) dx}{2x^2 - 4x + 3} - 6 \int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 3} \\
&= \int (x+2) dx + \frac{5}{4} \int \frac{(4x-4) dx}{2x^2 - 4x + 3} + \frac{5}{4} \int \frac{4 dx}{2x^2 - 4x + 3} - 6 \int \frac{dx}{2x^2 - 4x + 3} \\
&= \frac{(x+2)^2}{2} + \frac{5}{4} \ln |2x^2 - 4x + 3| - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}x - \sqrt{2})^2 + 1} \\
&= \frac{(x+2)^2}{2} + \frac{5}{4} \ln |2x^2 - 4x + 3| - \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan(\sqrt{2}x - \sqrt{2}) + C
\end{aligned}$$

Vamos ahora a estudiar algunos tipos de integrales que no se determinan utilizando las fórmulas anteriores, sino mediante algunas técnicas especiales, llamadas técnicas de integración.

5.2 Técnicas de Integración: Método de sustitución:

Anteriormente hemos resuelto integrales como las siguiente:

$$\int x \sqrt[3]{4-x^2} dx$$

Como $d(4-x^2) = -2x dx$ entonces multiplicando y dividiendo por -2 se obtiene que:

$$\int x \sqrt[3]{4-x^2} dx = \frac{-1}{2} \int -2x(4-x^2)^{\frac{1}{3}} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(4-x^2)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C$$

Sin embargo, una integral como $\int x\sqrt{x+2} dx$ no puede calcularse por el procedimiento anterior ya que $d(x+2) = dx \neq x dx$. Se necesita por tanto un procedimiento que nos permita calcular este y similares tipos de integrales. Para ello veamos el teorema siguiente:

Teorema 5.2

Si $x = g(u)$ es una función derivable que posee una función inversa $u = g^{-1}(x)$ también derivable. Entonces, en cualquier intervalo donde $g'(x) \neq 0$ se tiene que:

$$\int f[g(u)] g'(u) du = H(u) + C \implies \int f(x) dx = H[g^{-1}(x)] + C$$

Prueba.

Utilizando la regla de la cadena se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} H(u) &= \frac{d}{dx} H[g^{-1}(x)] = \frac{d}{du} H(u) \cdot \frac{d}{dx} [g^{-1}(x)] \\ &= \frac{d}{du} H(u) \cdot \frac{1}{g'(u)} \end{aligned}$$

(Recuerde que $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$, o sea, la derivada de la función inversa es igual a 1 sobre la derivada de la función original).

Como $\frac{d}{du} H(u) = f[g(u)]g'(u)$ entonces

$$\frac{d}{dx} H(g^{-1}(x)) = f[g(u)]g'(u) \cdot \frac{1}{g'(u)} = f[g(u)] = f(x)$$

Con esto se ha demostrado que $H[g^{-1}(x)]$ es una derivada inversa de f , y que por tanto, bajo condiciones apropiadas es posible llevar a cabo el proceso de sustitución.

Ejemplo 5.85

$$\int x^2 \sqrt[3]{x+4} dx$$

Sea $u^3 = x+4$, $3u^2 du = dx$, $x = u^3 - 4$. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int x^2 \sqrt[3]{x+4} dx &= \int (u^3 - 4)^2 \sqrt[3]{u^3} 3u^2 du \\ &= \int (u^6 - 8u^3 + 16)u 3u^2 du \\ &= 3 \int (u^6 - 8u^3 + 16) u^3 du \\ &= 3 \int (u^9 - 8u^6 + 16u^3) du \\ &= 3 \left[\frac{u^{10}}{10} - 8 \frac{u^7}{7} + 16 \frac{u^4}{4} \right] + C, \text{ como } u = \sqrt[3]{x+4} \\ &= \frac{3}{10} (\sqrt[3]{x+4})^{10} - \frac{24}{7} (\sqrt[3]{x+4})^7 + 12(\sqrt[3]{x+4}) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.86

$$\int x\sqrt{x+2} \, dx$$

Sea $u = x + 2$, $du = dx$

luego $x = u - 2$, sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{x+2} \, dx &= \int (u-2)\sqrt{u} \, du = \int (u^{\frac{3}{2}} - 2u^{\frac{1}{2}}) \, du \\ &= \frac{u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2 \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5}(u)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} + C \\ &= \frac{2}{5}(x+2)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}} + C \end{aligned}$$

Note que se escogió la variable u con el exponente 3, (u^3), para que al sustituir se obtuviera una raíz cúbica exacta.

Ejemplo 5.87

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x+4}} \, dx$$

Sea $u^2 = 3x + 4$, luego $2u \, du = 3 \, dx \Rightarrow \frac{2}{3}u \, du = dx$. Además $x = \frac{u^2 - 4}{3}$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{\sqrt{3x+4}} &= \int \frac{\frac{u^2-4}{3} \cdot \frac{2}{3}u}{\sqrt{u^2}} \, du \\ &= \frac{2}{9} \int \frac{u(u^2-4)}{u} \, du \\ &= \frac{2}{9} \int (u^2-4) \, du \\ &= \frac{2}{9} \left[\frac{u^3}{3} - 4u \right] + C \\ &= \frac{2}{27} u^3 - \frac{8}{3}u + C, \text{ como } u = \sqrt{3x+4} \\ &= \frac{2}{27} [\sqrt{3x+4}]^3 - \frac{8}{3}\sqrt{3x+4} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.88

$$\int \frac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt[3]{y}} dy$$

En este caso se debe sustituir "y" por una expresión que posea tanto raíz cuadrada como cúbica, así $y = u^6$ y entonces $dy = 6u^5 du$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{y}}{1 + \sqrt[3]{y}} dy &= \int \frac{\sqrt{u^6} 6u^5}{1 + \sqrt[3]{u^6}} du \\ &= 6 \int \frac{u^8}{u^2 + 1} du \\ &= 6 \left(\frac{u^7}{7} - \frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} - u + \arctan u \right) + C \\ &= \frac{6}{7} (\sqrt[6]{y})^7 - \frac{6}{5} (\sqrt[6]{y})^5 + 2(\sqrt[6]{y})^3 - 6\sqrt[6]{y} + 6 \arctan \sqrt[6]{y} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.89

$$\int \frac{x dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}}$$

Sea $u^3 = x + 1$. Entonces $3u^2 du = dx$. Además $x = u^3 - 1$. Sustituyendo

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{(x+1)^{\frac{2}{3}}} &= \frac{(u^3 - 1)3u^2 du}{(u^3)^{\frac{2}{3}}} \\ &= 3 \int \frac{u^2(u^3 - 1) du}{u^2} \\ &= 3 \int (u^3 - 1) du \\ &= 3 \left[\frac{u^4}{4} - u \right] + C \\ &= \frac{3}{4} (\sqrt[3]{x+1})^4 - 3 \sqrt[3]{x+1} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.90

$$\int (x^3 + 3)^{\frac{1}{4}} x^5 dx$$

Sea $u^4 = x^3 + 3$. Entonces $4u^3 du = 3x^2 dx$ o también $\frac{4}{3}u^3 du = x^2 dx$

Además $x^3 = u^4 - 3$. Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int (x^3 + 3)^{\frac{1}{4}} x^3 \cdot x^2 dx &= \int (u^4)^{\frac{1}{4}} (u^4 - 3) \frac{4}{3} u^3 du \\ &= \frac{4}{3} u(u^4 - 3)u^3 du \\ &= \frac{4}{3} \int (u^8 - u^4) du \\ &= \frac{4}{3} \left[\frac{u^9}{9} - \frac{u^5}{5} \right] + C \\ &= \frac{4}{27} \left[\sqrt[4]{x^3 + 3} \right]^9 - \frac{4}{15} (\sqrt[4]{x^3 + 3})^5 + C \end{aligned}$$

80 Ejercicios

5.49 $\int \frac{dx}{1 + \sqrt[3]{x-2}}$

5.50 $\int \frac{dx}{2\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$

5.51 $\int x(2+x)^{\frac{2}{3}}$

5.52 $\int x^5(3x^2 + 4) dx$

5.53 $\int \sqrt{6+y}(y+2)^2 dy$

5.3 Métodos de Integración: Integración por partes

Esta es otra técnica que se utiliza para expresar una integral en otra expresión que se puede determinar más fácilmente.

Consideremos dos funciones f y g derivables en S . Luego, por medio del diferencial de un producto se tiene que:

$$d[f(x) \cdot g(x)] = f(x) g'(x) dx + g(x) f'(x) dx$$

$$f(x) g'(x) dx = d[f(x) \cdot g(x)] - g(x) f'(x) dx$$

integrando a ambos lados:

$$\int f(x) g'(x) dx = \int d[f(x) \cdot g(x)] - \int g(x) f'(x) dx$$

de donde

$$\int f(x) g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) f'(x) dx$$

Esta es la fórmula de integración por partes.

Utilizando los diferenciales de las funciones, si $u = f(x)$ entonces $du = f'(x) dx$, y si $v = g(x)$ entonces $dv = g'(x) dx$.

Sustituyendo en la igualdad anterior:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Haciendo una elección apropiada de u y dv , la fórmula anterior expresa la integral $\int u dv$ en términos de otra integral $\int v du$, que puede resultar más fácil de integrar.

Si $\int v du$ fuera más complicada que la integral dada, probablemente la selección hecha no ha sido la más adecuada.

Es corriente utilizar el método de integración por partes en integrales del tipo:

$$\int x^n \operatorname{sen}(ax) dx, \int x^n \operatorname{cos}(ax) dx, \int x^n e^{ax} dx, \int \ln x dx,$$

Así como en las que contienen en su integrando funciones trigonométricas inversas.

Con los ejemplos siguientes, el o la estudiante podrá darse una idea de la selección adecuada de las variables u y dv .

Ejemplo 5.91

$$\int 3x \operatorname{sen} x dx$$

Si $u = 3x$ entonces $du = 3 dx$

Si $dv = \operatorname{sen} x dx$ entonces $v = \int \operatorname{sen} x dx = -\operatorname{cos} x$

$$\begin{aligned} \int 3x \operatorname{sen} x dx &= 3x(-\operatorname{cos} x) - \int -\operatorname{cos} x \cdot 3 dx \\ &= -3x \operatorname{cos} x + 3 \operatorname{sen} x + C \end{aligned}$$

Note que sin afectar el resultado final, la constante C de integración puede adjuntarse cuando se lleva a cabo la última integración, y no cuando se determina v a partir de dv .

En algunos casos es necesario aplicar varias veces la integración por partes como se muestra en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 5.92

$$\int x^2 e^{3x} dx$$

Si $u = x^2$ entonces $du = 2x dx$. Si $dv = e^{3x} dx$ entonces $v = \int e^{3x} dx = \frac{1}{3} \int e^{3x} dx = \frac{e^{3x}}{3}$

Luego:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} dx &= x^2 \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} \cdot 2x dx \\ &= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx \end{aligned}$$

ahora $u = x$, $du = dx$ y $dv = e^{3x} dx$ y $v = \frac{1}{3} e^{3x} dx$. Por tanto:

$$\begin{aligned} \int x^2 e^{3x} dx &= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \left[\frac{x e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx \right] \\ &= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{3} \left[\frac{x e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3} dx \right] \\ &= \frac{x^2 e^{3x}}{3} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} x e^{3x} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.93

$$\int \ln x dx$$

Si $u = \ln x$ entonces $du = \frac{dx}{x}$

Si $dv = dx$ entonces $v = x$

Luego:

$$\begin{aligned}\int \ln x \, dx &= x \ln x - \int x \frac{dx}{x} \\ &= x \ln x - \int dx \\ &= x \ln x - x + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.94

$$\int x^2 \ln x \, dx$$

Si $u = \ln x$ entonces $du = \frac{dx}{x}$

Si $dv = x^2 \, dx$ entonces $v = \frac{x^3}{3}$

Luego:

$$\begin{aligned}\int x^2 \ln x \, dx &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{dx}{x} \\ &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx \\ &= \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{1}{9} x^3 + C\end{aligned}$$

Ejemplo 5.95

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

Si $u = \operatorname{sen} x$ entonces $du = \cos x \, dx$

Si $dv = e^x \, dx$ entonces $v = e^x \, dx$

Luego: $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \cos x \, dx$

Nuevamente: $u = \cos x$, $du = -\operatorname{sen} x \, dx$, $dv = e^x \, dx$, $v = e^x$

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - \left[e^x \cos x - \int e^x (-\operatorname{sen} x) \, dx \right] = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx$$

Entonces $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx + \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x$, es decir,

$$2 \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = e^x \operatorname{sen} x - e^x \cos x \implies \int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x) + C$$

Ejemplo 5.96

$$\int \sec^3 x \, dx$$

Podemos escribir: $\int \sec^3 x \, dx = \int \sec x \cdot \sec^2 x \, dx$

Si $u = \sec x$ entonces $du = \sec x \cdot \tan x \, dx$ y $dv = \sec^2 x \, dx$ entonces $v = \int \sec^2 x \, dx = \tan x$

Luego:

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x \, dx &= \sec x \cdot \tan x - \int \tan x \cdot \sec x \cdot \tan x \, dx \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x \cdot \tan^2 x \, dx \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec x (\sec^2 x - 1) \, dx \\ &= \sec x \cdot \tan x - \int \sec^3 x \, dx + \int \sec x \, dx \\ &= \int \sec^3 x \, dx + \int \sec^3 x \, dx \\ &= \sec x \tan x + \int \sec x \, dx \\ &= \int \sec^3 x \, dx \\ &= \frac{1}{2}(\sec x \tan x + \ln |\sec x + \tan x|) + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.97

$$\int \arctan x \, dx$$

Si $u = \arctan x$ entonces $du = \frac{dx}{1+x^2}$

Si $dv = dx$ entonces $v = x$

Luego:

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C$$

Ejemplo 5.98

$$\int (x+1)^2 e^x dx$$

Si $u = (x+1)^2$ entonces

$$du = 2(x+1) dx$$

Si $dv = e^x dx$ entonces $v = e^x$

Luego:

$$\int (x+1)^2 e^x dx = e^x (x+1)^2 - \int 2(x+1) e^x dx$$

nuevamente: si $u = x+1$ entonces $du = dx$ y si $dv = e^x dx$ entonces $v = e^x$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int (x+1)^2 e^x dx &= e^x(x+1)^2 - \left[e^x(x+1) - \int e^x dx \right] \\ &= e^x(x+1)^2 - (x+1)e^x + e^x + C \end{aligned}$$

81 Ejercicios

$$5.54 \int \ln^2 x dx$$

$$5.55 \int \csc^3 5x dx$$

$$5.56 \int x \ln \sqrt{x+2} dx$$

$$5.57 \int x \arcsen x dx$$

$$5.58 \int \sen(\ln x) dx$$

$$5.59 \int x \sec^2 x dx$$

$$5.60 \int \frac{x \ln x}{\sqrt{x^2-4}} dx$$

5.4 Integración por sustitución trigonométrica

Las sustituciones que involucran funciones trigonométricas se pueden llevar a cabo en aquellas integrales cuyo integrando contiene una expresión de la forma:

$\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2 x^2}$, $\sqrt{b^2 x^2 - a^2}$ con $a > 0$ y $b > 0$

La sustitución trigonométrica permite transformar una integral en otra que contiene funciones trigonométricas cuyo proceso de integración es más sencillo.

Estudiaremos cada uno de los casos como sigue:

El integrando contiene una función de la forma $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$ con $a > 0$, $b > 0$

Se hace el cambio de variable escribiendo:

$$x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} \theta, \text{ donde } \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\text{ y } x \in \left] -\frac{a}{b}, \frac{a}{b} \right[$$

$$\text{Si } x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} \theta \text{ entonces } dx = \frac{a}{b} \cos \theta d\theta$$

Además:

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2 - b^2 x^2} &= \sqrt{a^2 - b^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2 - a^2 \operatorname{sen}^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2 (1 - \operatorname{sen}^2 \theta)} \\ &= \sqrt{a^2 \cos^2 \theta} \\ &= |a \cos \theta| \\ &= a \cos \theta \end{aligned}$$

pues $a > 0$ y como $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ entonces $\cos \theta > 0$

$$\text{Luego: } \sqrt{a^2 - b^2 x^2} = a \cos \theta$$

$$\text{Como } x = \frac{a}{b} \operatorname{sen} \theta \text{ entonces } \operatorname{sen} \theta = \frac{bx}{a} \text{ y } \theta = \operatorname{arcsen} \left(\frac{bx}{a} \right)$$

Para este caso, las otras funciones trigonométricas pueden obtenerse a partir de la figura siguiente:

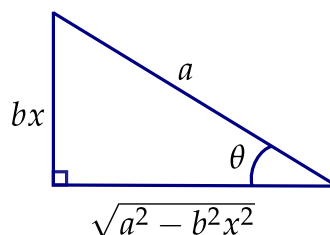


Figura 5.1

Ejemplo 5.99

$$\int \sqrt{16-x^2} dx, \quad x \in]-4, 4[$$

$$\text{Sea } x = 4 \operatorname{sen} \theta \text{ con } \theta \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\Rightarrow dx = 4 \cos \theta d\theta$$

$$\text{Luego: } 16 - x^2 = 16 - 16 \operatorname{sen}^2 \theta = 16(1 - \operatorname{sen}^2 \theta) = 16 \cos^2 \theta \Rightarrow \sqrt{16 - x^2} = 4 \cos \theta$$

$$\int \sqrt{16-x^2} dx = \int 4 \cos \theta \cdot 4 \cos \theta d\theta$$

$$= 16 \int \cos^2 \theta d\theta$$

$$= 16 \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

Sustituyendo:

$$= 8 \int (1 + \cos 2\theta) d\theta$$

$$= 8 \left(\theta + \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right) + C$$

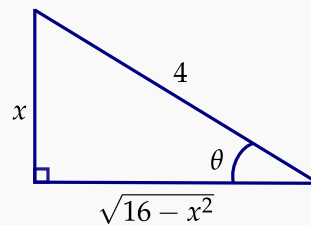
$$= 8\theta + 4 \cdot 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C$$

$$= 8\theta + 8 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C$$

$$\text{Como } x = 4 \operatorname{sen} \theta \text{ entonces } \operatorname{sen} \theta = \frac{x}{4} \text{ y } \theta = \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{4} \right)$$

$$\text{Además } \sqrt{16-x^2} = 4 \cos \theta \text{ por lo que } \cos \theta = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4}$$

Estos resultados también pueden obtenerse a partir de la figura siguiente:



Por último:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{16-x^2} dx &= 8\theta + 8 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \\ &= 8 \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{4} \right) + 8 \cdot \frac{x}{4} \cdot \frac{\sqrt{16-x^2}}{4} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.100

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}}, \quad x \in \left] \frac{-5}{2}, \frac{5}{2} \right[$$

$$\text{Sea } x = \frac{5}{2} \operatorname{sen} \theta, \quad \theta \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$dx = \frac{5}{2} \cos \theta \, d\theta$$

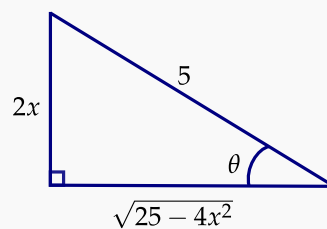
$$\text{Luego } 25 - 4x^2 = 25 - 4 \cdot \frac{25}{4} \operatorname{sen}^2 \theta = 25 - 25 \operatorname{sen}^2 \theta = 25 \cos^2 \theta$$

$$\text{Así } \sqrt{25 - 4x^2} = 5 \cos \theta$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}} &= \int \frac{\frac{5}{2} \cos \theta \, d\theta}{\frac{5}{2} \operatorname{sen} \theta \cdot 5 \cos \theta} \\ &= \frac{1}{5} \int \frac{d\theta}{\operatorname{sen} \theta} \\ &= \frac{1}{5} \int \operatorname{csc} \theta \, d\theta \\ &= \frac{1}{5} \ln |\operatorname{csc} \theta - \cot \theta| + C \end{aligned}$$

Como $x = \frac{5}{2} \operatorname{sen} \theta$ entonces $\operatorname{sen} \theta = \frac{2x}{5}$ por lo que puede utilizarse la siguiente figura para dar el resultado final:



$$\operatorname{csc} \theta = \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{1}{\frac{2x}{5}} = \frac{5}{2x}$$

$$\cot \theta = \frac{\sqrt{25-4x^2}}{2x}$$

Luego:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{25-4x^2}} = \frac{1}{5} \ln \left| \frac{5}{2x} - \frac{\sqrt{25-4x^2}}{2x} \right| + C$$

Ejemplo 5.101

$$\int \frac{dx}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}}, x \in]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$$

$$\text{Sea } x = \sqrt{5} \operatorname{sen} \theta, \theta \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\implies dx = \sqrt{5} \cos \theta d\theta$$

$$\text{Luego } 5 - x^2 = 5 - 5 \operatorname{sen}^2 \theta = 5 \cos^2 \theta$$

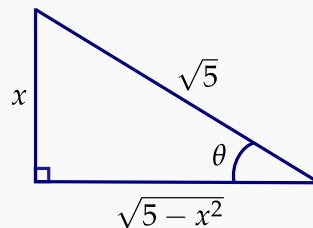
$$\text{Así } (5 - x^2)^{\frac{3}{2}} = (5 \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{(5 \cos^2 \theta)^3} = (\sqrt{5} \cos \theta)^3 = 5 \sqrt{5} \cos^3 \theta$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{\sqrt{5} \cos \theta d\theta}{5\sqrt{5} \cos^3 \theta} \\ &= \frac{1}{5} \int \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{5} \int \sec^2 \theta d\theta \\ &= \frac{1}{5} \tan \theta + C \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} + C \end{aligned}$$

$$\text{pues } \operatorname{sen} \theta = \frac{x}{\sqrt{5}} \text{ y } \cos \theta = \frac{\sqrt{5-x^2}}{\sqrt{5}}$$

También puede utilizarse:

**Ejemplo 5.102**

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}, x \in]-2, 2[$$

$$\text{Sea } x = 2 \operatorname{sen} \theta, \theta \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\implies dx = 2 \cos \theta d\theta$$

$$\text{Además: } 4 - x^2 = 4 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta = 4 \cos^2 \theta \implies \sqrt{4-x^2} = 2 \cos \theta$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}} &= \int \frac{(2 \operatorname{sen} \theta)^2 2 \cos \theta d\theta}{2 \cos \theta} \\
 &= 4 \int \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta \\
 &= 4 \int \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \\
 &= 2 \int (1 - \cos 2\theta) d\theta \\
 &= 2 \left(\theta - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\theta \right) + C \\
 &= 2\theta - 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta + C \\
 &= 2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{2} \right) - 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + C \\
 &= 2 \operatorname{arcsen} \left(\frac{x}{2} \right) - \frac{x(4-x^2)}{2} + C
 \end{aligned}$$

82 Ejercicios

5.61 $\int x^2 \sqrt{25-x^2} dx$

5.62 $\int \frac{x^2}{(4-x)^{\frac{3}{2}}} dx$

5.63 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{16-x^2}}$

5.4.1 El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{a^2 + b^2 x^2}$ con $a > 0$, $b > 0$

Hacemos un cambio de variable escribiendo $x = \frac{a}{b} \tan \theta$, donde $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ y $x \in \mathbb{R}$

Si $x = \frac{a}{b} \tan \theta$ entonces $dx = \frac{a}{b} \sec^2 \theta d\theta$. Además:

$$\sqrt{a^2 + b^2 x^2} = \sqrt{a^2 + b^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{a^2(1 + \tan^2 \theta)} = \sqrt{a^2 \sec^2 \theta} = |a \sec \theta|$$

Como $a > 0$ y $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ entonces $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$ es positiva y por tanto $\sqrt{a^2 + b^2 x^2} = a \sec \theta$

Las otras funciones trigonométricas pueden obtenerse a partir de la siguiente figura:

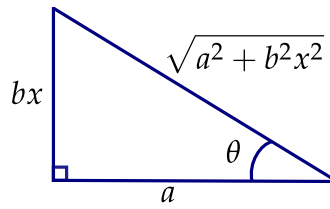


Figura 5.2

Ejemplo 5.103

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}$$

Sea $x = 2 \tan \theta, \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\Rightarrow dx = 2 \sec^2 \theta d\theta$

Luego: $4 + x^2 = 4 + 4 \tan^2 \theta = 4(1 + \tan^2 \theta) \Rightarrow 4 + x^2 = 4 \sec^2 \theta$

Entonces $\sqrt{4+x^2} = \sqrt{4 \sec^2 \theta} = |2 \sec \theta| = 2 \sec \theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} &= \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{2 \sec \theta} \\ &= \int \sec \theta d\theta \\ &= \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.104

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2+6}}$$

Sea $x = \sqrt{6} \tan \theta, \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

$$dx = \sqrt{6} \sec^2 \theta d\theta$$

Luego: $x^2 + 6 = 6 \tan^2 \theta + 6 = 6(\tan^2 \theta + 1) = 6 \sec^2 \theta$

$$\sqrt{x^2+6} = \sqrt{6 \sec^2 \theta} = \sqrt{6} \sec \theta \quad (\cos \theta > 0 \text{ si } \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[)$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2+6}} dx &= \int \frac{6 \tan^2 \theta \sqrt{6} \sec^2 \theta d\theta}{\sqrt{6} \sec \theta} \\
&= 6 \int \tan^2 \theta \sec \theta d\theta \\
&= 6 \int (\sec^2 \theta - 1) \sec \theta d\theta \\
&= 6 \int (\sec^3 - \sec \theta) d\theta \\
&= 6 \left[\frac{1}{2} (\sec \theta \tan \theta) + \ln |\sec \theta + \tan \theta| \right] - 6 \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\
&= 3 \sec \theta \tan \theta - 3 \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\
&= 3 \cdot \frac{\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{6}} \cdot \frac{x}{\sqrt{6}} - 3 \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+6}}{\sqrt{6}} + \frac{x}{\sqrt{6}} \right| + C \\
&= \frac{x\sqrt{x^2+6}}{2} - 3 \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+6} + x}{\sqrt{6}} \right| + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.105

$$\int \frac{x dx}{(9+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\text{Sea } x = \frac{3}{2} \tan \theta, \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$dx = \frac{3}{2} \sec^2 \theta d\theta$$

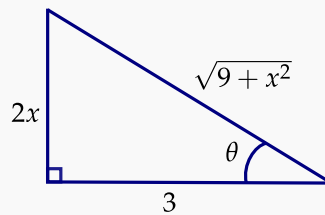
$$\text{Luego } 9+4x^2 = 9+4 \cdot \frac{9}{4} \tan^2 \theta = 9+9 \tan^2 \theta = 9(1+\tan^2 \theta) = 9 \sec^2 \theta$$

$$(9+4x^2)^{\frac{3}{2}} = (9 \sec^2 \theta)^{\frac{3}{2}} = (9 \sec^2 \theta)^3 = (3 \sec \theta)^3 = 27 \sec^3 \theta$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x \, dx}{(9+4x^2)^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{\frac{3}{2} \tan \theta \cdot \frac{3}{2} \sec^2 \theta}{27 \sec^3 \theta} \, d\theta \\
 &= \frac{1}{12} \int \frac{\tan \theta \, d\theta}{\sec \theta} \\
 &= \frac{1}{12} \int \frac{\frac{\sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{1}{\cos \theta}} \, d\theta \\
 &= \frac{1}{12} \int \sin \theta \, d\theta = \frac{1}{12} (-\cos \theta) + C
 \end{aligned}$$

Como



De la sustitución inicial $\tan \theta = \frac{2x}{3}$

Por tanto:

$$\int \frac{x \, dx}{(9+4x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{12} \cdot \frac{3}{\sqrt{9+4x^2}} + C$$

Ejemplo 5.106

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2+3}}$$

Sea $x = \sqrt{3} \tan \theta$, $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

$$dx = \sqrt{3} \sec^2 \theta \, d\theta$$

Luego $x^2 + 3 = 3 \tan^2 \theta + 3 = 3(\tan^2 \theta + 1) = 3 \sec^2 \theta$

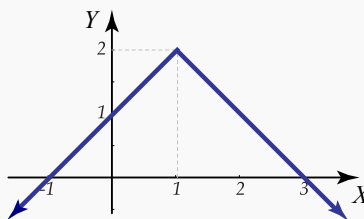
$$\sqrt{x^2 + 3} = \sqrt{3 \sec^2 \theta} = \sqrt{3} \sec \theta$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2+3}} &= \int \frac{\sqrt{3} \sec^2 \theta d\theta}{(\sqrt{3} \tan \theta)^4 \sqrt{3} \sec \theta} \\
 &= \frac{1}{9} \int \frac{\sec \theta d\theta}{\tan^4 \theta} \\
 &= \frac{1}{9} \int \frac{\cos^4 \theta}{\cos \theta \cdot \sin^4 \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{9} \int \frac{\cos^3 \theta}{\sin^4 \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{9} \int \frac{(1 - \sin^2 \theta) \cos \theta}{\sin^4 \theta} d\theta \\
 &= \frac{1}{9} \int \left(\frac{\cos \theta}{\sin^4 \theta} - \frac{\sin^2 \theta \cos \theta}{\sin^4 \theta} \right) d\theta \\
 &= \frac{1}{9} \int \cos \theta (\sin \theta)^{-4} d\theta - \frac{1}{9} \int \cos \theta (\sin \theta)^{-2} d\theta \\
 &= \frac{-1}{27 \sin^3 \theta} + \frac{\csc \theta}{9} + C
 \end{aligned}$$

Como $x = \sqrt{3} \tan \theta$ entonces $\tan \theta = \frac{x}{\sqrt{3}}$

Por lo que se obtiene: $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$, $\csc \theta = \frac{\sqrt{x^2+3}}{x}$



Por último:

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{x^2+3}} = \frac{-(\sqrt{x^2+3})^3}{27 x^3} + \frac{\sqrt{x^2+3}}{9x} + C$$

83 Ejercicios

5.64 $\int \frac{\sqrt{4x^2+1}}{x} dx$

5.65 $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+3x^2}} dx$

5.4.2 El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{b^2x^2 - a^2}$ con $a > 0$ y $b > 0$

En este caso la sustitución adecuada es:

$$x = \frac{a}{b} \sec \theta, \text{ donde } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[\text{ y } x \in \left]-\infty, \frac{-a}{b}\right[\cup \left]\frac{a}{b}, +\infty\right[, \text{ o sea } |x| > \frac{a}{b}$$

$$\text{Si } x = \frac{a}{b} \sec \theta \text{ entonces } dx = \frac{a}{b} \sec \theta \tan \theta d\theta$$

$$\text{Además } \sqrt{b^2x^2 - a^2} = \sqrt{b^2 \cdot \frac{a^2}{b^2} \cdot \sec^2 \theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2 \theta - 1)}$$

$$\text{de donde } \sqrt{b^2x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 \theta} = |a \tan \theta| = a \tan \theta, \text{ pues } a > 0 \text{ y } \tan \theta > 0 \text{ para } \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$$

$$\text{Como } x = \frac{a}{b} \sec \theta \text{ entonces } \sec \theta = \frac{bx}{a} \text{ por lo que } \theta = \arcsen\left(\frac{bx}{a}\right)$$

Utilizando el siguiente triángulo puede obtenerse las otras funciones trigonométricas:

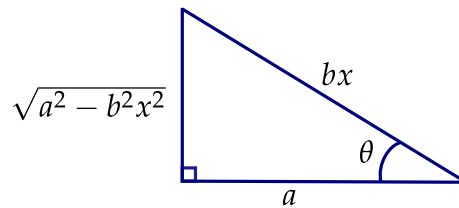


Figura 5.3

Ejemplo 5.107

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - 9}}, \quad |x| > 3$$

$$\text{Sea } x = 3 \sec \theta \Rightarrow dx = 3 \sec \theta \tan \theta d\theta, \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[$$

$$\text{Luego } x^2 - 9 = 9 \sec^2 \theta - 9 = 9(\sec^2 \theta - 1) = 9 \tan^2 \theta \text{ y } \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{9 \tan^2 \theta} = 3 \tan \theta$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x \, dx}{\sqrt{x^2-9}} &= \int \frac{3 \sec \theta \cdot 3 \sec \theta \tan \theta \, d\theta}{3 \tan \theta} \\ &= 3 \int \sec^2 \theta \, d\theta \\ &= 3 \tan \theta + C = \sqrt{x^2-9} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.108

$$\int \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x} \, dx, |x| > \frac{1}{4}$$

$$\text{Sea } x = \frac{1}{2} \sec \theta \implies dx = \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta \, d\theta$$

$$\text{Luego } 4x^2 - 1 = 4 \cdot \frac{1}{4} \sec^2 \theta - 1 = \sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta \text{ y } \sqrt{4x^2-1} = \sqrt{\tan^2 \theta} = \tan \theta$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{4x^2-1}}{x} \, dx &= \int \frac{\tan \theta \cdot \frac{1}{2} \sec \theta \tan \theta \, d\theta}{\frac{1}{2} \sec \theta} \\ &= \int \tan^2 \theta \, d\theta \\ &= \int \tan \theta - \theta + C \\ &= \sqrt{4x^2-1} - \operatorname{arcsec}(2x) + C \\ &= \int (\sec^2 \theta - 1) \, d\theta \end{aligned}$$

Ejemplo 5.109

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2-8}}, |u| > 2\sqrt{2}$$

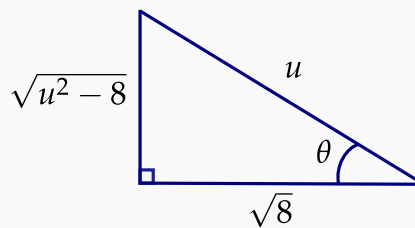
$$\text{Sea } u = \sqrt{8} \sec \theta \implies du = \sqrt{8} \sec \theta \tan \theta \, d\theta$$

$$\text{Luego } u^2 - 8 = 8 \sec^2 \theta - 8 = 8(\sec^2 \theta - 1) = 8 \tan^2 \theta \text{ y } \sqrt{u^2-8} = \sqrt{8 \tan^2 \theta} = \sqrt{8} \tan \theta$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 - 8}} &= \int \frac{\sqrt{8} \sec \theta \tan \theta d\theta}{8 \sec^2 \theta \sqrt{8} \tan \theta} \\ &= \frac{1}{8} \int \frac{d\theta}{\sec \theta} \\ &= \frac{1}{8} \int \cos \theta d\theta \\ &= \frac{1}{8} \operatorname{sen} \theta + C \end{aligned}$$

Como $\sec \theta = \frac{u}{\sqrt{8}}$ puede utilizarse la siguiente figura para determinar $\operatorname{sen} \theta$



Por último:

$$\int \frac{du}{u^2 \sqrt{u^2 - 8}} = \frac{1}{8} \frac{\sqrt{u^2 - 8}}{u} + C$$

84 Ejercicios

5.66 $\int x^3 \sqrt{4x^2 - 9} dx$

5.67 $\int \frac{\sqrt{y^2 - 25}}{y^4} dy$

5.4.3 El integrando contiene una expresión de la forma $\sqrt{Ax^2 + Bx + C}$

Ejemplo 5.110

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}}$$

Podemos escribir $x^2 - 6x + 13 = x^2 - 6x + 9 + 4 = (x - 3)^2 + 4$

Luego $\int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}}$ es la integral que debemos calcular

Sea $x-3=2 \tan \theta$, $\theta \in \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\Rightarrow dx=2 \sec^2 \theta d\theta$

Luego $(x-3)^2+4=4 \tan^2 \theta+4=4 \sec^2 \theta$ y $\sqrt{(x-3)^2+4}=\sqrt{4 \sec^2 \theta}=2 \sec \theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(x-3)^2+4}} &= \int \frac{2 \sec^2 \theta d\theta}{2 \sec \theta} \\ &= \int \sec \theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{(x-3)^2+4}}{2} + \frac{x-3}{2} \right| + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.111

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{21+4x-x^2}}$$

Se tiene que: $21+4x-x^2=21-(x^2-4x)=25-(x-2)^2$. Luego la integral se convierte en:

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-(x-2)^2}}$$

y se utiliza la sustitución $(x-2)=5 \sin \theta$, de donde $x=2+5 \sin \theta \Rightarrow dx=5 \cos \theta d\theta$

Luego: $25-(x-2)^2=25-25 \sin^2 \theta=25 \cos^2 \theta$ y $\sqrt{25-(x-2)^2}=5 \cos \theta$. Sustituyendo:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-(x-2)^2}} &= \int \frac{(2+5 \operatorname{sen} \theta)^2 5 \cos \theta d\theta}{5 \cos \theta} \\
&= \int (4+20 \operatorname{sen} \theta+25 \operatorname{sen}^2 \theta) d\theta \\
&= \int 4 d\theta+20 \int \operatorname{sen} \theta d\theta+25 \int \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \\
&= \int 4 d\theta+20 \int \operatorname{sen} \theta d\theta+\frac{25}{2} \int d\theta-\frac{25}{2} \int \cos 2\theta d\theta \\
&= 4\theta-20 \cos \theta+\frac{25}{2} \theta-\frac{25}{4} \operatorname{sen} 2\theta+C \\
&= \frac{33}{2} \theta-20 \cos \theta+\frac{25}{2} \operatorname{sen} \theta \cos \theta+C \\
&= \frac{33}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-2}{5}\right)-20 \frac{\sqrt{25-(x-2)^2}}{5}+\frac{25}{2} \cdot \frac{x-2}{5} \cdot \frac{\sqrt{25-(x-2)^2}}{5}+C \\
&= \frac{33}{2} \operatorname{arcsen}\left(\frac{x-2}{5}\right)-4 \sqrt{21+4x-x^2}+\frac{(x-2) \sqrt{21+4x-x^2}}{2}+C
\end{aligned}$$

con $|x-2| < 5$, o sea $x \in]-3,7[$

Ejemplo 5.112

$$I = \int \frac{(x+2) dx}{(3+2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Se tiene que $3+2x-x^2 = 4-(x-1)^2$ (completando cuadrados)

Luego la integral que se debe determinar es:

$$\int \frac{(x+2) dx}{[4-(x-2)^2]^{\frac{3}{2}}}$$

Sea $(x-1) = 2 \operatorname{sen} \theta$, o sea $x = 1 + 2 \operatorname{sen} \theta \Rightarrow dx = 2 \cos \theta d\theta$

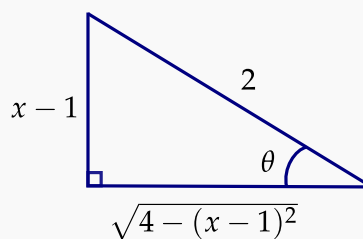
Luego $4 - (x-1)^2 = 4 - 4 \operatorname{sen}^2 \theta = 4(1 - \operatorname{sen}^2 \theta) = 4 \cos^2 \theta$

$$\left(\sqrt{4 - (x-1)^2}\right)^3 = \left(\sqrt{4 \cos^2 \theta}\right)^3 = (2 \cos \theta)^3 = 8 \cos^3 \theta$$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{(x+2) dx}{[4-(x-2)^2]^{\frac{3}{2}}} &= \int \frac{(1+2 \operatorname{sen} \theta + 2) 2 \cos \theta d\theta}{8 \cos^3 \theta} \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{(3+2 \operatorname{sen} \theta) d\theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{3}{\cos^2 \theta} + \frac{2 \operatorname{sen} \theta}{\cos^2 \theta} \right) d\theta \\ &= \frac{3}{4} \int \sec^2 \theta d\theta + \frac{1}{2} \int \operatorname{sen} \theta (\cos \theta)^{-2} d\theta \\ &= \frac{3}{4} \tan \theta - \frac{1}{2} \cdot \frac{(\cos \theta)^{-1}}{-1} + C \\ &= \frac{3}{4} \tan \theta + \frac{1}{2 \cos \theta} + C \end{aligned}$$

Como $x-1 = 2 \operatorname{sen} \theta$ entonces $\operatorname{sen} \theta = \frac{x-1}{2}$ y utilizando



se obtiene finalmente que

$$= \int \frac{(x+2) dx}{(3+2x-x^2)^{\frac{3}{2}}} I = \frac{3}{4} \cdot \frac{(x-1)}{\sqrt{4-(x-1)^2}} + \frac{1}{\sqrt{4-(x-1)^2}} + C, \text{ con } x \in]-1, 3[$$

Ejemplo 5.113

$$\int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}$$

Se tiene que $x^2 + 4x + 3 = x^2 + 4x + 4 - 1 = (x+2)^2 - 1$

por lo que $\int \frac{2x \, dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \frac{2x \, dx}{\sqrt{(x+2)^2 - 1}}$, con $|x+2| > 1$

Sea $x+2 = \sec \theta$ de donde $x = \sec \theta - 2 \implies dx = \sec \theta \tan \theta \, d\theta$

Luego $(x+2)^2 - 1 = \sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$ y $\sqrt{(x+2)^2 - 1} = \tan \theta$

Sustituyendo:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x \, dx}{\sqrt{(x+2)^2 - 1}} &= \int \frac{2(\sec \theta - 2) \sec \theta \tan \theta \, d\theta}{\tan \theta} \\ &= 2 \int (\sec^2 \theta - 2 \sec \theta) \, d\theta \\ &= 2 \tan \theta - 4 \ln |\sec \theta + \tan \theta| + C \\ &= 2\sqrt{(x+2)^2 - 1} - 4 \ln |x+2 + \sqrt{x^2 + 4x + 3}| + C \end{aligned}$$

85 Ejercicios

5.68 $\int \frac{(2x-3) \, dx}{(x^2+2x-3)^{\frac{3}{2}}}$

5.69 $\int \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1} \, dx$

5.70 $\int \frac{\sec^2 x \, dx}{(4 - \tan^2 x)^{\frac{3}{2}}}$

5.71 $\int \frac{e^{-x} \, dx}{(9e^{-2x} + 1)^{\frac{3}{2}}}$

5.5 Integración de fracciones racionales

Recibe el nombre de fracción racional una expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Ejemplos de fracciones racionales son $\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 + 4}$, $\frac{3x + 5}{x^2 - 3x + 2}$, $\frac{6x^2 + 7x - 5}{2x - 3}$

Una fracción es propia, si el grado del polinomio en el numerador es menor que el del polinomio en el denominador. Por ejemplo $\frac{3x+1}{x^2-5x+5}$, $\frac{2x}{x^2+3}$, $\frac{3x^2+1}{x^3-1}$

Hasta el momento hemos determinado integrales de la forma $\int \frac{A}{(x-a)^n} \, dx$ que da como resultado $A \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C$ cuando $n \neq 1$ y $A \ln |x-a| + C$ si $n = 1$

Además también se puede determinar integrales del tipo $\int \frac{mx+b}{x^2+bx+c} dx$ donde $b^2-4ac < 0$, es decir x^2+bx+c no es factorizable en \mathbb{R} (Para este tipo de integral ver “Integrales que dan como resultado funciones trigonométricas inversas”).

Debemos ahora encontrar un método que permita obtener la derivada inversa de expresiones del tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$. La idea básica del método consiste descomponer una fracción racional en una suma de fracciones racionales más simples, llamadas usualmente fracciones parciales.

Daremos sin demostración los siguientes teoremas:

Teorema 5.3

Si $M(x)$ y $N(x)$ son polinomios, entonces:

$\int \frac{M(x)}{N(x)} = L(x) + \frac{R(x)}{N(x)}$, en donde $L(x)$ y $R(x)$ son polinomios tales que el grado de $R(x)$ es menor que el de $N(x)$

Ejemplo 5.114

$$\frac{5x^3 + 7x^2 + x - 1}{x^2 + 1} = 5x + 7 - \frac{4x + 6}{x^2 + 1}$$

Teorema 5.4

Si $M(x)$ y $N(x)$ son polinomios tales que el grado de $M(x)$ es menor que el de $N(x)$, entonces $\frac{M(x)}{N(x)}$ se puede representar como una suma $S(x)$ de expresiones de la forma:

$$\frac{A}{ax+b}, \frac{B}{(ax+b)^n}, \frac{Cx+D}{ax^2+bx+c}, \frac{Cx+D}{(ax^2+bx+c)^n}$$

Como resultado del teorema 5.4 se tienen los cuatro siguientes casos:

- 1) Cada factor lineal $ax+b$ que aparece sólo una vez en $N(x)$ posee un término de la forma $\frac{A}{ax+b}$ en la suma $S(x)$.
- 2) Para cada factor lineal $ax+b$ que aparece k veces en $N(x)$ habrá una suma de k términos como sigue:

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \frac{A_3}{(ax+b)^3} + \dots + \frac{A_k}{(ax+b)^k}$$

en la suma $S(x)$

- 3) Para cada factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$, que aparezca sólo una vez en $N(x)$ existe un término de la forma $\frac{Cx + D}{ax^2 + bx + c}$ en la suma $S(x)$.
- 4) Para cada factor cuadrático $ax^2 + bx + c$ con $b^2 - 4ac < 0$, que aparezca k veces en $N(x)$ habrá una suma de k términos como sigue:

$$\frac{C_1x + D_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{C_2x + D_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{C_kx + D_k}{(ax^2 + bx + c)^k}$$

en la suma $S(x)$

Teorema 5.5

Si el valor de un polinomio $P(x)$ de grado n es igual al valor de su polinomio $Q(x)$ de grado m , donde $m \leq n$, para al menos $n + 1$ valores de x , entonces los polinomios son idénticos y tienen valores iguales para todos los valores de x .

El teorema 5.5 será utilizado para obtener los valores de las constantes en cada uno de los casos anteriores. Daremos ahora ejemplos de cada caso.

Caso 1: Calcular cada una de las siguientes integrales:

Ejemplo 5.115

$$\int \frac{4x - 2}{x(x + 1)(x - 2)} dx$$

Observe que el denominador del integrando ya está factorizado, y cada factor lineal aparece solo una vez. Luego se puede escribir la siguiente igualdad (aplicando el teorema 5.4)

$$\frac{4x - 2}{x(x + 1)(x - 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{x - 2}$$

de donde:

$$\frac{4x - 2}{x(x + 1)(x - 2)} = \frac{A(x + 1)(x - 2) + Bx(x - 2) + Cx(x + 1)}{x(x + 1)(x - 2)}$$

igualando los numeradores se tiene:

$$4x - 2 = A(x + 1)(x - 2) + Bx(x - 2) + Cx(x + 1)$$

Para determinar los valores de A, B y C se pueden utilizar dos procedimientos.

- i. Si dos polinomios $T(x)$ y $Z(x)$ son tales que $T(x) = Z(x)$ para $x \in \mathbb{R}$, entonces los coeficientes de potencias iguales de x en los dos polinomios deben ser iguales.

Como:

$$4x - 2 = A(x^2 - x - 2) + B(x^2 - 2x) + C(x^2 + x)$$

entonces

$$4x - 2 = (A + B + C)x^2 + (-A - 2B + C)x - 2A \text{ y por tanto:}$$

$$A + B + C = 0$$

$$-A - 2B + C = 4$$

$$-2A = -2$$

Resolviendo el sistema anterior se obtiene que $A = 1, B = -2$ y $C = 1$

Luego:

$$\frac{4x - 2}{x(x + 1)(x - 2)} = \frac{1}{x} + \frac{-2}{x + 1} + \frac{1}{x - 2}$$

- ii. Como los miembros de la ecuación $4x - 2 = A(x + 1)(x - 2) + Bx(x - 2) + Cx(x + 1)$ son polinomios de grado dos o menos y deben ser iguales para más de dos valores de x , del teorema 5.5 concluimos que son iguales para todos los valores de x . Luego es posible escoger tres valores arbitrarios de x para sustituirlos en la ecuación anterior y así obtener tres ecuaciones en las incógnitas A, B, C . Generalmente se utilizan valores de x que conduzcan a las ecuaciones más simples.

Así, si $x = 0$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} 4(0) - 2 &= A(0 + 1)(0 - 2) + B \cdot 0(0 - 2) + C \cdot 0(0 + 1) \\ &= A(1)(-2) \text{ de donde } A = 1 \end{aligned}$$

Si $x = -1$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} 4(-1) - 2 &= A(-1 + 1)(-1 - 2) + B(-1)(-1 - 2) + C(-1)(-1 + 1) \\ &= B(3) \text{ de donde } B = -2 \end{aligned}$$

Por último, si $x = 2$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} 4(2) - 2 &= A(2 + 1)(2 - 2) + B \cdot 2(2 - 2) + C \cdot 2(2 + 1) \\ &= C(6) \text{ de donde } C = 1 \end{aligned}$$

Como vemos, el resultado es el mismo que el obtenido en el procedimiento señalado en i.

Luego:

$$\begin{aligned} \int \frac{4x-2}{x(x+1)(x-2)} dx &= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{-2}{x+1} dx + \int \frac{1}{x-2} dx \\ &= \ln |x| - 2 \ln |x+1| + \ln |x-2| + C \\ &= \ln \left| \frac{x(x-2)}{(x+1)^2} \right| + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.116

$$\int \frac{6x^2 - 2x - 1}{4x^3 - x} dx$$

En este caso se debe factorizar primero el denominador del integrando. Así $4x^3 - x = x(2x+1)(2x-1)$

Luego:

$$\frac{6x^2 - 2x - 1}{4x^3 - x} = \frac{6x^2 - 2x - 1}{x(2x-1)(2x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{2x+1}$$

Se deben calcular nuevamente los valores de A, B y C , utilizando para ello cualquiera de los dos procedimientos ya señalados.

Como:

$$\frac{6x^2 - 2x - 1}{x(2x-1)(2x+1)} = \frac{A(2x-1)(2x+1) + Bx(2x+1) + Cx(2x-1)}{x(2x-1)(2x+1)}$$

entonces:

$$6x^2 - 2x - 1 = A(2x-1)(2x+1) + Bx(2x+1) + Cx(2x-1)$$

Utilizando el segundo procedimiento daremos a x los valores de $0, \frac{1}{2}$ y $\frac{-1}{2}$ como sigue:

Si $x = 0$ entonces: $1 = A(-1)(1)$ de donde $A = -1$

Si $x = \frac{1}{2}$ entonces: $-\frac{1}{2} = B(\frac{1}{2})(2)$ de donde $B = \frac{-1}{2}$

Si $x = \frac{-1}{2}$ entonces: $\frac{3}{2} = C(\frac{-1}{2})(-2)$ de donde $C = \frac{3}{2}$

Luego

$$\begin{aligned}
\int \frac{6x^2 - 2x - 1}{4x^3 - x} dx &= \int \frac{6x^2 - 2x - 1}{x(2x-1)(2x+1)} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{-\frac{1}{2}}{2x-1} dx + \int \frac{\frac{3}{2}}{2x+1} dx \\
&= -\int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2x-1} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{2x+1} \\
&= -\ln|x| - \frac{1}{4} \ln|2x-1| + \frac{3}{4} \ln|2x+1| + C \\
&= \ln \left| \frac{\sqrt[4]{(2x+1)^3}}{x\sqrt{2x-1}} \right| + C
\end{aligned}$$

Ejemplo 5.117

$$\int \frac{2x+1}{x^3-7x+6} dx = \int \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)}$$

Luego, según el teorema 5.4

$$\frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}$$

de donde:

$$2x+1 = A(x-2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x-2)$$

Utilizando el segundo procedimiento para determinar A, B y C, se obtiene que:

Si $x = 2$ entonces $5 = B(1)(5)$ de donde $B=1$

Si $x = 3$ entonces $-5 = C(-4)(-5)$ de donde $C = -\frac{1}{4}$

Si $x = 1$ entonces $3 = A(-1)(4)$ de donde $A = -\frac{3}{4}$

Luego:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{2x+1}{x^3-7x+6} dx &= \int \frac{2x+1}{(x-1)(x-2)(x+3)} dx \\
 &= \int \frac{\frac{-3}{4}}{x-1} dx + \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{\frac{-1}{4}}{x+3} dx \\
 &= \frac{-3}{4} \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{dx}{x-2} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{x+3} \\
 &= -\frac{3}{4} \ln|x-1| + \ln|x-2| - \frac{1}{4} \ln|x+3| + C
 \end{aligned}$$

Caso 2:**Ejemplo 5.118**

$$\int \frac{2y^2 + 11y + 8}{y^3 + 4y^2 + 4y} dy$$

Factorizando el denominador del integrando se obtiene que

$$y^3 + 4y^2 + 4y = y(y^2 + 4y + 4) = y(y+2)^2.$$

Se observa que el factor $(y+2)$ aparece dos veces, por lo que según el teorema 5.4 existirá una suma de dos términos para el término $(y+2)^2$

Luego:

$$\frac{2y^2 + 11y + 8}{y^3 + 4y^2 + 4y} = \frac{2y^2 + 11y + 8}{y(y+2)^2} = \frac{A}{y} + \frac{B}{y+2} + \frac{C}{(y+2)^2}$$

$$\frac{2y^2 + 11y + 8}{y(y+2)^2} = \frac{A(y+2)^2 + By(y+2) + C(y)}{y(y+2)^2}$$

de donde:

$$2y^2 + 11y + 8 = A(y+2)^2 + By(y+2) + C(y)$$

Aplicando el teorema 5.5:

Si $y=0$ entonces $8 = A(2)^2$ de donde $A=2$

Si $y=-2$ entonces $-6 = C(-2)$ de donde $C=3$

Pueden ahora utilizarse los valores de A y C e igualar coeficientes para determinar el valor de B , o darle a "y" otro valor (según teorema 5.5) como se hace a continuación:

Si $y = 1$ entonces $21 = 2(3)^2 + B \cdot 1(3) + 3(1)$ de donde $21 = 18 + 3B + 3$ y por último $B = 0$

Luego:

$$\begin{aligned} \int \frac{2y + 11y + 8}{y^3 + 4y^2 + 4y} dy &= \int \frac{2}{y} dy + \int \frac{3}{(y+2)^2} dy \\ &= 2 \int \frac{dy}{y} + 3 \int (y+2)^{-2} dy \\ &= 2 \ln |y| - \frac{3}{y+2} + C \end{aligned}$$

Ejemplo 5.119

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} dx$$

En este caso el factor x se repite 2 veces y el factor $(x-2)$ lo hace 3 veces.

Luego

$$\frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-2} + \frac{D}{(x-2)^2} + \frac{E}{(x-2)^3}$$

$$\frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} = \frac{Ax(x-2)^3 + B(x-2)^3 + Cx^2(x-2)^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2}{x^2(x-2)^3}$$

de donde:

$$x^3 - 1 = Ax(x-2)^3 + B(x-2)^3 + Cx^2(x-2)^2 + Dx^2(x-2) + Ex^2$$

Por el teorema 5.5:

$$\text{Si } x = 0 \text{ entonces } -1 = B(-2)^3 \text{ de donde } B = \frac{1}{8}$$

$$\text{Si } x = 2 \text{ entonces } 7 = E(2) \text{ de donde } E = \frac{7}{4}$$

Daremos ahora otros valores a x para obtener ecuaciones que permitan calcular los valores de A , C y D .

$$\begin{aligned} \text{Si } x = 1 \text{ entonces } 0 &= -A + \frac{1}{8} \cdot (-1) + C - D + \frac{7}{8} \\ \text{o sea } A - C + D &= \frac{7}{8} \end{aligned}$$

$$\text{Si } x = 3 \text{ entonces } 26 = 3A + \frac{1}{8} + 9C + 9D + \frac{7}{8} \cdot 9$$

o sea $A + 3C + 3D = 6$

Si $x = -1$ entonces $-2 = 27A + 9C - 3D - \frac{20}{8}$ o sea $27A + 9C - 3D = \frac{1}{2}$ se tiene entonces el siguiente sistema de ecuaciones.

$$A - C + D = \frac{13}{8}$$

$$A + 3C + D = \frac{27}{8}$$

$$27A + 9C - 3D = \frac{-3}{8}$$

el cual se satisface para $A = \frac{3}{16}$, $C = \frac{-3}{16}$ y $D = \frac{5}{4}$

Luego:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 - 1}{x^2(x-2)^3} dx &= \int \frac{\frac{3}{16}}{x} dx + \int \frac{\frac{1}{8}}{x^2} dx + \int \frac{\frac{-3}{16}}{x-2} dx + \int \frac{\frac{5}{4}}{(x-2)^2} dx + \int \frac{\frac{7}{4}}{(x-2)^3} dx \\ &= \frac{3}{16} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{8} \int x^{-2} dx - \frac{3}{16} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{5}{4} \int (x-2)^{-2} dx + \frac{7}{4} \int (x-2)^{-3} dx \\ &= \frac{3}{16} \ln |x| - \frac{1}{8x} - \frac{3}{16} \ln |x-2| - \frac{5}{4(x-2)} - \frac{7}{8(x-2)^2} + C \end{aligned}$$