

MATEMATICA II



**CARRERA: ADMINISTRACIÓN
ANÁLISIS DE SISTEMAS
ELECTRÓNICA.
SEMESTRE: TERCERO.**

A MODO DE PROLOGO

La integral es conocida principalmente como la operación inversa de la derivada, la cual busca determinar la función que la origino; con ello se determina el área bajo una curva. Al realizar la integral indefinida, siempre se debe agregar una constante ya que la función obtenida es una familia de soluciones posible dependiendo de esta constante, esto tiene sentido, ya que al derivar cualquier constante su valor es cero (0).

Los métodos de cálculos de una integra de forma general, como en las derivadas, son dos (2):

- a) Mediante el concepto de limite
- b) Mediante la fórmulas particular para casos específicos

En conclusión podemos señalar que para la forma de resolver una integral es según la forma como su derivada nos condujo a la función que se está integrando.

Las integrales definida nos permite determinar el área bajo la curva de la función, el valor del volumen en revolución esto busca desarrollar el razonamiento y la habilidad así como la comprensión y utilización operaciones imprescindibles en el desarrollo tecnológico del conocimiento científico.

SIMÓN NATIVIDAD DÍAZ ESPÍN
LICENCIADO EN EDUCACIÓN
MENCIÓN MATEMÁTICA



ÍNDICE

Introducción	07
Unidad 1 – Integral Indefinida	09
Propiedades de la integral indefinida	09
Linealidad de la integral indefinida	11
La primitiva de una función impar es siempre par	11
La primitiva F de una función f par es impar donde $F(0) = 0$	12
La primitiva de una función periódica es la suma de una función lineal y de una función periódica	12
Relación entre la integral de una función y la de su inversa	13
Existencia de primitivas	14
Cálculo de primitivas - Integrales inmediatas	14
Tabla de las principales funciones primitivas	15
Técnicas de Integración:	16
Generalidades	17
Integración directa	17
Integrales de resolución inmediata o por tablas	18
Autoevaluación	21
Integración por cambio de variable simple o sustitución	22
Pasos para integrar por cambio de variable	23
Ejemplos de Integrales por Sustitución o Cambio de Variable simples	24
Autoevaluación	26
Integración por partes	27
Ejemplos de Integrales por parte	28
Autoevaluación	35
Integrales por Sustituciones Trigonómicas	35
Funciones e identidades Trigonómicas.	40
Ejemplos por Sustituciones Trigonómicas	43

Autoevaluación	50
Integrales que tienen potencia de Senos y Cosenos	51
Integrales de la forma $\int \text{Sen}^m(x) dx$ y $\int \text{Cos}^m(x) dx$	51
Integrales de la forma $\int \text{Sen}^m(x) \text{Cos}^n(u) dx$	51
Caso 1: Cuando m es impar	53
Caso 2: Si n es impar	53
Caso 3: Si n y m son pares	54
Integrales que contiene potencias de tangentes y secantes	55
Caso 1: Cuando n es par	55
Caso 2: Cuando m es impar	56
La tangente tiene potencia par	56
La secante tiene potencia impar	57
Ninguno de los anteriores	57
Sustitución de Weierstrass	57
Integración numérica	58
Ejemplos Integrales que tienen potencia de Senos y Cosenos	59
Autoevaluación	64
Integración de Funciones Racionales por Descomposición en Fracciones Simples	64
Caso 1: Factores lineales distintos.	66
Caso 2: Factores lineales repetidos	66
Caso 3: Factores cuadráticos distintos	67
Caso 4: factores cuadráticos repetidos	67
Ejemplos Integrales por fracciones parciales	68
Autoevaluación.	77
Funciones hiperbólica	78
Significado hiperbólico	79
Fórmulas de funciones hiperbólicas	79

Gráficas de funciones hiperbólicas	80
Identidades trigonométricas hiperbólicas	81
Integrales y derivadas de funciones hiperbólicas	82
Ejemplo de resolución de integrales hiperbólicas	83
Autoevaluación	84
Teorema del valor medio en el cálculo integral.	85
Ejemplo de teorema del valor medio	87
Autoevaluación	89
Teoremas Fundamentales del Cálculo Integral	89
Intuición geométrica	90
Enunciado de los teoremas.	91
Ejemplos del teorema fundamental del cálculo	92
Autoevaluación	94
Integrales Impropias	94
Límites infinitos de integración	96
Asíntotas verticales en los límites de integración	97
Carácter y valor de las Integrales Impropias	97
Primera especie	98
Segunda especie	98
Tercera especie	98
Resolución de Integrales Impropias:	98
Autoevaluación	100
Unidad 2 – Aplicaciones de la integral definida	101
Cálculo de áreas planas por integración	101
Región negativa	102
Región negativa y positiva	102
Área entre dos gráficas	103
Ejercicios de Áreas de Funciones.	104
Autoevaluación	108

Sólido de revolución	109
Rotaciones alrededor de los ejes cartesianos	109
Rotación paralela al eje de abscisas Ox .	110
Rotación paralela al eje de ordenadas	111
Ejemplos de determinación de volúmenes de sólidos	112
Autoevaluación	117
Recursos interactivos	119
Referencias bibliográficas	120

INTRODUCCIÓN

Los principios de la integración fueron formulados por Newton y Leibniz a finales del siglo XVII. Mediante el teorema fundamental del cálculo, que desarrollaron los dos de forma independiente, la integración conectada con la derivación, y la integral definida de una función se puede calcular fácilmente una vez se conoce una antiderivada. Las integrales y las derivadas pasaron a ser herramientas básicas del cálculo, con numerosas aplicaciones en ciencia e ingeniería.

Las Integrales se clasifican básicamente en “integrales indefinidas e integrales definidas”. Explicaremos qué son las integrales cómo se resuelven. Señalando las fórmulas que permiten resolver integrales indefinidas, los diferentes métodos de integración, las propiedades de este tipo de integrales.

Una integral indefinida es una operación matemática que consiste en calcular la función primitiva de una función. Es decir, dada una función $f(x)$, la integral indefinida de la función $f(x)$ es igual al conjunto de funciones que al ser derivadas dan como resultado $f(x)$.

Así pues, la función obtenida de resolver una integral indefinida se llama función primitiva.

Al calcular las Integrales indefinidas y las integrales definidas, analizaremos la diferencia entre ellas, las integrales indefinidas se resuelven para todo el dominio de la función, en cambio, la integrales definidas se calculan en tan solo un intervalo del dominio de la función.

Las integrales definidas son integrales empleadas para calcular el área de la región comprendida entre la función y el eje de abscisas en un intervalo determinado. Por lo tanto la integral definida de la función $f(x)$ en el

intervalo $[a, b]$ es igual al área entre la gráfica de $f(x)$, el eje X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$.

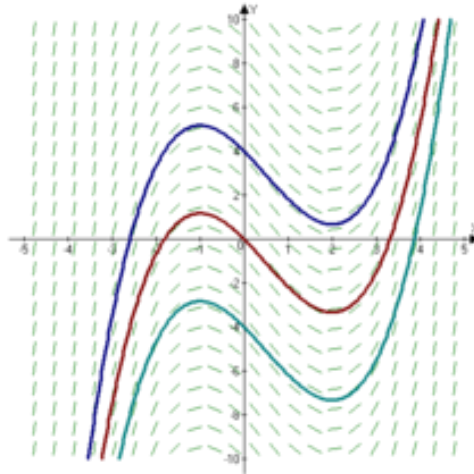
Por otro lado, al resorber una integral indefinida se obtiene función, en cambio al resorber una integral definida el valor obtenido es único.

La idea de la integral indefinida supuso un paso más en el camino de la abstracción conducido por las matemáticas modernas. Con ella, la integral dejó de referirse únicamente a un modo de determinar las áreas que forman curvas y rectas para asumir la condición de función en sí, susceptible de formar parte de ecuaciones y descripciones de modelos en el gran marco de las teorías del análisis matemático.

El teorema fundamental del cálculo, para evaluar las integrales definidas, necesariamente se tiene que f sea continua en $[a, b]$. Aunque, su aplicaciones de física y economía por nombrar alguna ciencias es posible hallar que a , b o ambos extremos tiendan a $+\infty$ o $-\infty$. Las integrales que no cumplan la condición de estar acotadas en sus extremos ya sea porque uno o ambos límites sean infinitos o bien porque existe alguna discontinuidad infinita en el intervalo $[a, b]$, son integrales impropias. El concepto de discontinuidad infinita en un punto por la izquierda o la derecha, se da a partir del cálculo del límite de la función en ese punto.

UNIDAD 1

Integración indefinida



Los principios de la integración fueron formulados por Newton y Leibniz a finales del siglo XVII. Mediante el teorema fundamental del cálculo, que desarrollaron los dos de forma independiente.

Los conceptos modernos de integración se basan en la teoría matemática abstracta conocida como integral de Lebesgue, que fue desarrollada por Henri Lebesgue.

En el cálculo infinitesimal, la función “primitiva” o antiderivada de una función f es una función F cuya derivada es f , es decir, $F' = f$.

Condición suficiente para que una función f admita primitivas sobre un intervalo es que sea continua en dicho intervalo.

Si una función f admite una primitiva sobre un intervalo, admite una infinidad, que difieren entre sí en una constante: si F_1 y F_2 son dos

primitivas de f , entonces existe un número real C , tal que $F_1 = F_2 + C$, a C se le conoce como constante de integración. La consecuencia, si F es una primitiva de una función f , el conjunto de sus primitivas es $F + C$. Este conjunto se le llama integral indefinida de f y se representa como:

$$I = \int f(x) dx$$

El proceso de hallar la primitiva de una función se conoce como integración indefinida y es el inverso de la derivación. Las integrales indefinidas están relacionadas con las integral definida a través del teorema fundamental del cálculo, y proporcionan un método sencillo de calcular integrales definidas de numerosas funciones.

Ejemplo

Una primitiva de la función $f(x) = \text{Cos}(x)$ en \mathbb{R} es la función $F(x) = \text{Sen}(x)$ ya que:

$$\frac{d}{dx}(F(x)) = \frac{d}{dx}(\text{Sen}(x)) = \text{Cos}(x) \forall x \in \mathbb{R}$$

La derivada de una constante es cero, tendremos que $\text{Cos}(x)$ tendrá un número infinito de primitivas por ejemplo: $\text{Sen}(x)$, $\text{Sen}(x) + 2$, $\text{Sen}(x) - 80$, por nombrar algunas. Cualquier primitiva de la función $f(x) = \text{Cos}(x)$ será de la forma $\text{Sen}(x) + C$ donde C es una constante conocida como constante de integración. La constante expresar que cada función tiene un número infinito de primitivas diferentes.

Entendemos lo que significa la constante de integración, analizando el hecho de que la función $f(x)$ es la derivada de otra función $F'(x)$, entonces, para cada valor de x , $f(x)$ le asigna la pendiente de $F(x)$. Si se dibujáramos todos los punto (x, y) en el plano cartesiano un pequeño segmento con pendiente $f(x)$, se obtiene un campo vectorial como el que se representa en la figura plasmada al inicio. Luego el problema de encontrar una función $F(x)$ donde su derivada sea la función $f(x)$ se convierte en el

problema de encontrar una función de la gráfica de la cual, en todos los puntos sea tangente a los vectores del campo. En la figura vemos como si cambia el valor de la constante de integración se obtienen diversas funciones que cumplen esta condición y que son traslaciones verticales unas de otras.

Propiedades de la integral indefinida

Linealidad de la integral indefinida

La primitiva es lineal, esto es:

1. Si f es una función que posee una primitiva F sobre un intervalo I , entonces para todo real m , una primitiva de mf sobre el intervalo I es mF .
2. Si F y G son primitivas respectivas de dos funciones f y g , entonces una primitiva de $f + g$ es $F + G$.

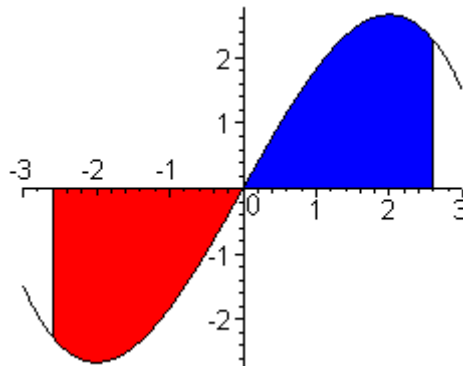
La linealidad se puede expresar como sigue:

$$I = \int (mf(x) \pm lg(x)) dx = m \int f(x) dx \pm l \int g(x) dx$$

La primitiva de una función impar es siempre par

En la figura de la derecha, observamos, las áreas antes y después de cero son opuestas, lo que significa que la integral entre $-a$ y a es nula, ósea $F(a) - F(-a) = 0$, F donde la primitiva de f , impar. Por lo tanto despejando siempre tenemos

$F(-a) = F(a)$: F resulta par.



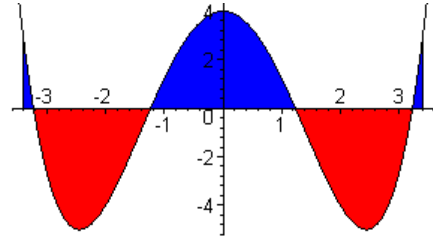
La primitiva F de una función f par es impar donde $F(0) = 0$

Según vemos en la figura de la derecha, las áreas antes y después de cero son iguales, lo que se escribe con la siguiente igualdad de integrales:

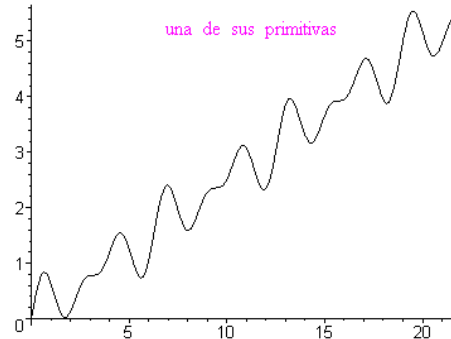
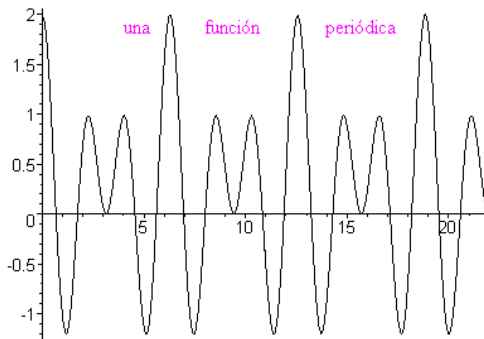
$$A = \int_{-a}^0 f(x) dx = \int_0^a f(x) dx$$

Entonces $F(0) - F(-a) = F(a) - F(0)$. Si $F(0) = 0$, $F(-a) = -F(a)$:

F es impar.



La primitiva de una función periódica es la suma de una función lineal y de una función periódica

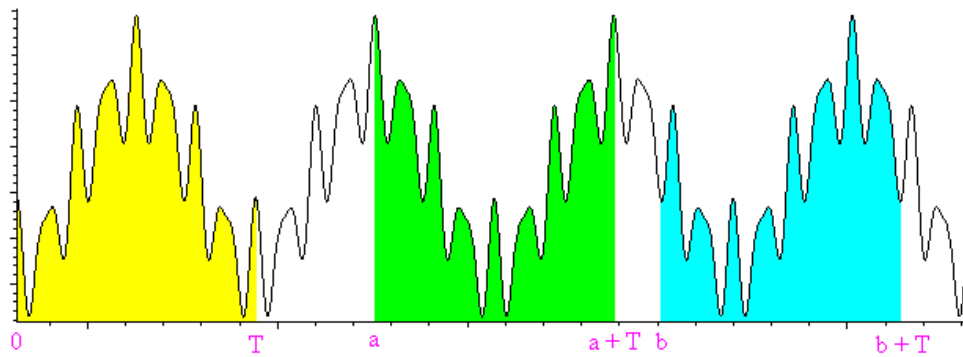


Para probarlo, hay que constatar que el área bajo una curva de una función periódica, entre las abscisas x y $x + T$ (T es el período) es constante es decir no depende de x . En la figura superior observamos tres áreas iguales. Se puede mostrar utilizando la periodicidad y la relación de Chasles, o sencillamente ¡con unas tijeras! (cortando y superponiendo las áreas de color).

Usando la primitiva, significa que $F(x + T) - F(x)$ es una constante, que se puede llamar A ; luego la función $G(x) = F(x) - \frac{Ax}{T}$ es periódica de período T . En efecto

$$G(x + T) = F(x + T) - \frac{A(x + T)}{T} = F(x) + A - \frac{Ax}{T} - \frac{AT}{T} = F(x) - \frac{Ax}{T} = G(x)$$

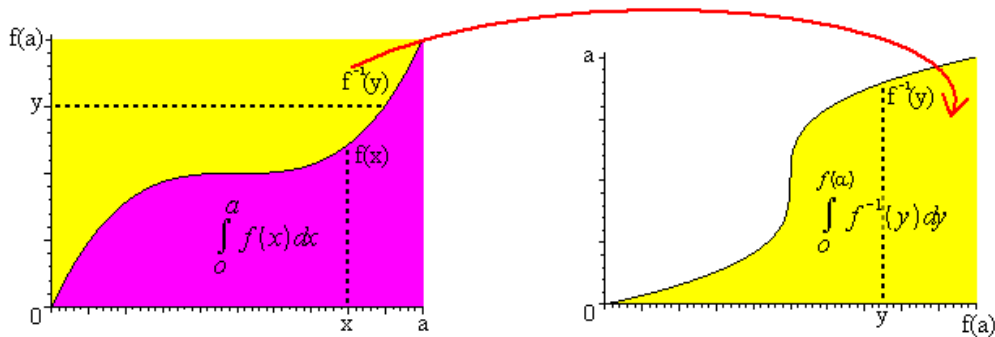
Por consiguiente $F(x) = G(x) + \frac{Ax}{T}$ es la suma de G , periódica, y de $\frac{Ax}{T}$, lineal.



Relación entre la integral de una función y la de su inversa

Resumiendo, se impone $f(0) = 0$; a es un número cualquiera del dominio de f . Entonces tenemos la relación:

$$I = \int_0^a f(x) dx + \int_0^{f(a)} f^{-1}(y) dy = af(a)$$



El área morada es la integral de f , el área amarilla es la de f^{-1} , y la suma es el rectángulo cuyos costados miden a y $f(a)$ (valores algebraicos). Se pasa de la primera curva, la de f , a la segunda, la de f^{-1} aplicando la simetría axial alrededor de la diagonal $y = x$.

El interés de esta fórmula es permitir el cálculo de la integral de f^{-1} sin conocer una primitiva; de hecho, ni hace falta conocer la expresión de la “Función inversa”.

Existencia de primitivas

Cualquier función continua sobre $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ admite localmente una antiderivada o primitiva. Sin embargo en espacios de dimensión finita la continuidad no garantiza la existencia de antiderivadas.

Una condición suficiente de existencia de antiderivada es que la imagen pertenezca a un espacio vertical conveniente, también llamado c^∞ -completo. La propiedad definitoria de dichos espacios es que toda función $f: \mathbb{R} \rightarrow E$ con $f \in c^\infty(\mathbb{R}, E)$ admite una función primitiva. Si el espacio no es c^∞ -completo la continuidad o incluso la suavidad de una función no garantiza la existencia de antiderivada.

Cálculo de primitivas - Integrales inmediatas

Para hallar una primitiva de una función dada, basta con descomponerla (como una combinación lineal) en funciones elementales cuyas primitivas son conocidas o se pueden obtener leyendo al revés una tabla de derivadas, y luego aplicar la linealidad de la integral:

$$I = \int (mf(x) \pm lg(x)) dx = m \int f(x) dx \pm l \int g(x) dx$$

Tabla de las principales funciones primitivas

La tabla siguiente se resume las reglas de integración de algunas funciones comunes que admiten una primitiva simple; estas son las que podemos obtener como una aplicación inmediata del Teorema Fundamental del Cálculo. En general, se llama integrales inmediatas a las que se deducen directamente de esta tabla y de las propiedades de linealidad de la integración.

Grupo	Función	Derivada
Función potencia	Función constante $f(x) = k, k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
	Función identidad $f(x) = x$	$f'(x) = 1$
	Multiplicación por una constante: $f(x) = k g(x), k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = k g'(x)$
	Potencia de exponente natural: $f(x) = x^n; n = 0, 1, 2, 3, \dots$	$f'(x) = n x^{n-1}$
	Función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
	Función recíproca $f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
	Caso general $f(x) = x^r; r \in \mathbb{R}$	$f'(x) = r x^{r-1}$
Función exponencial	Base e : $f(x) = e$	$f'(x) = e;$
	Caso general: $f(x) = a^x : r \in \mathbb{R}, a > 0$	$f'(x) = a^x L, n a$
Función Logarítmica	Logaritmo en base e: $f(x) = \ln x$	$f'(x) = \frac{1}{x}; x > 0$
	Caso general: $f(x) = \log_a(x); a \in \mathbb{R}; a > 0$	$f'(x) = \frac{1}{x \ln(a)}$
Funciones trigonométricas	Función seno: $f(x) = \text{Sen}(x)$	$f'(x) = \text{Cos}(x)$
	Función coseno: $f(x) = \text{Cos}(x)$	$f'(x) = -\text{Sen}(x)$
	Función tangente: $f(x) = \text{Tan}(x)$	$f'(x) = \text{Sec}^2(x)$

Funciones trigonométricas inversas	Función arcoseno: $f(x) = \text{Sen}^{-1}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	Función arcocoseno: $f(x) = \text{Cos}^{-1}(x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	Función arcotangente: $f(x) = \text{Tan}^{-1}(x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Funciones hiperbólicas	Función seno hiperbólico: $f(x) = \text{Senh}(x)$	$f'(x) = \text{Cosh}(x)$
	Función coseno hiperbólico: $f(x) = \text{Cosh}(x)$	$f'(x) = \text{Senh}(x)$
	Función tangente hiperbólico: $f(x) = \text{Tan}(x)$	$f'(x) = \text{Sech}^2(x)$

A modo de ejemplo, busquemos una primitiva de $f(x) = x(2-3x)$. Sabiendo $f'(x) = x(2-3x)$. Como no se conocen primitivas de un producto, desarrollemos la expresión aplicando distributiva: $f'(x) = 2x - 3x^2$; aquí notamos que $2x$ es la derivada de x^2 , $3x^2$ es la de x^3 , por lo tanto $2x - 3x^2$ tiene como primitiva $x^2 - x^3 + C$. Si además se pide que la primitiva verifique una condición inicial $F(x_0) = y_0$; entonces la constante C es unívocamente determinada. Para nuestro ejemplo, si se impone $F(2) = 3$, entonces forzosamente $C = 7$.

Técnicas de integración

Se entiende por métodos de integración al conjunto de las diferentes técnicas usadas (en ocasiones se combinan) para hallar una primitiva, antiderivada o simplemente integral indefinida de una función. Así, dada una función $f(x)$ un método de integración nos permite obtener otra función que, por el teorema fundamental del cálculo, equivale a hallar una función $F(x)$ tal que $f(x)$ sea su derivada

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$$

Generalidades

El problema de resolver una integral indefinida o buscar una primitiva es mucho más elaborado que el problema de calcular la derivada de una función. Por ejemplo, no existe ninguna función elemental $F(x)$ tal que:

$$F(x) = \int e^{-x^2} dx$$

Si se consideran grupos de funciones elementales de un cierto tipo (polinómicas, fracciones racionales, trigonométricas, etc.) entonces el problema de encontrar la primitiva puede resolverse por los métodos de integración correspondientes.

Integración directa

Algunas veces es posible aplicar la relación dada por el teorema fundamental del cálculo de forma directa. Esto requiere conocer de antemano una función $F(x)$ que sea el resultado de la antiderivada de $f(x)$. Para ello se puede disponer de tablas como las presentadas a continuación:

Integrales Inmediatas de Funciones			
01	$\int k dx = kx + C; k = \text{Constante}$	02	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; n \neq -1$
03	$\int \frac{dx}{x} = \text{Ln} x + C$	04	$\int e^x dx = e^x + C$
05	$\int e^{kx} dx = \frac{e^{kx}}{k} + C, k \neq 0$	06	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\text{Ln } a} + C; a > 0, a \neq 1$
07	$\int a^{kx} dx = \frac{a^{kx}}{k \text{Ln } a} + C; a > 0, a \neq 1$	08	$\int \text{Ln } x dx = x \text{Ln}(x) - x + C$
09	$\int \frac{dx}{x^2+1} = \text{Tan}^{-1}(x) + C$	10	$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \text{Ln} \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$
11	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \text{Ln} \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$	12	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \text{Sen}^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) + C$

13	$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a} \text{Sec}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$	14	$\int \text{Sen}(x) dx = -\text{Cos}(x) + C$
15	$\int \text{Cos}(x) dx = \text{sen}(x) + C$	16	$\int \text{CTg}(x) dx = \text{Ln} \text{sen}(x) + C$
17	$\int \text{Tan}(x) dx = \text{Ln} \text{sec}(x) + C = -\text{Ln} \text{Cos}(x) + C$		
18	$\int \text{Sec}(x) dx = \text{Ln} \text{sec}(x) + \text{Tan}(x) + C$		
19	$\int \text{Csc}(x) dx = \text{Ln} \text{Csc}(x) - \text{CTg}(x) + C$		
20	$\int \text{Sec}^2(x) dx = \text{Tan}(x) + C$	21	$\int \text{Csc}^2(x) dx = -\text{CTg}(x) + C$
22	$\int \text{Sec}(x)\text{Tan}(x) dx = \text{Sec}(x) + C$	23	$\int \text{Csc}(x)\text{CTg}(x) dx = -\text{Csc}(x) + C$
24	$\int \text{Senh}(x) dx = \text{Cosh}(x) + C$	25	$\int \text{Cosh}(x) dx = \text{Senh}(x) + C$
26	$\int \text{Tanh}(x) dx = \text{Ln}(\text{Cosh}(x)) + C$	27	$\int \text{CTg}(x) dx = \text{Ln}(\text{Senh}(x)) + C$
28	$\int \text{Sech}(x) dx = \text{Tan}^{-1}(\text{Senh}(x)) + C$		
29	$\int \text{Csch}(x) dx = \text{Ln}\left \text{Tanh}\left(\frac{x}{2}\right)\right + C$		

Integrales de resolución inmediata o por tablas

Resolver una integral es, ver cual método debemos usar para obtener el resultado buscado, en esta primera etapa de vemos expresar la función de tal manera que utilizando la tabla de integrales se obtenga la solución buscada. Es decir, realizar operaciones algebraicas que te permita transformar la función compleja en varias simples debe reconocer la regla o la técnica a aplicar para obtener una antiderivada o primitiva. Con frecuencia, una ligera alteración de un integrando requerirá una técnica

de integración diferente (o producir una función cuya antiderivada no es una función elemental)

Por ejemplo

01 Realizar

$$I = \int x^5 dx$$

por la tabla sabemos $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ por lo tanto

$$I = \int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$$

02 Realizar

$$I = \int \frac{1}{x^2} dx = \int x^{-2} dx$$

por la tabla sabemos $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ por lo tanto

$$I = \frac{x^{-2+1}}{(-2+1)} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$$

03 Realizar

$$I = \int \sqrt[3]{z} dz$$

Transformando la raíz en potencia.

$$.I = \int z^{\frac{1}{3}} dx$$

Por la tabla sabemos $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ por lo tanto

$$I = \frac{z^{\frac{1}{3}+1}}{\left(\frac{1}{3}+1\right)} + C = \frac{z^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} z^{\frac{4}{3}} + C$$

04 Realizar

$$I = \int \frac{1}{\sqrt[3]{z^2}} dz$$

Transformando la raíz en potencia y simplificando.

$$.I = \int \frac{1}{\sqrt[3]{z^2}} dz = \int \frac{1}{z^{\frac{2}{3}}} dz = \int z^{-\frac{2}{3}} dz$$

Por la tabla sabemos $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ por lo tanto

$$I = \frac{z^{-\frac{2}{3}+1}}{\left(-\frac{2}{3}+1\right)} + C = \frac{z^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3z^{\frac{1}{3}} + C$$

05 Realizar $I = \int (2z^2 - 5z + 3) dz$

Separando la integral y extrayendo las constantes fuera de las integrales.

$$.I = 2 \int z^2 dz - 5 \int z dz + 3 \int dz$$

Por la tabla sabemos $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $\int dx = x + C$ por lo tanto

$$I = 2 \frac{z^{2+1}}{(2+1)} - 5 \frac{z^{1+1}}{(1+1)} + 3z + C = \frac{2}{3}z^3 - \frac{5}{2}z^2 + 3z + C$$

06 Realizar $I = \int (1-x)\sqrt{x} dx$

Transformando la raíz en potencia, aplicando distributiva y separando la Integral

$$I = \int (1-x)x^{\frac{1}{2}} dx = \int \left(x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \int x^{\frac{1}{2}} ds - \int x^{\frac{3}{2}} dx$$

Por la tabla sabemos $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ por lo tanto

$$I = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$$

07 Realizar $I = \int (3s+4)^2 dx$

Desarrollando el producto notable, separando la Integral, sacando las constante de las integrales y resolviendo

$$I = \int (9s^2 + 24s + 16) ds = 9 \int s^2 ds + 24 \int s ds + 16 \int ds$$

Por la tabla sabemos $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ por lo tanto

$$I = 9 \frac{s^{2+1}}{(2+1)} + 24 \frac{s^{1+1}}{(1+1)} + 16s + C = 9 \frac{s^3}{3} + 24 \frac{s^2}{2} + 16s + C = 3s^3 + 12s^2 + 16s + C$$

08 Realizar
$$I = \int \frac{x^3 + 5x^2 - 4}{x^2} dx$$

Simplificando, separando la Integral, sacando las constante de las integrales y resolviendo

$$I = \int \left(\frac{x^3}{x^2} + \frac{5x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2} \right) dx = \int (x + 5 - 4x^{-2}) dx = \int x dx + \int 5 dx - \int 4x^{-2} dx$$

Por la tabla sabemos $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ por lo tanto

$$I = \frac{x^{1+1}}{(1+1)} + 5x - 4 \frac{x^{-2+1}}{(-2+1)} + C = \frac{x^2}{2} + 5x - 4 \frac{x^{-1}}{(-1)} + C = \frac{1}{2}x^2 + 5x + 4 \frac{1}{x} + C$$

Autoevaluación

En la siguiente cuadrícula coloque su número de cedula de identidad la cual generara las cantidades que será usada en su actividad evaluativa sugerida (01 y 02) Si algún valor es cero (0) cámbielo por 3 y uno (1) Cambie lo por 2 Resuelva paso a paso las integrales, empleando para ello las reglas principales y las fórmulas de integración (tabla).

Dado:

A	B	C	D	E	F	G	H

01	$I = \int \frac{(\sqrt[A]{x^B} - C)^F}{\sqrt[H+2]{x^G}} dx$	02	$I = \int \left(\frac{B^x}{(B+3)^x} - \frac{E^x}{(F+2)^x} \right) dx$
03	$I = \int \left(\cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) - \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) dx$	04	$I = \int (\sin(x) + \cos(x))^2 dx$
05	$I = \int \left(\frac{1}{\sin^2(x)} - \frac{1}{\cos^2(x)} \right) dx$	06	$I = \int \frac{(3x^3 + 2x^2 + 5)^3}{\sqrt[5]{x^3}} dx$
07	$I = \int (x^2 + 5x + 3)^3 dx$	08	$I = \int \frac{5^x - 3^x}{15^x} dx$

09	$I = \int (\sqrt[3]{x^3} - \sqrt{x})^3 dx$	10	$I = \int \frac{\cos^2(x)}{\sin(2x)} dx$
11	$I = \int \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\sin x} dx$	12	$I = \int \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) - \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right)^2 dx$
13	$I = \int \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)} dx$	14	$I = \int \sqrt{\frac{\csc x - \operatorname{Ctg} x}{\csc x + \operatorname{Ctg} x}} dx$

Integración por cambio de variable simple ó sustitución

El método integración por sustitución o cambio de variable se utiliza para evaluar integrales. El método se basa en realizar de manera adecuada un cambio de variable que permita convertir el integrando en algo sencillo. Este método se basa en la derivada de la función compuesta, realiza lo opuesto a la regla de la cadena

Frecuentemente este método es utilizado pero no todas las integrales permiten el uso de este método, en los casos en los que sí es posible, el resultado puede verificarse derivando y comparando con el integrando original.

Dado una función $F(x) = U(G(x))$ si derivamos esta función se tiene

$$\frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}U(G(x)) \Rightarrow \frac{d}{dx}F(x) = \frac{d}{dx}U \cdot \left(\frac{d}{dx}G(x) \right) \Rightarrow dF(x) = dU \cdot dG(x)$$

Por lo tanto integrando ambos lados

$$\int dF(x) = \int dU(G) \cdot dG(x) \Rightarrow F(x) + C = \int U'(G) \cdot G'(x) dx$$

Veamos un ejemplo

$$F(x) = \operatorname{Sen}(x^2) \Rightarrow F'(x) = (\operatorname{Sen}(x^2))' \cdot (x^2)' \Rightarrow F'(x) = \cos(x^2) \cdot (2x)$$

Ósea

$$\frac{d}{dx}F(x) = 2x \cdot \cos(x^2) \Rightarrow dF(x) = 2x \cdot \cos(x^2) dx$$

$$\Rightarrow \int dF(x) = \int 2x \cdot \cos(x^2) dx \Rightarrow F(x) = \text{Sen}(x^2) + C$$

Para utilizar este método de cambiar de variable, debemos identificar una parte de lo que se va a integrar con una nueva variable p , de modo que se obtenga una integral más sencilla, al derivar esta nueva variable y sustituir los valores en ella presente por la nueva variable, la nueva función a integral la realizamos por el método directo o por tabla.

Pasos para integrar por cambio de variable

Veamos estos pasos mediante ejemplo Hipotético

$$I = \int f'(u) \cdot u' dx$$

Primer paso: realizamos el cambio de variable y se diferencia en los dos términos:

$$u = p \Rightarrow u' dx = dp$$

Segundo paso: Sustituimos estos valores en la integral y simplificamos, la nueva integral la resolvemos:

$$I = \int f'(u) \cdot u' dx = \int f'(p) dp$$

Tercer paso: la nueva integral es más sencilla de realizar, por lo tanto integramos:

$$I = \int f'(p) dp = f(p) + C$$

Cuarto paso: Regresamos el cambio de variable realizado para obtener la solución solicitada:

$$f(t) + C = f(u) + C$$

Ejemplos de Integrales por Sustitución o Cambio de Variable simples.

Resuelve empleando integración por el método de cambio de variable simples.

$$01. \quad I = \int (x^2 + 2)^2 3x^2 dx$$

Solución:

Hacemos el cambio de variable $x^2 + 2 = u$; Diferenciamos para determinar la nueva diferencial tendremos $du = 2x dx$

Sustituimos este valor en la integral y simplificamos el integrando

$$I = \int (x^2 + 2)^2 3x^2 dx = \int u^2 du$$

Resolvemos las integral usando la tabla donde $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$I = \frac{u^{2+1}}{2+1} + C = \frac{1}{3}u^3 + C$$

Regresamos el cambio realizado

$$I = \frac{1}{3}(x^2 + 2)^3 + C$$

$$02. \quad I = \int \sqrt{(x^5 - 5)} x^4 dx = \int (x^5 - 5)^{\frac{1}{2}} x^4 dx$$

Solución:

Hacemos el cambio de variable $x^5 - 5 = p$; Diferenciamos para determinar la nueva diferencial tendremos $dp = 5x^4 dx \Rightarrow x^4 dx = \frac{dp}{5}$

Sustituimos este valor en la integral y simplificamos el integrando

$$I = \int (x^5 - 5)^{\frac{1}{2}} x^4 dx = \int (p)^{\frac{1}{2}} \frac{dp}{5} = \frac{1}{5} \int p^{\frac{1}{2}} dp$$

Resolvemos las integral usando la tabla donde $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$I = \frac{1}{5} \frac{p^{\frac{1}{2}+1}}{\left(\frac{1}{2} + 1\right)} + C = \frac{1}{5} \frac{p^{\frac{3}{2}}}{\left(\frac{3}{2}\right)} + C = \frac{2}{15} p^{\frac{3}{2}} + C$$

Regresamos el cambio realizado

$$I = \frac{2}{15} (x^5 - 5)^{\frac{3}{2}} + C$$

03.
$$I = \int \frac{8x^6}{(x^7 - 6)^4} dx$$

Solución:

Hacemos el cambio de variable $x^7 - 6 = p$; Diferenciamos para determinar la nueva diferencial tendremos $dp = 7x^6 dx \Rightarrow dx = \frac{dp}{7x^6}$

Sustituimos este valor en la integral y simplificamos el integrando

$$I = \int \frac{8x^6}{(x^7 - 6)^4} dx = \int \frac{8x^6}{p^4} \frac{dp}{7x^6} = \frac{8}{7} \int p^{-4} dp$$

Resolvemos las integral usando la tabla donde $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$I = \frac{8}{7} \frac{p^{-4+1}}{(-4+1)} + C = \frac{8}{7} \frac{p^{-3}}{(-3)} + C = -\frac{8}{21p^3} + C$$

Regresamos el cambio realizado

$$I = -\frac{8}{21(x^7 - 6)^3} + C$$

04.
$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x+1}} dx$$

Solución:

Hacemos el cambio de variable

$$\sqrt[3]{2x+1} = p, \text{ despejando la } x \Rightarrow p = \sqrt[3]{2x+1} \Rightarrow 2x+1 = p^3$$

$$\Rightarrow x = \frac{p^3}{2} - \frac{1}{2}$$

Diferenciamos para determinar la nueva diferencial

$$dx = \frac{3}{2} p^2 dp$$

Sustituimos este valor en la integral y simplificamos el integrando

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x+1}} dx = \int \frac{\left(\frac{p^3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2}{p} \frac{3}{2} p^2 dp = \frac{3}{2} \int \left(\frac{p^3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 p dp$$

$$I = \frac{3}{2} \int \left(\left(\frac{p^3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{p^3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) p dp = \frac{3}{2} \int \left(\frac{p^6}{4} - \frac{p^3}{2} + \frac{1}{4}\right) p dp$$

$$I = \frac{3}{2} \left\{ \int \frac{p^7}{4} dp - \int \frac{p^4}{2} dp + \int \frac{p}{4} dp \right\} = \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{4} \int p^7 dp - \frac{1}{2} \int p^4 dp + \frac{1}{4} \int p dp \right\}$$

Resolvemos las integral usando la tabla donde $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$I = \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{4} \frac{p^{7+1}}{(7+1)} - \frac{1}{2} \frac{p^{4+1}}{(4+1)} + \frac{1}{4} \frac{p^{1+1}}{(1+1)} \right\} + C = \frac{3}{2} \left\{ \frac{1}{4} \frac{p^8}{(8)} - \frac{1}{2} \frac{p^5}{(5)} + \frac{1}{4} \frac{p^2}{(2)} \right\} + C$$

Regresamos el cambio realizado, para ello empleamos $p = \sqrt[3]{2x+1}$

$$I = \frac{3}{2} \left\{ \frac{(\sqrt[3]{2x+1})^8}{32} - \frac{(\sqrt[3]{2x+1})^5}{10} + \frac{(\sqrt[3]{2x+1})^2}{8} \right\} + C$$

Finalmente la solución buscada es

$$I = \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x+1}} dx = \frac{3(\sqrt[3]{2x+1})^8}{64} - \frac{3(\sqrt[3]{2x+1})^5}{20} + \frac{3(\sqrt[3]{2x+1})^2}{16} + C$$

Autoevaluación

Resuelva paso a paso indicando la integral, empleando para ello el método de cambio de variable simple o sustitucion y las fórmulas de integración (tabla). Señale los pasos a realizar, explicando con sus palabras las propiedades o formula usada.

01 $I = \int 3x\sqrt[3]{2-x^2} dx$ 02 $I = \int^5 \sqrt[5]{6-\frac{3}{5}y} dy$

03 $I = \int \frac{z}{z^2+3} dz$ 04 $I = \int x^2(3x^3+4)^5 dx$

05 $I = \int \frac{z+3}{\sqrt[4]{z^2+6z-2}} dz$ 06 $I = \int \frac{2x-4}{x^2-8x+3} dz$

$$07 \quad I = \int e^{\text{Sen } x} \text{Cos } x dx$$

$$08 \quad I = \int \text{Cos} (\text{Ln } x) \frac{dx}{x}$$

$$09 \quad I = \int \frac{5x}{(1 + 2x^2)^6} dx$$

$$10 \quad I = \int \frac{\frac{4}{5}x}{\sqrt{16 - 9x^2}} dx$$

$$11 \quad I = \int \frac{\frac{2}{3}x}{4 - 9x^2} dx$$

$$12 \quad I = \int \frac{\sqrt{1 + \sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

$$13 \quad I = \int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1 + \sqrt{x}}} dx$$

$$14 \quad I = \int \frac{\text{Sen } 2x}{\sqrt{1 + \text{Cos}^2 x}} dx$$

$$15 \quad I) \int \left(\text{Tg} (4x) - \text{Ctg} \left(\frac{x}{4} \right) \right) dx$$

$$16 \quad I = \int \frac{\text{Cos } x}{\sqrt{2\text{Sen } x + 1}} dx$$

Integración por partes

Estudiaremos en esta oportunidad el método llamada “integración por parte”. Tengamos presente que las integrales son una parte fundamental del cálculo, y en muchas ocasiones, pueden resultar complicado su solución por los métodos explicado hasta ahora. Para este desarrollo apliquemos la propiedad inversa de la derivada de el producto de dos funciones.

Recordemos que si $f(x) = u(x).v(x)$ (escribamos $u.v$ para más comodidad. Si derivamos esta función

$$f'(x) = (u.v)' = u(v)' + v(u)'$$

Al escribir usamos otra notación por comodidad, para entender:

$$\frac{d(u.v)}{dx} = u \frac{d(v)}{dx} + v \frac{d(u)}{dx} \Rightarrow d(u.v) = ud(v) + vd(u)$$

Despejando el término $ud(v)$ se tiene

$$ud(v) = d(u.v) - vd(u)$$

Luego, integrando ambos lado de la igualdad nos resulta


$$\int u d(v) = \int (d(u.v) - vd(u)) = \int d(u.v) - \int vd(u)$$

Finalmente

$$\int u d(v) = u \cdot v - \int v d(u)$$

Regla mnemotécnica para recordar la formula;

“Un Día Vi Una Vaca Vestida De Uniforme”.

$$\int \underbrace{u}_{\text{un}} \underbrace{d}_{\text{día}} \underbrace{v}_{\text{vi}} = \underbrace{u}_{\text{una}} \underbrace{v}_{\text{vaca}} - \int \underbrace{v}_{\text{vestida}} \underbrace{d}_{\text{de}} \underbrace{u}_{\text{uniforme}} du$$


un día vi una vaca vestida de uniforme

Ejemplos de integración por parte

En todas las ramas del conocimiento tecnológico se presentan constantemente funciones que deben ser integradas usando la integración por partes. A continuación realizaremos varios ejercicios y proponemos otros para ser realizados por el alumno para ayudarán a comprender y a perfeccionar esta importante técnica del cálculo. Recuerde que el fin es llegar a una integral ya tabulada.

Desde un punto de vista didáctico se recomienda escoger la función u de acuerdo con el orden, ayudándose de la regla mnemotécnica "ILATE".

1. Inversa trigonométrica: $\text{Sen}^{-1}(x), \text{Arc Cos}(x) \dots$
2. Logarítmicas: $\text{Ln}(x), \log_a(b) \dots$
3. Algebraicas o polinómicas: Ax^n
4. Trigonómicas: $\text{Sen}(x), \text{Cos}(x) \dots$
5. Exponencial: e^x o a^x siendo $a \in \mathbb{R}$.

Otra recomendación sería cambiar el orden de trigonométrica y exponencial. Si seguimos esta otra recomendación podemos usar la regla

mnemotécnica ALPES, asignándole el puesto de u de acuerdo con el orden de aparición:

- 1 Arcoseno (y cualquier trigonométrica inversa)
- 2 Logarítmica
- 3 Polinómica
- 4 Exponencial
- 5 Seno/coseno (y cualquier trigonométrica)

Se debe escoger adecuadamente u y dv . Una mala elección puede complicar más el integrando. Por ejemplo supongamos que tenemos un producto en el que uno de sus factores es un monomio (por ejemplo x^3). Si consideramos $dv = x^3 dx$. Entonces, al integrarla tendremos que $v = x^4$, con lo que se ha aumentado el grado del exponente y esto suele suponer un paso atrás. Normalmente, se escogen los monomios como u para reducir su exponente al derivarlos. Cuando el exponente es 0, el monomio es igual a 1 y el integrando es más fácil. Algo parecido ocurre con las fracciones (como $\frac{1}{x}$). Si consideramos $dv = \frac{1}{x} dx$, tendremos $v = \ln|x|$ y, probablemente, obtendremos una integral más difícil.

Como norma general, llamaremos u a las potencias y logaritmos y dv a las exponenciales, fracciones y funciones trigonométricas.

No se debe cambiar la elección escogida de u . A veces tenemos que aplicar el método más de una vez para calcular una misma integral. En estas integrales, al aplicar el método por n -ésima vez, tenemos que llamar u al resultado du del paso anterior y dv al resultado v . Si no lo hacemos así, como escoger una opción u otra supone integrar o derivar, estaremos deshaciendo el paso anterior y no avanzaremos.

Se presentan Integrales que denominamos cíclicas. Esto ocurre, tras aplicar dos veces integración por partes, la integral aparece nuevamente

tenemos que despejar la propia integral de la igualdad obtenida para poder calcularla

Los siguientes ejercicios buscan desarrollar destrezas, que permita comprender las aplicaciones de las integrales en procesos más complejas presentes en la resolución de problemas prácticos..

Realizar las Integrales por parte de las siguientes funciones:

$$01.- \quad I = \int x \cos(x) dx$$

Solución

Integraremos esta función "por partes". Recordemos que este método es aplicar la fórmula:

$$I = \int u dv = uv - \int u dv$$

Debemos escoger que parte de la función será $u(x)$ y cual será dv que permita obtener una integral mas sencilla de resolver. En nuestro caso los tomaremos de la siguiente manera

$$\begin{aligned} u = x & \xrightarrow{\text{diferenciando}} du = dx \\ dv = \cos(x) dx & \xrightarrow{\text{Integrando}} \int dv = \int \cos(x) dx \Rightarrow v = \sin(x) \end{aligned}$$

Aplicando la formula sustituyendo estos valores

$$\begin{aligned} I &= \int u dv = uv - \int u dv \\ I &= \int x \cos(x) dx = x \sin(x) - \int \sin(x) dx \end{aligned}$$

Esta Integral que resulta está en la tabla, $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$

$$I = x \sin(x) - (-\cos(x)) + C$$

Finalmente:

$$I = x \sin(x) + \cos(x) + C$$

$$02.- \quad I = \int \frac{\ln x}{x^2} dx$$

Solución

Integraremos esta función "por partes". En este caso los tomamos

$$u = \ln x \quad \text{diferenciando} \quad du = \frac{dx}{x} \\ \Rightarrow \\ dv = \frac{dx}{x^2} \quad \text{Integrando} \quad \int dv = \int x^{-2} dx \Rightarrow v = -\frac{1}{x}$$

Aplicando la formula sustituyendo estos valores

$$I = \int u dv = uv - \int u dv \\ I = \int \frac{\ln x}{x^2} dx = Lx(x) \left(-\frac{1}{x}\right) - \int \left(-\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x} = -\frac{1}{x} Lx(x) + \int x^{-2} dx$$

Esta Integra que resulta está en la tabla, $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

$$I = -\frac{1}{x} Lx(x) + \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right) + C = -\frac{1}{x} Lx(x) + \left(\frac{x^{-1}}{-1}\right) + C$$

Finalmente:

$$I = -\frac{1}{x} Lx(x) - \frac{1}{x} + C = -\frac{1}{x} (Lx(x)' + 1) + C$$

$$03.- \quad I = \int (x^3 + 5x^2 - 2)e^{2x} dx$$

Solución

Integraremos esta función "por partes". En este caso los tomamos

$$u = x^3 + 5x^2 - 2 \quad \text{diferenciando} \quad du = (3x^2 + 10x)dx \\ \Rightarrow \\ dv = e^{2x} dx \quad \text{Integrando} \quad \int dv = \int e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$$

Aplicando la formula sustituyendo estos valores

$$I = \int u dv = uv - \int u dv$$

$$I = (x^3 + 5x^2 - 2) \frac{e^{2x}}{2} - \int \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) (3x^2 + 10x) dx$$

$$I = (x^3 + 5x^2 - 2) \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int (3x^2 + 10x) e^{2x} dx = (x^3 + 5x^2 - 2) \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} I_2$$

Donde

$$I_2 = \int (3x^2 + 10x) e^{2x} dx$$

Integraremos esta función "por partes" nuevamente. En este caso los tomamos

$$u = 3x^2 + 10x \quad \begin{array}{l} \text{diferenciando} \\ \Rightarrow \end{array} \quad du = (6x + 10) dx$$

$$dv = e^{2x} dx \quad \begin{array}{l} \text{Integrando} \\ \Rightarrow \end{array} \quad \int dv = \int e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$$

Aplicando la formula sustituyendo estos valores

$$I = \int u dv = uv - \int u dv$$

$$I_2 = (3x^2 + 10x) \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} (6x + 10) dx$$

$$I_2 = (3x^2 + 10x) \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{2x} (6x + 10) dx$$

$$I_2 = (3x^2 + 10x) \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} I_3$$

Donde

$$I_3 = \int (6x + 10) e^{2x} dx$$

Integraremos esta función "por partes" nuevamente. En este caso los tomamos

$$u = 6x + 10 \quad \begin{array}{l} \text{diferenciando} \\ \Rightarrow \end{array} \quad du = 6 dx$$

$$dv = e^{2x} dx \quad \begin{array}{l} \text{Integrando} \\ \Rightarrow \end{array} \quad \int dv = \int e^{2x} dx \Rightarrow v = \frac{e^{2x}}{2}$$

Aplicando la formula sustituyendo estos valores

$$I = \int u dv = uv - \int u dv$$

$$I_3 = (6x + 10) \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} (6) dx = (6x + 10) \frac{e^{2x}}{2} - 3 \int e^{2x} dx$$

$$I_3 = (6x + 10) \frac{e^{2x}}{2} - 3 \frac{e^{2x}}{2} + C$$

Sustituyendo estos valores en la formula inicial se tiene:

$$I = (x^3 + 5x^2 - 2) \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \left((3x^2 + 10x) \frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{2} \left((6x + 10) \frac{e^{2x}}{2} - 3 \frac{e^{2x}}{2} \right) \right) + C$$

Simplificando

$$I = (x^3 + 5x^2 - 2) \frac{e^{2x}}{2} - (3x^2 + 10x) \frac{e^{2x}}{4} + \frac{1}{4} \left((6x + 10) \frac{e^{2x}}{2} - 3 \frac{e^{2x}}{2} \right) + C$$

$$I = (x^3 + 5x^2 - 2) \frac{e^{2x}}{2} - (3x^2 + 10x) \frac{e^{2x}}{4} + (6x + 10) \frac{e^{2x}}{8} - \frac{3e^{2x}}{8} + C$$

$$I = [4x^3 + 20x^2 - 8 - 6x^2 - 20x + 6x + 10 - 3] \frac{e^{2x}}{8} + C$$

Finalmente:

$$I = [4x^3 + 14x^2 - 14x - 1] \frac{e^{2x}}{8} + C$$

04.- $I = \int e^{-x} \cos(x) dx$

Solución

En este ejemplo no importa cuáles son los factores u y dv , ya que al integrar y al derivar e^{-x} obtenemos $-e^{-x}$ y al integrar y al derivar $\cos(x)$ obtenemos $-\sin(x)$. Se trata de una integral cíclica en la que tendremos que aplicar dos veces integración por partes (con la misma elección para no volver al paso anterior) y tendremos que despejar la integral de la expresión obtenida. Integraremos esta función "por partes". En este caso los tomamos

$$u = e^{-x} \xrightarrow{\text{diferenciando}} du = (-e^{-x})dx$$

$$dv = \cos(x) dx \xrightarrow{\text{Integrando}} \int dv = \int \cos(x) dx \Rightarrow v = \sin(x)$$

Aplicando la formula sustituyendo estos valores

$$I = \int u dv = uv - \int u dv$$

$$I = e^{-x}\sin(x) - \int \sin(x)(-e^{-x})dx = e^{-x}\sin(x) + \int \sin(x)e^{-x}dx$$

$$I = e^{-x}\sin(x) + I_2$$

Donde

$$I_2 = \int \sin(x)e^{-x} dx$$

Integraremos esta función "por partes" nuevamente. En este caso los tomamos

$$u = e^{-x} \xrightarrow{\text{diferenciando}} du = (-e^{-x})dx$$

$$dv = \sin(x)dx \xrightarrow{\text{Integrando}} \int dv = \int \sin(x) dx \Rightarrow v = -\cos(x)$$

Aplicando la formula sustituyendo estos valores

$$I = \int u dv = uv - \int u dv$$

$$I_2 = e^{-x}(-\cos(x)) - \int (-\cos(x))(-e^{-x})dx = -e^{-x}\cos(x) - \int \cos(x) dx$$

$$I_2 = -e^{-x}\cos(x) - I$$

Sustituyendo estos valores en la formula inicial y simplificando se tiene:

$$I = e^{-x}\sin(x) + (-e^{-x}\cos(x) - I) = e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x) - I$$

$$I + I = e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x) + C \Rightarrow 2I = e^{-x}[\sin(x) - \cos(x)] + C$$

Finalmente:

$$I = \frac{e^{-x}}{2} [\sin(x) - \cos(x)] + C$$

Autoevaluación

Resuelva las integrales siguientes, empleando para ello el método de Integral por Parte. Señale los pasos a realizar, explicando con sus palabras las propiedades o fórmula usada.

01.- $I = \int \text{Arc Sen}(x) dx$

02.- $I = \int x^n \text{Ln}(x) dx$

03.- $I = \int x^3 3^x dx$

04.- $I = \int \text{Sec}^3 x dx$

05.- $I = \int e^{2x} \cdot \text{Sen}(3x) dx$

06.- $I = \int (x^2 - 3x - 4)e^{2x} dx$

07.- $I = \int x^2 \text{Arc Tg} \sqrt{x} dx$

08.- $I = \int w \text{Sec}^2\left(\frac{w}{2}\right) dw$

09.- $I = \int (2^x + x^2)^2 dx$

10.- $I = \int e^{-\frac{x}{4}} \text{Sen}(3x) dx$

Integrales por Sustituciones Trigonómicas

El método de integración por sustitución trigonométrica o cambio de variables trigonométrica, se basa en realizar de manera adecuada un cambio de variable por una expresión trigonométrica, que permita convertir el integrando en algo sencillo. Este método es aplicado cuando en el integrando se presentan expresiones de la forma:

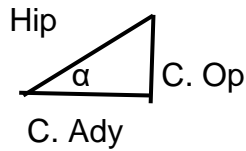
$$\text{a) } \frac{a^2 - bx^2}{\sqrt[n]{a^2 - bx^2}} \quad \text{b) } \frac{ax^2 + b^2}{\sqrt[n]{ax^2 + b^2}} \quad \text{c) } \frac{ax^2 - b^2}{\sqrt[n]{ax^2 - b^2}}$$

Generalmente estas expresiones están elevadas a una potencia racional que puede ser positiva o negativa (la expresión es un racional)

Si se presenta el tipo (a)

Cuando la integral a calcular posee la expresión:

$$a^2 - bx^2 \quad \text{ó} \quad \sqrt[n]{a^2 - bx^2}$$



$$\text{Hip} = a; \text{C. Op.} = \sqrt{bx}; \text{angulo} = \alpha$$

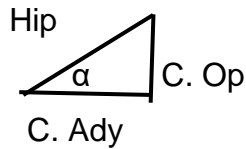
Por teorema de Pitágoras

$$\text{C. ady} = \sqrt{(\text{Hip})^2 - (\text{C. Op.})^2} = \sqrt{a^2 - bx^2}$$

Construimos un triángulo rectángulo, que en la Hipotenusa se asigne el valor “a”; al cateto opuesto \sqrt{bx} y al Angulo cualquier letra griega ($\alpha, \beta, \gamma, \rho, \theta \dots$), que será la nueva variable con la que se trabajara. Para determinar el valor del cateto que nos falta utilizamos el teorema de Pitágoras $\sqrt{a^2 - bx^2}$. En este caso el cambio sugerido es $x = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b}} \text{sen } \alpha$. Por ejemplo.

$$\text{Hallar } I = \int \sqrt{4 - 9x^2} dx$$

Solución:



$$\text{Hip} = 2; \text{C. Op.} = 3x; \text{angulo} = \alpha$$

Por teorema de Pitágoras

$$\text{C. ady} = \sqrt{(\text{Hip})^2 - (\text{C. Op.})^2} = \sqrt{2^2 - (3x)^2}$$

$$\text{C. ady} = \sqrt{4 - 9x^2}$$

El cambio trigonométrico recomendado es:

$$x = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} \text{Sen } \alpha = \frac{2}{3} \text{Sen } \alpha \quad \text{Diferenciando} \quad dx = \frac{2}{3} \text{Cos } \alpha \, d\alpha$$

Luego la integra se transforma en:

$$I = \int \sqrt{4 - 9\left(\frac{2}{3} \text{Sen } \alpha\right)^2} \frac{2}{3} \text{Cos } \alpha \, d\alpha = \frac{2}{3} \int \sqrt{4 - 9\frac{4}{9} \text{Sen}^2(\alpha)} \text{Cos } \alpha \, d\alpha$$

$$I = \frac{2}{3} \int \sqrt{4 - 4\text{Sen}^2(\alpha)} \text{Cos } (\alpha) \, d\alpha = \frac{2}{3} \int \sqrt{4(1 - \text{Sen}^2(\alpha))} \text{Cos } (\alpha) \, d\alpha$$

$$I = \frac{2}{3} \int \sqrt{4} \sqrt{\text{Cos}^2(\alpha)} \text{Cos } (\alpha) \, d\alpha = \frac{4}{3} \int \text{Cos}^2(\alpha) \, d\alpha$$

Por identidad trigonométrica de potencia se tiene

$$\text{Cos}^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\text{Cos}(2\alpha)}{2}$$

$$I = \frac{4}{3} \int \left(\frac{1}{2} + \frac{\text{Cos}(2\alpha)}{2} \right) d\alpha = \frac{4}{3} \left[\frac{1}{2} \int d\alpha + \frac{1}{2} \int \text{Cos}(2\alpha) d\alpha \right]$$

Donde por tabla de integral: $\int du = u + C$ y $\int \text{Cos}(2u) du = \frac{1}{2} \text{Sen}(2u) + C$

$$I = \frac{4}{3} \left[\frac{1}{2} \alpha + \frac{1}{2} \frac{1}{2} \text{Sen}(2u) \right] + C = \frac{2}{3} \alpha + \frac{1}{3} \text{Sen}(2u) + C$$

$$I = \frac{2}{3} \alpha + \frac{1}{3} 2 \text{Sen}(u) \text{Cos}(u) + C = \frac{2}{3} \alpha + \frac{2}{3} \text{Sen}(u) \text{Cos}(u) + C$$

Por el cambio de variable realizado, tenemos:

$$x = \frac{2}{3} \text{Sen } \alpha \Rightarrow \text{Sen } \alpha = \frac{3x}{2}$$

Luego:

$$\alpha = \text{sen}^{-1} \left(\frac{3x}{2} \right) \text{ y } \text{Cos } \alpha = \frac{\text{C. Ady}}{\text{Hip}} = \frac{\sqrt{4 - 9x^2}}{2}$$

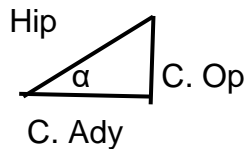
Finalmente:

$$I = \frac{2}{3} \text{sen}^{-1} \left(\frac{3x}{2} \right) + \frac{2}{3} \left(\frac{3x}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{4 - 9x^2}}{2} \right) + C = \frac{2}{3} \text{sen}^{-1} \left(\frac{3x}{2} \right) + \frac{x\sqrt{4 - 9x^2}}{2} + C$$

Si se presenta el tipo (b)

Cuando la integral a calcular posee la expresión:

$$ax^2 + b^2 \text{ ó } \sqrt{ax^2 + b^2}$$



$$\text{C. Op.} = \sqrt{ax}; \text{ C. Ady} = b; \text{ angulo} = \alpha$$

Por teorema de Pitágoras

$$\text{Hip} = \sqrt{(\text{C. Op.})^2 + (\text{C. ady})^2} = \sqrt{ax^2 + b^2}$$

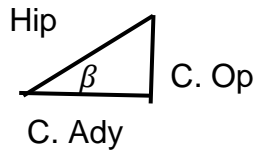
Construimos un triángulo rectángulo, donde el cateto opuesto \sqrt{ax} , el cateto adyacente se asigne el valor "b"; al y al Angulo cualquier letra griega ($\alpha, \beta, \gamma, \rho, \theta \dots$), que será la nueva variable con la que se trabajara. Para determinar el valor de la Hipotenusa se determina usando el teorema de Pitágoras $\sqrt{ax^2 + b^2}$. En este caso el cambio sugerido es $x = \frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{a}} \text{Tan } \alpha$.

Por ejemplo.

Hallar

$$I = \int \frac{1}{9 + 4x^2} dx$$

Solución:



$$C. Op. = 3; C. Ady. = 2x; \text{angulo} = \beta$$

Por teorema de Pitágoras

$$Hip = \sqrt{(C. Op.)^2 + (C. Ady.)^2} = \sqrt{3^2 + (2x)^2}$$

$$Hip = \sqrt{9 + 4x^2}$$

El cambio trigonométrico recomendado es:

$$x = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} \tan(\beta) = \frac{3}{2} \tan(\beta) \quad \text{Diferenciando} \quad dx = \frac{3}{2} \sec^2(\beta) d\beta$$

Luego la integral se transforma en:

$$I = \int \frac{1}{9 + 4 \left(\frac{3}{2} \tan(\beta) \right)^2} \frac{3}{2} \sec^2(\beta) d\beta = \frac{3}{2} \int \frac{1}{9 + 4 \left(\frac{9}{4} \tan^2(\beta) \right)} \sec^2(\beta) d\beta$$

$$I = \frac{3}{2} \int \frac{1}{9 + 9 \tan^2(\beta)} \sec^2(\beta) d\beta = \frac{3}{2} \int \frac{1}{9(1 + \tan^2(\beta))} \sec^2(\beta) d\beta$$

Por identidad trigonométrica se tiene: $1 + \tan^2(\beta) = \sec^2(\beta)$

$$I = \frac{1}{6} \int \frac{1}{\sec^2(\beta)} \sec^2(\beta) d\beta = \frac{1}{6} \int d\beta$$

Donde por tabla de integral: $\int du = u + C$

$$I = \frac{1}{6} \beta + C$$

Por el cambio de variable realizado, tenemos:

$$x = \frac{3}{2} \tan(\beta) \Rightarrow \tan(\beta) = \frac{2x}{3} \quad \text{Luego: } \beta = \tan^{-1} \left(\frac{2x}{3} \right)$$

Finalmente:

$$I = \frac{1}{6} \tan^{-1} \left(\frac{2x}{3} \right) + C$$

Si se presenta el tipo (c)

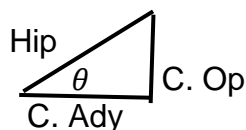
Cuando la integral a calcular posee la expresión:

$$ax^2 - b^2 \quad \text{ó} \quad \sqrt{ax^2 - b^2}$$

$$Hip = \sqrt{ax}; C. Ady. = b; \text{angulo} = \theta$$

Por teorema de Pitágoras

$$C. Op. = \sqrt{(Hip)^2 - (C. Ady.)^2} = \sqrt{ax^2 - b^2}$$



Construimos un triángulo rectángulo, que en la Hipotenusa se asigne

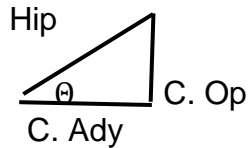
el valor \sqrt{ax} ; al cateto Adyacente "b" y al Angulo cualquier letra griega (α , β ,

$\gamma, \rho, \theta \dots$), que será la nueva variable con la que se trabajara. Para determinar el valor del cateto que nos falta utilizamos el teorema de Pitágoras $\sqrt{ax^2 - b^2}$. En este caso el cambio sugerido es $x = \frac{\sqrt{b^2}}{\sqrt{a}} \sec \theta$. Por ejemplo.

Hallar

$$I = \int \frac{\sqrt{16x^2 - 9}}{x} dx$$

Solución:



$Hip = 4x$; $C. Ady. = 3$; $angulo = \theta$
 Por teorema de Pitágoras

$$C. Op = \sqrt{(Hip)^2 - (C. Ady.)^2} = \sqrt{(4x)^2 - (3)^2}$$

$$C. Op = \sqrt{16x^2 - 9}$$

El cambio trigonométrico recomendado es:

$$x = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{16}} \sec \theta = \frac{3}{4} \sec \theta \quad \text{Diferenciando} \quad \rightarrow \quad dx = \frac{3}{4} \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$$

Luego la integra se transforma en:

$$I = \int \frac{\sqrt{16 \left(\frac{3}{4} \sec \theta\right)^2 - 9}}{\frac{3}{4} \sec \theta} \frac{3}{4} \sec(\theta) \tan(\theta) d\theta$$

$$I = \int \sqrt{16 \frac{9}{16} \sec^2 \theta - 9} \tan(\theta) d\theta = \int \sqrt{(9 \sec^2 \theta - 9)} \tan(\theta) d\theta$$

$$I = \int \sqrt{9} \sqrt{(\sec^2 \theta - 1)} \tan(\theta) d\theta$$

Por identidad trigonométrica se tiene

$$(\sec^2 \theta - 1) = \tan^2(\theta)$$

$$I = 3 \int \sqrt{(\tan^2 \theta)} \tan(\theta) d\theta = 3 \int \tan^2 \theta d\theta = 3 \int \frac{\text{Sen}^2 \theta}{\text{Cos}^2 \theta} d\theta$$

Por identidad trigonométrica se tiene

$$\text{Sen}^2(\theta) = 1 - \text{Cos}^2(\theta)$$

$$I == 3 \int \frac{(1 - \cos^2 \theta)}{\cos^2 \theta} d\theta = 3 \left[\int \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta - \int \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} d\theta \right]$$

$$I == 3 \left[\int \sec^2 \theta d\theta - \int d\theta \right]$$

Donde por tabla de integral: $\int du = u + C$ y $\int \sec^2(u) du = \tan(u) + C$

$$I = 3[\tan(\theta) - \theta] + C$$

Por el cambio de variable realizado, tenemos:

$$x = \frac{3}{4} \sec \theta \Rightarrow \sec \theta = \frac{4x}{3} \Rightarrow \alpha = \sec^{-1} \left(\frac{3x}{2} \right)$$

Por función trigonométrica se tiene

$$\tan(\theta) = \frac{C. Op}{C. Adj} = \frac{\sqrt{16x^2 - 9}}{3}$$

Luego:

$$I = 3 \left[\frac{\sqrt{16x^2 - 9}}{3} - \sec^{-1} \left(\frac{3x}{2} \right) \right] + C$$

Finalmente:

$$I = \sqrt{16x^2 - 9} - 3\sec^{-1} \left(\frac{3x}{2} \right) + C$$

Funciones e identidades Trigonómicas.

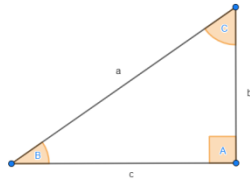
Para la resolución de Integrales por el método de Sustitución trigonométrica, se les aconseja repasar las funciones trigonométricas y sus identidades.

A continuación suministramos a título informativo las principales funciones trigonométricas y algunas identidades importantes a recordar. Recuerde que esto no es parte de este curso, pero es importante conocerlas.

Razones trigonométricas

Observemos el siguiente Las razones o funciones

triángulo rectángulo



trigonométricas para el ángulo B las definimos de la siguiente manera:

Senos B (Sen B)

$$\text{Sen } B = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

<p>Coseno B (Cos B):</p> $\text{Cos } B = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Hipotenusa}} = \frac{c}{a}$	<p>Tangente B (Tan B) ó (Tg B):</p> $\text{Tan } B = \frac{\text{Sen } B}{\text{Cos } B} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{b}{c}$
<p>Cotangente B (CTg B) (Cot B)</p> $\text{CTg } B = \frac{1}{\text{Tan } B} = \frac{\text{Cos } B}{\text{Sen } B} = \frac{\text{Cateto adyacente}}{\text{Cateto opuesto}} = \frac{c}{b}$	
<p>Secante B (Sec B)</p> $\text{Sec } B = \frac{1}{\text{Cos } B} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente}} = \frac{a}{c}$	
<p>Cosecante B (Csc B)</p> $\text{Csc } B = \frac{1}{\text{Sen } B} = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto}} = \frac{a}{b}$	

En las identidades α y β para denotar a los ángulos..

Identidad principal o pitagórica

Una identidad trigonométrica es una relación que involucra funciones trigonométricas y que se cumple para todos los ángulos X del dominio. Estas identidades son muy útiles al momento de resolver integrales. Dado que las funciones trigonométricas se definen partiendo de un triángulo rectángulo, entonces se cumplen las siguientes identidades:

$$\text{Sen}^2\alpha + \text{Cos}^2\alpha = 1 \quad 1 + \text{Tan}^2\alpha = \text{Sec}^2\alpha \quad 1 + \text{CTg}^2\alpha = \text{Csc}^2\alpha$$

Identidades de la suma y diferencia de ángulos

$$\text{Sen}(\alpha + \beta) = \text{Sen}(\alpha)\text{Cos}(\beta) + \text{Cos}(\alpha)\text{Sen}(\beta)$$

$$\text{Sen}(\alpha - \beta) = \text{Sen}(\alpha)\text{Cos}(\beta) - \text{Cos}(\alpha)\text{Sen}(\beta)$$

$$\text{Cos}(\alpha + \beta) = \text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(\beta) - \text{Sen}(\alpha)\text{Sen}(\beta)$$

$$\text{Cos}(\alpha - \beta) = \text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(\beta) + \text{Sen}(\alpha)\text{Sen}(\beta)$$

$$\text{Tan}(\alpha + \beta) = \frac{\text{Tan}(\alpha) + \text{Tan}(\beta)}{1 - \text{Tan}(\alpha)\text{Tan}(\beta)}$$

$$\text{Tan}(\alpha - \beta) = \frac{\text{Tan}(\alpha) - \text{Tan}(\beta)}{1 + \text{Tan}(\alpha)\text{Tan}(\beta)}$$

Identidades del ángulo doble y del ángulo medio

Las identidades del ángulo doble las podemos obtener a partir de las identidades de suma de ángulo (donde $\alpha = \beta$). Por otro lado, las identidades del ángulo medio las obtenemos a partir de la identidad del ángulo doble del $\text{Cos}(x)$.

Ángulo Doble

$$\text{Sen}(2\alpha) = 2\text{Sen}(\alpha)\text{Cos}(\alpha)$$

$$\text{Cos}(2\beta) = \text{Cos}^2(\beta) - \text{Sen}^2(\beta)$$

$$\text{Tan}(2\alpha) = \frac{2\text{Tan}(\alpha)}{1 - \text{Tan}^2(\alpha)}$$

Ángulo mitad

$$\text{Sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{Cos}(\alpha)}{2}}$$

$$\text{Cos}\left(\frac{\beta}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \text{Cos}(\beta)}{2}}$$

$$\text{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \text{Csc}(\alpha) - \text{CTg}(\alpha)$$

Además la tangente del ángulo mitad también satisface las siguientes identidades:

$$\text{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \text{Cos}(\alpha)}{1 + \text{Cos}(\alpha)}} \quad \text{Y} \quad \text{Tan}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{Sen}(\alpha)}{1 + \text{Cos}(\alpha)}$$

Identidades para la reducción de potencias

$$\text{Sen}^2(\beta) = \frac{1 - \text{Cos}(2\beta)}{2} \quad \text{Cos}^2(\beta) = \frac{1 + \text{Cos}(2\beta)}{2}$$

Transformación de suma a producto

$$\text{Sen}(\alpha) + \text{Sen}(\beta) = 2\text{Sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\text{Sen}(\alpha) - \text{Sen}(\beta) = 2\text{Cos}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\text{Sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\text{Cos}(\alpha) + \text{Cos}(\beta) = 2\text{Cos}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\text{Cos}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\text{Cos}(\alpha) - \text{Cos}(\beta) = -2\text{Sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\text{Sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\text{Tan}(\alpha) - \text{Tan}(\beta) = \frac{\text{Sen}(\alpha - \beta)}{\text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(\beta)}$$

Transformación de producto a suma

$$\text{Sen}(\alpha)\text{Sen}(\beta) = \frac{\text{Sen}(\alpha - \beta) - \text{Sen}(\alpha + \beta)}{2}$$

$$\text{Cos}(\alpha)\text{Cos}(\beta) = \frac{\text{Cos}(\alpha + \beta) + \text{Cos}(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\text{Sen}(\alpha)\text{Cos}(\beta) = \frac{\text{Sen}(\alpha + \beta) + \text{Sen}(\alpha - \beta)}{2}$$

$$\text{Cos}(\alpha)\text{Sen}(\beta) = \frac{\text{Sen}(\alpha + \beta) - \text{Sen}(\alpha - \beta)}{2}$$

Ejemplos por Sustituciones Trigonómicas

Resuelva paso a paso por el método de sustitución trigonométrica, señale la sustitución trigonométrica usada, las operaciones, las

simplificaciones que realice y las fórmulas de integración (tabla). Señale los pasos a realizar, explicando con sus palabras las propiedades o fórmula usada.

Solución.

$$01.- \quad I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} dx$$

Completando el cuadrado perfecto de la cantidad subradical del denominador y simplificamos, la integral nos resulta

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4 + 9}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x^2 - 4x + 4) + 9}} dx$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(x - 2)^2 + 3^2}} dx$$

El cambio trigonométrico recomendado es:

$$x - 2 = 3 \operatorname{Tg} z \Rightarrow \text{Diferenciando} \Rightarrow dx = 3 \operatorname{Sec}^2 z dz$$

Luego la integral se transforma en:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(3 \operatorname{Tg} z)^2 - 3^2}} 3 \operatorname{Sec}^2 z dz = \int \frac{3 \operatorname{Sec}^2 z}{\sqrt{3^2 \operatorname{Tg}^2 z + 3^2}} dz = \int \frac{3 \operatorname{Sec}^2 z}{\sqrt{3^2 (\operatorname{Tg}^2 z + 1)}} dz$$

Por identidad trigonométrica se tiene: $\operatorname{Tg}^2 \alpha + 1 = \operatorname{Sec}^2 \alpha$

$$I = \int \frac{3 \operatorname{Sec}^2 z}{\sqrt{3^2} \sqrt{\operatorname{Sec}^2 z}} dz = \int \frac{3 \operatorname{Sec}^2 z}{3 \operatorname{Sec} z} dz = \int \operatorname{Sec} z dz$$

Donde por tabla de integral: $\int \operatorname{Sec} u du = \operatorname{Ln}|\operatorname{Sec} u + \operatorname{Tg} u| + C$

$$I = \operatorname{Ln}|\operatorname{Sec} z + \operatorname{Tg} z| + C$$

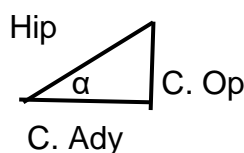
Del cambio trigonométrico construimos el triángulo

$$x - 2 = 3 \operatorname{Tg} z \Rightarrow \operatorname{Tg} z = \frac{x - 2}{3} = \frac{\text{c. opuesto}}{\text{C. Adyacente}}$$

Por teorema de Pitágoras

$$\text{Hipotenusa} = \sqrt{(x - 2)^2 + (3)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 - 4x + 13}$$



$$\sec z = \frac{\text{Hipotenusa}}{\text{c. Adyacente}} = \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}{3}$$

Por lo tanto:

$$I = \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}{3} + \frac{x - 2}{3} \right| + C = \text{Ln} \left| \frac{\sqrt{x^2 - 4x + 13} + (x - 2)}{3} \right| + C$$

02.-
$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(4x - x^2)^3}} dx$$

Completando el cuadrado perfecto de la cantidad subradical del denominador y simplificamos, la integral nos resulta

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(4 - 4 + 4x - x^2)^3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(4 - (x^2 - 4x + 4))^3}} dx$$

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(2^2 - (x - 2))^3}} dx$$

El cambio trigonométrico recomendado es:

$$x - 2 = 2 \text{ Sen } z \Rightarrow \text{Diferenciando} \Rightarrow dx = 2 \text{ Cos } z dz$$

Por lo tanto la integra se transforma en:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{(2^2 - (2 \text{ sen } z)^2)^3}} 2 \text{ Cos } z dz = \int \frac{2 \text{ Cos } z}{\sqrt{(2^2 - 2^2 \text{ Sen}^2 z)^3}} dz$$

$$I = \int \frac{2 \text{ Cos } z}{\sqrt{(2^2(1 - \text{ Sen}^2 z))^3}} dz$$

Por identidad trigonométrica se tiene: $1 - \text{Sen}^2 \alpha = \text{Cos}^2 \alpha$

$$I = \int \frac{2 \text{ Cos } z}{(\sqrt{2^2} \sqrt{\text{Cos}^2 z})^3} dz = \int \frac{2 \text{ Cos } z}{2^3 \text{Cos}^3 z} dz = \int \frac{1}{4 \text{Cos}^2 z} dz$$

$$I = \frac{1}{4} \int \sec^2 z dz =$$

Donde por tabla de integral: $\int \sec^2 u du = \text{Tg } u + C$

$$I = \frac{1}{4} Tg z + C$$

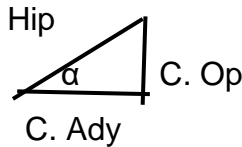
Del cambio trigonométrico construimos el triángulo

$$x - 2 = 2 \operatorname{Sen} z \Rightarrow \operatorname{Sen} z = \frac{x - 2}{2} = \frac{\text{c. opuesto}}{\text{Hipotenuza}}$$

Por teorema de Pitágoras}

$$C. \text{ Adyasente} = \sqrt{(2)^2 - (x - 2)^2} = \sqrt{4x - x^2}$$

$$Tg z = \frac{C \text{ Opuesto}}{c. \text{ Adyasente}} = \frac{x - 2}{\sqrt{4x - x^2}}$$



Por lo tanto

$$I = \frac{1}{4} \left(\frac{x - 2}{\sqrt{4x - x^2}} \right) + C$$

03.-
$$I = \int \frac{\operatorname{Sen} \theta}{\sqrt{\operatorname{Sen}^2 \theta + 4 \operatorname{Sen} \theta + 2}} d\theta$$

Completando el cuadrado perfecto de la cantidad subradical del denominador y simplificamos, la integral nos resulta

$$I = \int \frac{\operatorname{Sen} \theta}{\sqrt{(\operatorname{Sen}^2 \theta + 4 \operatorname{Sen} \theta + 2 + 2 - 2)}} d\theta = \int \frac{\operatorname{Sen} \theta}{\sqrt{((\operatorname{Sen}^2 \theta + 4 \operatorname{Sen} \theta + 4) - 2)}} d\theta$$

$$I = \int \frac{\operatorname{Sen} \theta}{\sqrt{((\operatorname{Sen} \theta + 2)^2 - (2))}} d\theta$$

Por cambio de variables simple se tiene:

$$\operatorname{Sen} \theta + 2 = p \Rightarrow \operatorname{Sen} \theta = p - 2 \Rightarrow \text{Diferenciando}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Cos} \theta d\theta = dp$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \operatorname{Sen}^2 \theta} d\theta = dp \Rightarrow \sqrt{1 - (p - 2)^2} d\theta = dp$$

$$\Rightarrow d\theta = \frac{dp}{\sqrt{1 - (p - 2)^2}}$$

La integral se transforma en:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{(p-2)}{\sqrt{(p^2-2)}\sqrt{1-(p-2)^2}} dp = \int \frac{(p-2)}{\sqrt{(p^2-2)(1-(p^2-4p+4))}} dp \\
&= \int \frac{(p-2)}{\sqrt{(p^2-2)(1-p^2+4p-4)}} dp = \int \frac{(p-2)}{\sqrt{(p^2-2)(-p^2+4p-3)}} dp \\
I &= \int \frac{(p-2)}{\sqrt{-p^4+4p^3-3p^2+2p^2-8p+6}} dp \\
I &= \int \frac{(p-2)}{\sqrt{-p^4+4p^3-p^2-8p+6}} dp =
\end{aligned}$$

El cambio trigonométrico recomendado es:

$$\begin{aligned}
\text{Sen } \theta + 2 &= \sqrt{2} \text{Sec } z \quad \Rightarrow \text{Diferenciando } \text{Sen } \theta = \sqrt{2} \text{Sec } z - 2 \\
&\Rightarrow \text{Cos } \theta d\theta = \sqrt{2} \text{Sec } z \text{Tg } z dz \\
&\Rightarrow \sqrt{1 - \text{Sen}^2 \theta} d\theta = \sqrt{2} \text{Sec } z \text{Tg } z dz \\
&\Rightarrow \sqrt{1 - (\sqrt{2} \text{Sec } z - 2)^2} d\theta = \sqrt{2} \text{Sec } z \text{Tg } z dz \\
&\Rightarrow \sqrt{1 - (2\text{Sec}^2 z - 4\sqrt{2} \text{Sec } z + 4)} d\theta = \sqrt{2} \text{Sec } z \text{Tg } z dz \\
&\Rightarrow \sqrt{1 - 2\text{Sec}^2 z + 4\sqrt{2} \text{Sec } z - 4} d\theta = \sqrt{2} \text{Sec } z \text{Tg } z dz
\end{aligned}$$

Por lo tanto la integra se transforma en:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{(\sqrt{2} \text{Sec } z - 2)}{\sqrt{((\sqrt{2} \text{Sec } z)^2 - 2)}} 2 \text{Cos } z dz = \int \frac{2 \text{Cos } z}{\sqrt{(2^2 - 2^2 \text{Sen}^2 z)^3}} dz \\
I &= \int \frac{2 \text{Cos } z}{\sqrt{(2^2(1 - \text{Sen}^2 z))^3}} dz
\end{aligned}$$

Por identidad trigonométrica se tiene: $1 - \text{Sen}^2 \alpha = \text{Cos}^2 \alpha$

$$I = \int \frac{2 \text{Cos } z}{(\sqrt{2^2 \sqrt{\text{Cos}^2 z}})^3} dz = \int \frac{2 \text{Cos } z}{2^3 \text{Cos}^3 z} dz = \int \frac{1}{4 \text{Cos}^2 z} dz$$

$$I = \frac{1}{4} \int \sec^2 z \, dz$$

Donde por tabla de integral: $\int \sec^2 u \, du = \operatorname{Tg} u + C$

$$I = \frac{1}{4} \operatorname{Tg} z + C$$

Del cambio trigonométrico construimos el triángulo

$$x - 2 = 2 \operatorname{Sen} z \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Sen} z = \frac{x - 2}{2} = \frac{\text{c. opuesto}}{\text{Hipotenusa}}$$

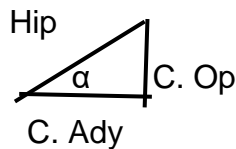
Por teorema de Pitágoras

$$\text{C. Adyacente} = \sqrt{(2)^2 - (x - 2)^2} = \sqrt{4x - x^2}$$

$$\operatorname{Tg} z = \frac{\text{C. Opuesto}}{\text{c. Adyacente}} = \frac{x - 2}{\sqrt{4x - x^2}}$$

Por lo tanto

$$I = \frac{1}{4} \left(\frac{x - 2}{\sqrt{4x - x^2}} \right) + C$$



04.-

$$I = \int x^3 \sqrt{7 - 2x^2} \, dx$$

El cambio trigonométrico recomendado es:

$$x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \operatorname{Sen} z \quad \Rightarrow \quad \text{Diferenciando} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \operatorname{Cos} z \, dz$$

Por lo tanto la integral se transforma en:

$$I = \int \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \operatorname{Sen} z \right)^3 \sqrt{7 - 2 \left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \operatorname{Sen} z \right)^2} \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \operatorname{Cos} z \, dz$$

$$I = \frac{49}{4} \int \operatorname{Sen}^3 z \sqrt{7 - 7 \operatorname{Sen}^2 z} \operatorname{Cos} z \, dz$$

Por identidad trigonométrica se tiene: $1 - \operatorname{Sen}^2 \alpha = \operatorname{Cos}^2 \alpha$

$$I = \frac{49}{4} \int \operatorname{Sen}^3 z \sqrt{7(1 - \operatorname{Sen}^2 z)} \operatorname{Cos} z \, dz$$

$$I = \frac{49}{4} \int \operatorname{Sen}^3 z \sqrt{7} \sqrt{\operatorname{Cos}^2 z} \operatorname{Cos} z \, dz$$

$$I = \frac{49\sqrt{7}}{4} \int \text{Sen}^3 z \text{ Cos}^2 z \, dz = \frac{49\sqrt{7}}{4} \int \text{Sen}^2 z \text{ Cos}^2 z \text{ Sen} z \, dz$$

Por identidad trigonométrica se tiene: $\text{Sen}^2 \alpha = 1 - \text{Cos}^2 \alpha$

$$I = \frac{49\sqrt{7}}{4} \int (1 - \text{Cos}^2 z) \text{ Cos}^2 z \text{ Sen} z \, dz$$

$$I = \frac{49\sqrt{7}}{4} \int (\text{Cos}^2 z \text{ Sen} z - \text{Cos}^4 z \text{ Sen} z) \, dz$$

$$I = \frac{49\sqrt{7}}{4} \left(\int \text{Cos}^2 z \text{ Sen} z \, dz - \int \text{Cos}^4 z \text{ Sen} z \, dz \right)$$

Por cambio de variable

$$w = \text{cos} z \Rightarrow dw = -\text{Sen} z \, dz \Rightarrow \text{Sen} z \, dz = -dw$$

Por tanto

$$I = \frac{49\sqrt{7}}{4} \left(\int w^2 (-dw) - \int w^4 (-dw) \right)$$

$$I = \frac{49\sqrt{7}}{4} \left(\int w^4 \, dw - \int w^2 \, dw \right)$$

Donde por tabla de integral: $\int v^n \, dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$

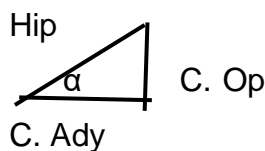
$$I = \frac{49\sqrt{7}}{4} \left(\frac{w^5}{5} - \frac{w^3}{3} \right) + C$$

Regresando el cambio:

$$I = \frac{49\sqrt{7}}{4} \left(\frac{\text{Cos}^5 z}{5} - \frac{\text{Cos}^3 z}{3} \right) + C$$

Por el cambio de variable trigonométrica se tiene:

$$x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} \text{Sen} z \Rightarrow \text{Sen} z = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{7}} = \frac{C. Op}{Hip}$$



Por teorema de Pitágoras

$$C. \text{Adyasente} = \sqrt{(\text{Hip})^2 - (C. \text{Op})^2}$$

$$= \sqrt{(\sqrt{7})^2 - (\sqrt{2}x)^2}$$

$$C. \text{Adyasente} = \sqrt{7 - 2x^2}$$

$$\cos z = \frac{C. \text{Adyasente}}{\text{Hip}} = \frac{\sqrt{7 - 2x^2}}{\sqrt{7}}$$

Por lo tanto

$$I = \frac{49\sqrt{7}}{4} \left(\left(\frac{\sqrt{7 - 2x^2}}{\sqrt{7}} \right)^5 - \left(\frac{\sqrt{7 - 2x^2}}{\sqrt{7}} \right)^3 \right) + C$$

Autoevaluación

En la siguiente cuadrícula coloque su número de cedula de identidad la cual generara algunos valores a usar en su actividad evaluativa. Si algún valor es cero (0) cámbielo en la actividad por 3

Dado:

A	B	C	D	E	F	G	H

Realizar por la sustitución trigonométrica indicando paso a paso con sus palabras las propiedades o formula usada (tabla); operaciones. Simplifique.

01	$I = \int \frac{1}{\sqrt{(F + Ax^2)^3}} dx$	02	$I = \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + Bx + D}} dx$
03	$I = \int \frac{1}{\sqrt{(Cx - Gx^2)^3}} dx$	04	$I = \int \frac{Ax^2}{\sqrt{H + Dx - x^2}} dx$
05	$I = \int \frac{1}{\sqrt{Bx^2 + G}} dx$	06	$I = \int x^2 \sqrt{A - Fx^2} dx$

07	$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{A - Cx^2}} dx$	08	$I = \int x^3 \sqrt{D + Ex - Fx^2} dx$
09	$I = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{B - Hx^2}} dx$	10	$I = \int \frac{x^2}{\sqrt{(A - Bx^2)^3}} dx$
11	$I = \int \frac{1}{\sqrt{(C + Dx^2)^3}} dx$	12	$I = \int \frac{\sqrt{F + Gx^2}}{x} dx$

Integrales que contienen potencias de senos y cosenos

Estudiaremos ahora las integrales de funciones que presentan potencias trigonométricas, es decir, funciones con alguna de las siguientes formas:

$$\begin{array}{lll}
 \text{Sen}^n(u) & \text{Sen}^m(u)\text{Cos}^n(u) & \text{Tan}^n(u) \\
 \text{Cos}^n(u) & \text{Tan}^n(u)\text{Sec}^m(u) & \text{CTg}^n(u) \\
 \text{Sec}^m(u) & \text{CTg}^m(u)\text{Csc}^n(u) & \text{Csc}^m(u)
 \end{array}$$

Integrales de la forma $\int \text{Sen}^m(x) dx$ y $\int \text{Cos}^m(x) dx$

a) Cuando m es par; utilizamos las identidades de ángulos dobles.

$$\text{Sen}^2(x) = \frac{1 - \text{Cos}(2x)}{2} \quad \text{y} \quad \text{Cos}^2(x) = \frac{1 + \text{Cos}(2x)}{2}$$

Integrales de la forma $\int \text{Sen}^m(x) \text{Cos}^n(x) dx$

La estrategia que debemos usar para integrar combinaciones de productos y potencias de Sen (x) y Cos (x) es transfórmalas utilizando identidades tipo sumas y diferencias de integrales de la forma

$\int \text{Sen}^m(x) \text{Cos}(x)dx$ ó $\int \text{Cos}^n(x) \text{Sen}(x)dx$. Posteriormente se emplea el método de sustitución o integración por parte. por ejemplos.

Resuelva la integral

$$I = \int \text{Cos}^5(x) \text{Sen}(x)dx$$

Solución:

Se observa que por cambio de variable se tiene

$$\text{Cos}(x) = P \xrightarrow{\text{diferenciando}} \text{Sen}(x)dx = dp$$

Por lo tanto la integral resulta

$$I = \int p^5 dp$$

Por tabla de integrales se obtiene:

$$I = \frac{p^{5+1}}{5+1} + C \Rightarrow I = \frac{1}{6}p^6 + C$$

Regresando el cambio; finalmente se concluye

$$I = \frac{1}{6}\text{Cos}^6(x) + C$$

Mediante este método, se busca determinar la integral de la forma

$$I = \int \text{Sen}^m(x) \text{Cos}^n(x)dx; \text{ donde } n, m \in \mathbb{Z}^+$$

En general, se intenta escribir un integrando en el que intervienen potencias de seno y coseno en una forma donde se tiene solo un factor seno (y el resto de la expresión en términos de coseno) o solo un factor coseno (y el resto de la expresión en términos de seno). Usando identidad $\text{Sen}^2(x) + \text{Cos}^2(x) = 1$, podemos transformar una parte a otra entre potencias pares de seno y coseno.

Las integrales trigonométricas incluyen combinaciones algebraicas de las seis funciones trigonométricas básicas, siempre podemos expresar tales integrales en términos de senos y cosenos.

Se presentan los siguientes tres casos.

Caso 1: Cuando m es impar

Cuando m es impar entonces m es la forma $m = 2k + 1$, podemos apartar un factor del seno y en el factor elevado a la potencia par, sustituirlo por la identidad $\text{Sen}^2(x) = 1 - \text{Cos}^2(x)$, es decir

$$I = \int \text{Sen}^m(x) \text{Cos}^n(x) dx = \int \text{Sen}^{2k+1}(x) \text{Cos}^n(x) dx$$
$$I = \int \text{Sen}^{2k}(x) \text{Cos}^n(x) \text{Sen}(x) dx = \int [\text{Sen}^2(x)]^k \text{Cos}^n(x) \text{Sen}(x) dx$$
$$I = \int [1 - \text{Cos}^2(x)]^k \text{Cos}^n(x) \text{Sen}(x) dx$$

Al tener la integral de esta forma, se realiza el siguiente cambio de variable

$$p = \text{Cos}(x) \quad \begin{array}{l} \text{Diferenciando} \\ \rightarrow \end{array} \quad dp = -\text{Sen}(x) dx$$

Sustituyendo en la integral se obtiene:

$$I = \int (1 - p^2)^k p^n dp$$

Desarrollando la potencia del binomio y multiplicamos por el siguiente elemento se obtienen varias integrales polinómicas que se resuelve usando la explicada en el método directo; luego se regresa el cambio de variable y se obtiene el valor buscado.

Caso 2: Si n es impar

Cuando n es impar, se trata como en el caso anterior, pero la función a desarrollar es m es la forma $m = 2p + 1$, podemos apartar un factor del coseno y en el factor elevado a la potencia par, sustituirlo por la identidad $\text{Cos}^2(x) = 1 - \text{Sen}^2(x)$, es decir

$$I = \int \text{Sen}^m(x) \text{Cos}^n(x) dx = \int \text{Sen}^m(x) \text{Cos}^{2p+1}(x) dx$$

$$I = \int \text{Sen}^m(x) \text{Cos}^{2p}(x) \text{Cos}(x) dx = \int \text{Sen}^m(x) [\text{Cos}^2(x)]^p \text{Cos}(x) dx$$

$$I = \int \text{sen}^m(x) [1 - \text{Sen}^2(x)]^p \text{Cos}(x) dx$$

Al tener la integral de esta forma, se realiza el siguiente cambio de variable

$$u = \text{Sen}(x) \quad \begin{array}{c} \text{Diferenciando} \\ \rightarrow \end{array} \quad du = \text{Cos}(x) dx$$

Sustituyendo en la integral se obtiene:

$$I = \int u^m (1 - u^2)^p du$$

Desarrollando la potencia del binomio y multiplicamos por el siguiente elemento se obtienen varias integrales polinómicas que se resuelve usando la explicada en el método directo; luego se regresa el cambio de variable y se obtiene el valor buscado.

Caso 3: Si n y m son pares

Cuando n y m son números pares entonces pueden ser escritos como $n = 2k$ y $m = 2p$ respectivamente, podemos aplicar las identidades de la mitad de ángulo

$$\text{Sen}^2(x) = \frac{1 - \text{Cos}(2x)}{2} \quad \text{y} \quad \text{Cos}^2(x) = \frac{1 + \text{Cos}(2x)}{2}$$

y en ocasiones, es útil usar la identidad:

$$\text{Sen}(2x) = 2 \text{Sen}(x) \text{Cos}(x)$$

por lo que

$$I = \int \text{Sen}^m(x) \text{Cos}^n(x) dx = \int \text{Sen}^{2k}(x) \text{Cos}^{2p}(x) dx$$

$$I = \int (\text{Sen}^2(x))^k (\text{Cos}^2(x))^p dx = \int \left(\frac{1 - \text{Cos}(2x)}{2} \right)^k \left(\frac{1 + \text{Cos}(2x)}{2} \right)^p dx$$

Luego se desarrolla las potencias de los binomios y la multiplicación de los polinomios.

Integrales que contiene potencias de tangentes y secantes

Al calcular integrales de la forma:

$$I = \int \text{Sec}^n(x)\text{Tan}^m(x) dx; \text{ donde } n, m \in \mathbb{Z}^+$$

Se puede usar una estrategia semejante a la anterior.

Sabemos que

$$\frac{d}{dx} \text{Tan}(x) = \text{Sec}^2(x)$$

podemos separar un factor $\text{Sec}^2(x)$ y convertir la potencia restante (par) de la secante en una expresión relacionada con la tangente por medio de la identidad $\text{Sec}^2(x) = 1 + \text{Tan}^2(x)$. por otro lado, sabemos que

$$\frac{d}{dx} \text{Sec}(x) = \text{Sec}(x)\text{Tan}(x)$$

se puede separar un factor $\text{Sec}(x)\text{Tan}(x)$ y convertir la potencia restante (par) de tangente a secante.

En este tipo de integral, se presentan los siguiente casos.

Caso 1: Cuando n es par

Si n es par entonces se puede escribir de la forma $n = 2k$, separamos un factor de $\text{Sec}^2(x)$ y utilizamos la identidad $\text{Sec}^2(x) = 1 + \text{Tan}^2(x)$, luego

$$I = \int \text{Sec}^n(x)\text{Tan}^m(x) dx = \int \text{Sec}^{2k}(x)\text{Tan}^m(x) dx$$

$$I = \int \text{Sec}^{2k-2}(x)\text{Tan}^m(x) \text{Sec}^2(x) dx = \int \text{Sec}^{2(k-1)}(x)\text{Tan}^m(x) \text{Sec}^2(x) dx$$

$$I = \int [\text{Sec}^2(x)]^{(k-1)} \text{Tan}^m(x) \text{Sec}^2(x) dx = \int [1 + \text{tan}^2(x)]^{(k-1)} \text{Tan}^m(x) \text{Sec}^2(x) dx$$

Al hacemos el cambio de variable

$$p = \text{Tan}(x) \quad \begin{array}{c} \text{Diferenciando} \\ \rightarrow \end{array} \quad dp = \text{Sec}^2(x)dx$$

la integral nos queda:

$$I = \int [1 + p^2]^{(k-1)} p^m dp$$

Que debemos desarrollar como una integral polinómica

Caso 2: Cuando m es impar

Si m es impar entonces puede escribirse de la forma $m = 2k + 1$, el truco está en separar un factor de $\text{Sec}(x)\text{Tan}(x)$ y emplear la identidad $\text{Tan}^2(x) = \text{Sec}^2(x) - 1$, luego:

$$I = \int \text{Sec}^n(x)\text{Tan}^m(x) dx = \int \text{Sec}^n(x)\text{Tan}^{2k+1}(x) dx$$

$$I = \int \text{Sec}^{n-1}(x)\text{Tan}^{2k}(x) \text{Sec}(x)\text{Tan}(x) dx$$

$$I = \int \text{Sec}^{n-1}(x)(\text{Sec}^2(x) - 1)^k \text{Sec}(x)\text{Tan}(x) dx$$

Realizando el cambio de variable

$$p = \text{Sec}(x) \quad \begin{array}{c} \text{Diferenciando} \\ \rightarrow \end{array} \quad dp = \text{Sec}(x)\text{Tan}(x)dx$$

La integral nos queda

$$I = \int p^{n-1}(p^2 - 1)^k dp$$

Que debemos desarrollar como una integral polinómica

La tangente tiene potencia par

Si sólo se desea integrar la función $\text{Tan}^n(x)$ siendo n un número par entonces

$$I = \int \operatorname{Tan}^n(x) dx = \int \operatorname{Tan}^{2k}(x) dx = \int \operatorname{Tan}^{2k-2}(x) \operatorname{Tan}^2(x) dx$$

$$I = \int \operatorname{Tan}^{2k-2}(x) [\operatorname{Sec}^2(x) - 1] dx$$

$$I = \int \operatorname{Tan}^{2k-2}(x) \operatorname{Sec}^2(x) dx - \int \operatorname{Tan}^{2k-2}(x) dx$$

La secante tiene potencia impar

Si la función a integrar es la función $\operatorname{Sec}^n(x)$ siendo n un número impar entonces para calcular

$$I = \int \operatorname{Sec}^n(x) dx = \int \operatorname{Sec}^{2k+1}(x) dx$$

Se utiliza el método de integración por partes.

El ejemplo clásico de este caso consiste en hallar la integral realizado en el apartado integral por parte.

Ninguno de los anteriores

Cuando no existe forma aplicar ninguno de los pasos antes señalado, debemos transformar a $\operatorname{Sen}(x)$ y $\operatorname{Cos}(x)$ recordando que;

$$\operatorname{Tan}(x) = \frac{\operatorname{Sen}(x)}{\operatorname{Cos}(x)} \quad \operatorname{Sec}(x) = \frac{1}{\operatorname{Cos}(x)} \quad \operatorname{Csc}(x) = \frac{1}{\operatorname{Sen}(x)}$$

Sustitución de Weierstrass

Es una sustitución que permite transformar una función trigonométrica a función racional. Por ejemplo. Deseamos evaluar una integral de la forma

$$I = \int R(\operatorname{Sen}(x), \operatorname{Cos}(x)) dx$$

Donde

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}; P, Q \in \mathbb{R}(x, y)$$

Se hace el cambio de variable

$$u = \text{Tan}\left(\frac{x}{2}\right)$$

por lo que

$$\text{Sen}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} \quad \text{Y} \quad \text{Cos}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}$$

De donde se sigue que

$$\text{Sen}(x) = \frac{2u}{1+u^2} \quad \text{Y} \quad \text{Cos}(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Por lo tanto ,no es difícil ver que

$$dx = \frac{2}{1+u^2} du$$

Esta sustitución permite reescribir la integral como

$$I = \int R(\text{Sen}(x), \text{Cos}(x)) dx = 2 \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{1}{1+u^2} du$$

Que resulta ser una función racional, de integración mecánica.

Integración numérica

La integración numérica comprende una amplia gama de algoritmos para calcular el valor numérico de una integral definida. Se usan cuando no podemos aplicar un método de integración o la función primitiva resulta es muy complicada; por tanto su aplicación resulta más útil, a fin de obtener su valor numérico directamente.

El término cuadratura numérica es semejante a la integración numérica, en especial si es aplicada a integrales unidimensional, aunque

para casos de dos o más dimensiones (integrales múltiples) también se utiliza.

Ejemplos Integrales que tienen potencia de Senos y Cosenos

01 Realizar
$$I = \int \text{Sen}^3(x) dx$$

Solución.

$$I = \int \text{Sen}^3(x) dx = \int \text{Sen}^2(x) \text{sen}(x) dx$$

Usando la identidad $\text{Sen}^2(x) = 1 - \text{Cos}^2(x)$

$$I = \int [1 - \text{Cos}^2(x)] \text{Sen}(x) dx = \int \text{sen}(x) dx - \int \text{Cos}^2(x) \text{Sen}(x) dx = I_1 - I_2$$

Donde

$$I_1 = \int \text{sen}(x) dx = -\text{Cos}(x); \text{ por tabla}$$

$$I_2 = \int \text{Cos}^2(x) \text{Sen}(x) dx$$

Por cambio de variable

$$u = \text{Cos}(x) \quad \begin{array}{l} \text{Diferenciando} \\ \rightarrow \end{array} \quad du = -\text{Sen}(x) dx \quad \Rightarrow \quad \text{Sen}(x) dx = -du$$

Luego

$$I_2 = \int u^2 (-du) = -\frac{u^{2+1}}{(2+1)} = -\frac{u^3}{3} + C$$

Regresando el cambio

$$I_2 = -\frac{\text{Cos}^3(x)}{3} + C$$

Reuniendo los resultados obtenidos se concluye

$$I = -\text{Cos}(x) - \left(-\frac{\text{Cos}^3(x)}{3} \right) + C = -\text{Cos}(x) + \frac{\text{Cos}^3(x)}{3} + C$$

02 Realizar $I = \int \text{Cos}^5(4x) \text{Sen}(4x) dx$

Solución.

Por cambio de variable

$$u = 4x \xrightarrow{\text{Diferenciando}} du = 4dx \Rightarrow dx = \frac{du}{4}$$

Luego

$$I = \int \text{Cos}^5(u) \text{Sen}(u) \frac{du}{4} = \frac{1}{4} \int \text{Cos}^5(u) \text{Sen}(u) du$$

Por otro cambio de variable

$$p = \text{Cos}(u) \xrightarrow{\text{Diferenciando}} dp = -\text{Sen}(u) du \Rightarrow \text{Sen}(u) du = -dp$$

Por tanto

$$I = \frac{1}{4} \int p^5 (-dp) = -\frac{1}{4} \int p^5 dp$$

Por ser polinómica la tabla nos señala $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ por tanto

$$I = \frac{1}{4} \frac{p^{5+1}}{5+1} + C = \frac{1}{4} \frac{p^6}{6} + C = \frac{1}{24} p^6 + C$$

Regresando los cambios se tiene:

$$I = \frac{1}{24} \text{Cos}^6(u) + C = \frac{1}{24} \text{Cos}^6(4x) + C$$

03 Realizar $I = \int \text{Sen}^7(x) \text{Cos}^2(x) dx = \int \text{Sen}^6(x) \text{Cos}^2(x) \text{Sen}(x) dx$

Solución. Usando la identidad

$$I = \int \text{Sen}^6(x) \text{Cos}^2(x) \text{Sen}(x) dx = \int (\text{Sen}^2(x))^3 \text{Cos}^2(x) \text{Sen}(x) dx$$

Usando la identidad $\text{Sen}^2(x) = 1 - \text{Cos}^2(x)$

$$I = \int (1 - \text{Cos}^2(x))^3 \text{Cos}^2(x) \text{Sen}(x) dx$$

Por cambio de variable

$$p = \text{Cos}(x) \xrightarrow{\text{Diferenciando}} dp = -\text{Sen}(x) dx \Rightarrow \text{Sen}(x) dx = -dp$$

Luego

$$I = \int (1 - p^2)^3 p^2 (-dp) = - \int (1 - p^2)^3 p^2 dp$$

Desarrollando la potencia del binomio y el producto de polinomios

$$I = - \int (1 - 3p^2 + 3p^4 - p^6) p^2 dp = - \int (p^2 - 3p^4 + 3p^6 - p^8) dp$$

Al separar las integrales todas son polinómica y aplicando la tabla que nos señala $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ resulta

$$I = - \left(\frac{p^{2+1}}{(2+1)} - 3 \frac{p^{4+1}}{(4+1)} + 3 \frac{p^{6+1}}{(6+1)} - \frac{p^{8+1}}{(8+1)} \right) + C$$

Simplificando y regresando el cambio

$$I = - \left(\frac{1}{3} p^3 - \frac{3}{5} p^5 + \frac{3}{7} p^7 - \frac{1}{9} p^9 \right) + C$$

$$I = -\frac{1}{3} \text{Cos}^3(x) + \frac{3}{5} \text{Cos}^5(x) - \frac{3}{7} \text{Cos}^7(x) + \frac{1}{9} \text{Cos}^9(x) + C$$

04 Realizar

$$I = \int \text{Sen}^2(3x) \text{Cos}^2(3x) dx$$

Solución.

Usando la identidad

$$\text{sen}^2(x) = \frac{1 - \text{Cos}(2x)}{2} \text{ y } \text{Cos}^2(x) = \frac{1 + \text{Cos}(2x)}{2}$$

$$I = \int \left(\frac{1 - \text{Cos}(6x)}{2} \right) \left(\frac{1 + \text{Cos}(6x)}{2} \right) dx = \frac{1}{4} \int (1 - \text{Cos}(6x)) (1 + \text{Cos}(6x)) dx$$

Por cambio de variable

$$u = 6x \quad \begin{array}{l} \text{Diferenciando} \\ \rightarrow \end{array} \quad du = 6dx \quad \Rightarrow dx = \frac{du}{6}$$

Luego

$$I = \frac{1}{4} \int (1 - \text{Cos}(u)) (1 + \text{Cos} u) \frac{du}{6} = \frac{1}{24} \int (1 - \text{Cos}(u)) (1 + \text{Cos} u) du$$

Aplicando producto notable y la identidades

$$1 - \text{Cos}^2(u) = \text{Sen}^2(u) \text{ y } \text{Sen}^2(u) = \frac{1 - \text{Cos}(2u)}{2}$$

$$I = \frac{1}{24} \int (1 - \text{Cos}^2(u)) du = \frac{1}{24} \int \text{Sen}^2(u) du = \frac{1}{24} \int \frac{1 - \text{Cos}(2u)}{2} du$$

$$I = \frac{1}{48} \int (1 - \text{Cos}(2u)) du = \frac{1}{48} \left[\int du - \int \text{Cos}(2u) du \right] = \frac{1}{48} (I_1 - I_2)$$

Donde por tabla se tiene

$$I_1 = \int du = u + C$$

$$I_2 = \int \cos(2u) du$$

$t = 2u$ Diferenciando $\rightarrow dt = 2du \Rightarrow du = \frac{dt}{2}$

$$I_2 = \int \cos(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int \cos(t) dt = \frac{1}{2} \text{Sen}(t) + C$$

Regresando el cambio

$$I_2 = \frac{1}{2} \text{Sen}(2u) + C$$

Reuniendo los valores obtenidos

$$I = \frac{1}{48} \left(u - \frac{1}{2} \text{Sen}(2u) \right) + C$$

Finalmente regresando el primer cambio de variable

$$I = \frac{1}{48} u - \frac{1}{96} \text{Sen}(12x) + C$$

05 Realizar

$$I = \int \tan^2(x) \sec^3(x) dx$$

Solución.

Usando la identidad $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$

$$I = \int [\sec^2(x) - 1] \sec^3(x) dx = \int [\sec^5(x) - \sec^3(x)] dx$$

$$I = \int \sec^5(x) dx - \int \sec^3(x) dx = I_1 - I_2$$

Donde

$$I_1 = \int \sec^5(x) dx = \int \sec^3(x) \sec^2(x) dx$$

Integrando por parte. En este caso los tomamos

$$u = \sec^3(x) \xrightarrow{\text{diferenciando}} du = 3\sec^2(x)\tan(x) dx$$

$$dv = \sec^2(x) dx \xrightarrow{\text{Integrando}} \int dv = \int \sec^2(x) dx \Rightarrow v = \tan(x)$$

Aplicando la formula sustituyendo estos valores

$$I = \int u dv = uv - \int u dv$$

$$I_1 = \sec^3(x)\tan(x) - \int \tan(x) 3\sec^3(x)\tan(x) dx$$

$$I_1 = \sec^3(x)\tan(x) - 3 \int \tan^2(x)\sec^3(x)dx = \sec^3(x)\tan(x) - 3I$$

Ahora determinemos

$$I_2 = \int \sec^3(x) dx = \int \sec^2(x)\sec(x)dx$$

Integrando por parte En este caso los tomamos

$$u = \sec(x) \xrightarrow{\text{diferenciando}} du = \sec(x)\tan(x)dx$$

$$dv = \sec^2(x) dx \xrightarrow{\text{Integrando}} \int dv = \int \sec^2(x) dx \Rightarrow v = \tan(x)$$

Aplicando la formula sustituyendo estos valores

$$I = \int u dv = uv - \int u dv$$

$$I_2 = \sec(x)\tan(x) - \int \tan(x)\sec(x)\tan(x)dx$$

$$I_2 = \sec(x)\tan(x) - \int \tan^2(x)\sec(x)dx = \sec(x)\tan(x) - I_3$$

Donde por la identidad $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$

$$I_3 = \int \tan^2(x)\sec(x)dx = \int (\sec^2(x) - 1)\sec(x)dx$$

Usando la tabla de integrales

$$I_3 = \int \sec^3(x)dx - \int \sec(x) dx = I_2 - \ln|\sec(x) + \tan(x)| + C$$

Reuniendo los valores obtenidos y simplificando

$$I_2 = \sec(x)\tan(x) - (I_2 - \ln|\sec(x) + \tan(x)|)$$

$$I_2 = \sec(x)\tan(x) - I_2 + \ln|\sec(x) + \tan(x)|$$

$$I_2 + I_2 = \sec(x)\tan(x) + \ln|\sec(x) + \tan(x)|$$

$$2I_2 = \sec(x)\tan(x) + \ln|\sec(x) + \tan(x)|$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\sec(x)\tan(x) + \frac{1}{2}\ln|\sec(x) + \tan(x)|$$

Por otro lado

$$I = I_1 - I_2 = \sec^3(x)\tan(x) - 3I - \left(\frac{1}{2}\sec(x)\tan(x) + \frac{1}{2}\ln|\sec(x) + \tan(x)|\right)$$

$$I + 3I = \sec^3(x)\tan(x) - \frac{1}{2}\sec(x)\tan(x) - \frac{1}{2}\ln|\sec(x) + \tan(x)|$$

$$4I = \sec^3(x)\tan(x) - \frac{1}{2}\sec(x)\tan(x) - \frac{1}{2}\ln|\sec(x) + \tan(x)|$$

Finalmente

$$I = \frac{1}{4}\sec^3(x)\tan(x) - \frac{1}{8}\sec(x)\tan(x) - \frac{1}{8}\ln|\sec(x) + \tan(x)|$$

Autoevaluación

Resuelva paso a paso las siguientes integrales usando el método de integrales de potencias de funciones trigonométricas, señale las operaciones, simplificaciones realizadas, explique con sus palabras las propiedades o identidades que emplee y las fórmulas de integración (tabla),.

$$01.- \quad I = \int \cos^5(3x) dx \quad 02.- \quad I = \int \operatorname{Sen}^3(4x)\operatorname{Cos}(4x) dx$$

$$03.- \quad I = \int \operatorname{Sen}^5(4x)\operatorname{Cos}^3(3x)dx \quad 04.- \quad I = \int \operatorname{Sen}^6(3x) dx$$

$$05.- \quad I = \int \operatorname{Tg}^3(4x) dx \quad 06.- \quad I = \int \operatorname{Tg}^6(4x)\operatorname{Sec}^4(4x)dx$$

$$07. \quad I = \int \operatorname{Tan}^5(5x) dx \quad 08.- \quad I = \int \operatorname{CTg}^6(3x)\operatorname{Csc}^4(3x)dx$$

$$09.- \quad I = \int \operatorname{Csc}^5(7x) dx \quad 10.- \quad I = \int \frac{\operatorname{Tg}^3(2x)}{\sqrt{\operatorname{Sec}(2x)}} dx$$

$$10 \quad I = \int \operatorname{Sen}^7(x)\operatorname{Cos}(x)dx$$

Integración de Funciones Racionales por Descomposición en Fracciones Simples.

Las fracciones parciales o simples es un método de integración que permite resolver integrales de funciones racionales que no podemos calcular por los otros métodos ya desarrollados (primitivas, aplicando tabla, por partes, cambio de variable), iniciamos señalando que es una fracción racional:

Es el cociente no efectuado de dos funciones cualesquiera pero el denominador necesariamente debe ser distinto de cero.

El método de descomposición en fracciones simples consiste en descomponer un cociente de polinomios en una suma de fracciones de polinomios de menor grado. Es utilizado en el cálculo integral para transformar un integrando complejo en fracciones más sencilla. El requisito más importante es que el grado del polinomio del denominador sea estrictamente mayor que el del numerador. Ejemplo.

Dado la fracción siguiente exprésela como otra más simple

$$\frac{x^3 + 3x}{x^2 - 2x - 3}$$

Observe que el numerador y denominador son polinomios; pero, cuando el grado del polinomio del numerador es mayor o igual al del denominador, se realiza la división de los polinomios para obtener un polinomio más una nueva fracción, resultando:

$$\frac{x^3 + 3x}{x^2 - 2x - 3} = x + 2 + \frac{10x + 6}{x^2 - 2x - 3}$$

La expresión que resulta en este caso es una fracción donde el polinomio del numerador tiene menor grado que el polinomio del denominador, ahora la fracción puede transformarse en una suma de fracciones parciales, pero el polinomio del denominador lo factorizamos, quedando:

$$\frac{10x + 6}{x^2 - 2x - 3} = \frac{10x + 6}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{A}{(x - 3)} + \frac{B}{(x + 1)} = \frac{A(x + 1) + B(x - 3)}{(x - 3)(x + 1)}$$

Comparando los numeradores

$$Ax + A + Bx - 3B = 10x + 6 \Rightarrow (A + B)x + A - 3B = 10x + 6$$

Por lo tanto

$$\begin{cases} A + B = 10 \\ A - 3B = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 3 \\ 1 \end{matrix} \begin{cases} A + B = 10 \\ A - 3B = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3A + 3B = 30 \\ A - 3B = 6 \end{cases} \Rightarrow 4A = 36$$

$$A = \frac{36}{4} \Rightarrow A = 9$$

$$\begin{cases} A + B = 10 \\ A - 3B = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 1 \\ -1 \end{matrix} \begin{cases} A + B = 10 \\ A - 3B = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A + B = 10 \\ -A + 3B = -6 \end{cases} \Rightarrow 4B = 4$$

$$B = \frac{4}{4} \Rightarrow B = 1$$

Por lo tanto la fracción parcial no queda

$$\frac{10x + 6}{x^2 - 2x - 3} = \frac{10x + 6}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{9}{(x - 3)} + \frac{1}{(x + 1)}$$

Una definición más exacta del método de fracciones parciales sería:

Si una función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ es una fracción propia, si el grado del polinomio $P(x)$ es menor que el grado del polinomio $Q(x)$. De no cumplirse esto se realiza el cociente para obtener un polinomio cociente más una fracción propia

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

Existen 4 casos de fracciones parciales:

Caso 1: Factores lineales distintos.

Cuando cada factor lineal de la forma $ax + b$ del denominador le corresponde una constante, aumentando en número de constantes según la cantidad de factores que se tenga en el denominador.

Nota: Todas las integrales que utilicen este caso su resultado será el logaritmo natural de cada uno de los factores.

Caso 2: Factores lineales repetidos

El número de factores será igual al grado (exponente) del polinomio; es decir; a cada factor lineal $ax + b$ que figure n veces en el denominador le corresponde una suma de fracciones de la forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(X)}{(ax+b)^n} = \frac{A}{(ax+b)} + \frac{B}{(ax+b)^2} + \dots + \frac{N}{(ax+b)^N}$$

Nota: Una de las integrales correspondientes a este caso da como resultado un logaritmo natural, mientras que las restantes se resuelven mediante un cambio de variables. Por ejemplo:

$$\frac{x^2 - 3x + 4}{(x+2)^3} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2} + \frac{C}{(x+2)^3}$$

Caso 3: Factores cuadráticos distintos

En este caso a cada factor le corresponderán dos constantes, de las cuales una de estas será el coeficiente del término lineal. El denominador contiene factores de segundo grado, pero ninguno de estos se repite. A todo factor no repetido de segundo grado, como

$$x^2 + sx + p$$

le corresponde una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax + B}{x^2 + sx + p}$$

Por ejemplo

$$\frac{4x^2 - 8x + 1}{x^3 - x + 6} = \frac{4x^2 - 8x + 1}{(x+2)(x^2 - 2x + 3)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx + c}{x^2 - 2x + 3}$$

Caso 4: factores cuadráticos repetidos

El denominador contiene factores de segundo grado y algunos de estos se repiten. A todo factor de segundo grado repetido n veces, como

$$(x^2 + sx + p)^n$$

Corresponderá la suma de n fracciones parciales, de la forma

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + sx + p)^n} + \frac{Cx + D}{(x^2 + sx + p)^n} + \dots + \frac{Lx + M}{(x^2 + sx + p)^n}$$

Ejemplos Integrales por fracciones parciales

1.- $I = \int \frac{3}{x^2 + 3x} dx$ Factorizando el Denominador.
 $x^2 + 3x = x(x + 3)$

Luego la expresión a integral se puede expresar como

$$\frac{3}{x^2 + 3x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} = \frac{A(x + 3) + Bx}{x(x + 3)}$$

Por lo tanto podemos señalar que:

$$3 = A(x + 3) + Bx$$

Dando a "x" el valor (x = 0), que elimina una de los valores buscado (B), podemos obtener la otra (A)

$$3 = A(x + 3) + Bx]_{x=0} \Rightarrow 3 = A(0 + 3) + B(0) \Rightarrow 3 = 3A \Rightarrow A = \frac{3}{3} = 1$$

Dando a "x" el valor (x = -3), que elimina una de los valores buscado (A), podemos obtener la otra (B)

$$3 = A(x + 3) + Bx]_{x=-3} \Rightarrow 3 = A(-3 + 3) + B(-3) \Rightarrow 3 = A(0) - 3B$$

$$\Rightarrow 3 = -3B \Rightarrow B = \frac{3}{-3} = -1$$

Por lo tanto la integra se transforma en

$$I = \int \frac{3}{x^2 + 3x} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x + 3} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 3} \right) dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x + 3}$$

Por tabla se tiene

$$I = \ln|x| - \ln|x + 3| + C \Rightarrow I = \ln|x| + \ln C - \ln|x + 3| \Rightarrow I = \ln \left| \frac{Kx}{x + 3} \right|$$

2.- $I = \int \frac{3x + 1}{x^2 + 4x + 3} dx$ Factorizando el Denominador.
 $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$

Luego la expresión a integral se puede expresar como

$$\frac{3x + 1}{x^2 + 4x + 3} = \frac{A}{(x + 1)} + \frac{B}{(x + 3)} = \frac{A(x + 3) + B(x + 1)}{(x + 1)(x + 3)}$$

Por lo tanto podemos señalar que:

$$3x + 1 = A(x + 3) + B(x + 1)$$

Dando a "x" el valor (x = -1), que elimina una de los valores buscado (B), podemos obtener la otra (A)

$$\begin{aligned} 3x + 1 = A(x + 3) + B(x + 1)|_{x=-1} &\Rightarrow 3(-1) + 1 = A(-1 + 3) + B(-1 + 1) \\ &\Rightarrow -3 + 1 = 2A \Rightarrow A = \frac{-2}{2} = -1 \end{aligned}$$

Dando a "x" el valor (x = -3), que elimina una de los valores buscado (A), podemos obtener la otra (B)

$$\begin{aligned} 3x + 1 = A(x + 3) + B(x + 1)|_{x=-3} &\Rightarrow 3(-3) + 1 \\ &= A(-3 + 3) + B(-3 + 1) \\ \Rightarrow -9 + 1 = A(0) - 2B &\Rightarrow -8 = -2B \Rightarrow B = \frac{-8}{-2} = 4 \end{aligned}$$

Por lo tanto la integra se transforma en

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3x + 1}{x^2 + 4x + 3} dx = \int \left(\frac{A}{(x + 1)} + \frac{B}{(x + 3)} \right) dx = \int \left(\frac{-1}{(x + 1)} + \frac{4}{(x + 3)} \right) dx \\ I &= - \int \frac{dx}{(x + 1)} + 4 \int \frac{dx}{(x + 3)} \end{aligned}$$

Por tabla se tiene

$$\begin{aligned} I = -\ln|x + 1| + 4\ln|x + 3| + C &\Rightarrow I = \ln(x + 3)^4 + \ln C - \ln|x + 1| \Rightarrow I \\ I &= \ln \left| \frac{K(x + 3)^4}{(x + 1)} \right| \end{aligned}$$

3.-
$$I = \int \frac{5x^2 + 3}{x^2(x^2 + 2)} dx$$

Luego la expresión a integral se puede expresar como

$$\frac{5x^2 + 3}{x^2(x^2 + 2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2} = \frac{Ax(x^2 + 2) + B(x^2 + 2) + (Cx + D)x^2}{x^2(x^2 + 2)}$$

Por lo tanto podemos señalar que:

$$5x^2 + 3 = Ax(x^2 + 2) + B(x^2 + 2) + (Cx + D)x^2$$

Desarrollando se tiene:

$$\begin{aligned} 5x^2 + 3 &= Ax^3 + 2Ax + Bx^2 + 2B + Cx^3 + Dx^2 \\ &= (A + C)x^3 + (B + D)x^2 + 2Ax + 2B \end{aligned}$$

Formamos el sistema por comparación

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + D = 5 \\ 2A = 0 \\ 2B = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{por las dos ultimas se tiene} \begin{cases} A = 0 \\ B = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Sustituyendo en las otras dos se obtiene

$$\begin{cases} C = 0 \\ D = 5 - \frac{3}{2} \Rightarrow D = \frac{7}{2} \end{cases}$$

Por lo tanto la integra se transforma en

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{5x^2 + 3}{x^2(x^2 + 2)} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2} \right) dx = \int \left(\frac{\frac{3}{2}}{x^2} + \frac{\frac{7}{2}}{x^2 + 2} \right) dx \\ I &= \frac{3}{2} \int x^{-2} dx + \frac{7}{2} \int \frac{dx}{x^2 + 2} = \frac{3}{2} I_1 + \frac{7}{2} I_2 \end{aligned}$$

Donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \int x^{-2} dx \text{ #por tabla" } I_1 = \frac{x^{-1}}{-1} + C \Rightarrow I_1 = -\frac{1}{x} + C \\ I_2 &= \int \frac{dx}{x^2 + 2} \end{aligned}$$

Por cambio trigonométrico

$$x = \sqrt{2} \operatorname{Tg} \alpha \Rightarrow dx = \sqrt{2} \operatorname{Sec}^2 \alpha d\alpha$$

$$I_2 = \int \frac{\sqrt{2} \operatorname{Sec}^2 \alpha}{(\sqrt{2} \operatorname{Tg} \alpha)^2 + 2} d\alpha = \sqrt{2} \int \frac{\operatorname{Sec}^2 \alpha}{2 \operatorname{Tg}^2 \alpha + 2} d\alpha = \sqrt{2} \int \frac{\operatorname{Sec}^2 \alpha}{2(\operatorname{Tg}^2 \alpha + 1)} d\alpha$$

$$I_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\operatorname{Sec}^2 \alpha}{\operatorname{Sec}^2 \alpha} d\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \int d\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \alpha + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Arc Tg} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) + C$$

Por lo tanto

$$I = \frac{3}{2}I_1 + \frac{7}{2}I_2 = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{7}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \text{Arc Tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right) + C$$

$$= -\frac{3}{2x} + \frac{7\sqrt{2}}{4} \text{Arc Tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

3.- $I = \int \frac{2x + 7}{x^2 + 2x - 4} dx$ Factorizando el Denominador por resolvente cuadrática.

$$x^2 + 2x - 4 = 0$$

Al comparar con la ecuación de segundo grado

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$A = 1$$

$$B = 2$$

$$C = -4$$

se obtiene las raices por la formula $x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} =$

$$\frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4(1)(-4)}}{2(1)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot 5}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{5}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 + \sqrt{5} \\ x_2 = -1 - \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x + 1 - \sqrt{5}) = 0 \\ (x + 1 + \sqrt{5}) = 0 \end{cases} \text{ por lo tanto } x^2 + 2x - 4 = (x + 1 - \sqrt{5})(x + 1 + \sqrt{5})$$

Luego la expresión a integral se puede expresar como

$$\frac{2x + 7}{(x + 1 - \sqrt{5})(x + 1 + \sqrt{5})} = \frac{A}{(x + 1 - \sqrt{5})} + \frac{B}{(x + 1 + \sqrt{5})}$$

$$= \frac{A(x + 1 + \sqrt{5}) + B(x + 1 - \sqrt{5})}{(x + 1 - \sqrt{5})(x + 1 + \sqrt{5})}$$

Por lo tanto podemos señalar que:

$$2x + 7 = A(x + 1 + \sqrt{5}) + B(x + 1 - \sqrt{5})$$

Dando a "x" el valor ($x = -1 - \sqrt{5}$), que elimina una de los valores buscado (A), podemos obtener la otra (B)

$$2x + 7 = A(x + 1 + \sqrt{5}) + B(x + 1 - \sqrt{5}) \Big|_{x=-1-\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 2(-1 - \sqrt{5}) + 7 = A(-1 - \sqrt{5} + 1 + \sqrt{5}) + B(-1 - \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5})$$

$$-2 - 2\sqrt{5} + 7 = A(0) + B(-2\sqrt{5}) \Rightarrow 5 - 2\sqrt{5} = -2\sqrt{5}B \Rightarrow B = \frac{5 - 2\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}}$$

$$B = \frac{5}{-2\sqrt{5}} + \frac{-2\sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} = 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Dando a "x" el valor ($x = -1 + \sqrt{5}$), que elimina una de los valores buscado (B), podemos obtener la otra (A)

$$2x + 7 = A(x + 1 + \sqrt{5}) + B(x + 1 - \sqrt{5}) \Big|_{x=-1+\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow 2(-1 + \sqrt{5}) + 7 = A(-1 + \sqrt{5} + 1 + \sqrt{5}) + B(-1 + \sqrt{5} + 1 - \sqrt{5})$$

$$-2 + 2\sqrt{5} + 7 = A(2\sqrt{5}) + B(0) \Rightarrow 5 + 2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}A \Rightarrow A = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$A = \frac{5}{2\sqrt{5}} + \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Entonces

$$I = \int \frac{2x + 7}{x^2 + 2x - 4} dx = \int \left(\frac{A}{(x + 1 - \sqrt{5})} + \frac{B}{(x + 1 + \sqrt{5})} \right) dx$$

$$I = \int \left(\frac{\left(1 + \frac{5\sqrt{5}}{2}\right)}{(x + 1 - \sqrt{5})} + \frac{\left(1 - \frac{5\sqrt{5}}{2}\right)}{(x + 1 + \sqrt{5})} \right) dx =$$

$$I = \left(1 + \frac{5\sqrt{5}}{2}\right) \int \frac{dx}{(x + 1 - \sqrt{5})} + \left(1 - \frac{5\sqrt{5}}{2}\right) \int \frac{dx}{(x + 1 + \sqrt{5})}$$

$$I = \left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \text{Ln}|x + 1 - \sqrt{5}| + \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) \text{Ln}|x + 1 + \sqrt{5}| + C$$

4.- $I = \int \frac{x - 3}{x^2 - 49} dx$ Factorizando el Denominador.
 $x^2 - 49 = (x - 7)(x + 7)$

Luego la expresión a integral se puede expresar como

$$\frac{x-3}{(x-7)(x+7)} = \frac{A}{(x-7)} + \frac{B}{(x+7)} = \frac{A(x+7) + B(x-7)}{(x-7)(x+7)}$$

Por lo tanto podemos señalar que: $x - 3 = A(x + 7) + B(x - 7)$

Dando a "x" el valor ($x = -7$), que elimina una de los valores buscado

(A), podemos obtener la otra (B)

$$x - 3 = A(x + 7) + B(x - 7)]_{x=-7} \Rightarrow -7 - 3 = A(-7 + 7) + B(-7 - 7)$$

$$-10 = A(0) + B(-14) \Rightarrow -10 = -14B \Rightarrow B = \frac{-10}{-14} \Rightarrow B = \frac{5}{7}$$

Dando a "x" el valor ($x = 7$), que elimina una de los valores buscado

(B), podemos obtener la otra (A)

$$x - 3 = A(x + 7) + B(x - 7)]_{x=7} \Rightarrow 7 - 3 = A(7 + 7) + B(7 - 7)$$

$$4 = A(14) + B(0) \Rightarrow 4 = 14A \Rightarrow A = \frac{4}{14} \Rightarrow A = \frac{2}{7}$$

Entonces

$$I = \int \frac{x-3}{x^2-49} dx = \int \left(\frac{A}{(x-7)} + \frac{B}{(x+7)} \right) dx = I = \int \left(\frac{\frac{2}{7}}{(x-7)} + \frac{\frac{5}{7}}{(x+7)} \right) dx$$

=

$$I = \frac{2}{7} \int \frac{dx}{(x-7)} + \frac{5}{7} \int \frac{dx}{(x+7)}$$

$$I = \frac{2}{7} \ln|x-7| + \frac{5}{7} \ln|x+7| + C$$

$$5.- \quad I = \int \frac{1}{(x+2)^2} dx$$

Luego la expresión a integral se puede expresar como

$$\frac{1}{(x+2)^2} = \frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2} = \frac{A(x+2) + B}{(x+2)^2}$$

Por lo tanto podemos señalar que: $1 = A(x + 2) + B = Ax + 2A + B$

Construyamos el sistema por comparación

$$\begin{cases} A = 0 \\ 2A + B = 1 \end{cases} \Rightarrow B = 1$$

Entonces

$$I = \int \frac{1}{(x+2)^2} dx = \int \left(\frac{A}{(x+2)} + \frac{B}{(x+2)^2} \right) dx = \int \left(\frac{0}{(x+2)} + \frac{1}{(x+2)^2} \right) dx =$$
$$I = \int \frac{1}{(x+2)^2} dx$$

Por cambio de variable simple

$$(x+2) = p \Rightarrow dx = dp$$

$$I = \int \frac{1}{(x+2)^2} dx = \int \frac{1}{p^2} dp = \int p^{-2} dp = \frac{p^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{p} + C$$

Regresando el cambio

$$I = -\frac{1}{x+2} + C$$

6.-
$$I = \int \frac{5x-7}{(x^2+2)(x-3)} dx$$

Luego la expresión a integral se puede expresar como

$$\frac{5x-7}{(x^2+2)(x-3)} = \frac{Ax+B}{x^2+2} + \frac{C}{x-3} = \frac{(Ax+B)(x-3) + C(x^2+2)}{(x^2+2)(x-3)}$$

Por lo tanto podemos señalar que: $5x-7 = (Ax+B)(x-3) + C(x^2+2)$

$$5x-7 = Ax^2 - 3Ax + Bx - 3B + Cx^2 + 2C$$
$$= (A+C)x^2 + (-3A+B)x + (-3B+2C)$$

Construyamos el sistema por comparación

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -3A+B=5 \\ -3B+2C=-7 \end{cases} \Rightarrow \text{de la primera se tiene } A=-C \Rightarrow \begin{cases} -3(-C)+B=5 \\ -3B+2C=-7 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 3 \begin{cases} B+3C=5 \\ -3B+2C=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3B+9C=15 \\ -3B+2C=-7 \\ 11C=8 \end{cases} \Rightarrow C = \frac{8}{11}$$

Luego

$$A = -C \Rightarrow C = -\frac{8}{11}$$

$$B + 3C = 5 \Rightarrow B = 5 - 3\left(\frac{8}{11}\right) = 5 - \frac{24}{11} = \frac{55 - 24}{11} \Rightarrow B = \frac{31}{11}$$

Entonces

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{5x - 7}{(x^2 + 2)(x - 3)} dx = \int \left(\frac{Ax + B}{(x^2 + 2)} + \frac{C}{(x - 3)} \right) dx = I \\ &= \int \left(\frac{-\frac{8}{11}x + \frac{31}{11}}{(x^2 + 2)} + \frac{\frac{8}{11}}{(x - 3)} \right) dx = \\ I &= \frac{1}{11} \left[\int \frac{-8x + 31}{(x^2 + 2)} dx + \int \frac{8}{(x - 3)} dx \right] \\ I &= \frac{1}{11} \left[-8 \int \frac{x}{(x^2 + 2)} dx + 31 \int \frac{1}{(x^2 + 2)} dx + 8 \int \frac{1}{(x - 3)} dx \right] \\ &= \frac{1}{11} [-8I_a + 31I_b + 8I_c] \end{aligned}$$

Calculando cada integral por separado

$$I_a = \int \frac{x}{(x^2 + 2)} dx \text{ Por cambio de variables simple}$$

$$x^2 + 2 = w \Rightarrow 2x dx = dw \Rightarrow x dx = \frac{dw}{2}$$

$$I_a = \int \frac{x}{(x^2 + 2)} dx = \int \frac{\frac{dw}{2}}{w} = \frac{1}{2} \int \frac{dw}{w} = \frac{1}{2} \ln|w| + C$$

Regresando el cambio

$$I_a = \frac{1}{2} \ln|x^2 + 2| + C$$

$$I_b = \int \frac{1}{(x^2 + 2)} dx \text{ Por cambio de variable trigonométrica con el cambio recomendado}$$

$$x = \sqrt{2} \operatorname{Tg} \theta \Rightarrow dx = \sqrt{2} \operatorname{Sec}^2 \theta d\theta$$

$$\begin{aligned}
 I_b &= \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta \, d\theta}{(\sqrt{2}\operatorname{Tg}\theta)^2 + 2} = \int \frac{\sqrt{2}\sec^2\theta}{2\operatorname{Tg}^2\theta + 2} d\theta \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\sec^2\theta}{\operatorname{Tg}^2\theta + 1} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \int \frac{\sec^2\theta}{\sec^2\theta} d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \int d\theta \\
 I_b &= \frac{\sqrt{2}}{2} \theta + C
 \end{aligned}$$

Regresando el cambio:

$$I_b = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Tg}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C = \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Arc} \operatorname{Tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$I_c = \int \frac{1}{(x-3)} dx$ Por cambio de variables simple

$$x - 3 = z \Rightarrow dx = dz$$

$$I_c = \int \frac{1}{(x-3)} dx = \int \frac{dz}{z} = \operatorname{Ln}|z| + C$$

Regresando el cambio

$$I_c = \operatorname{Ln}|x - 3| + C$$

Finalmente reunimos los valores obtenidos:

$$I = \frac{1}{11} \left[-4\operatorname{Ln}|x^2 + 2| + 31 \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{Tg}^{-1}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + 8\operatorname{Ln}|x - 3| \right] + C$$

7.- $I = \int \frac{1}{9x^4 + x^2} dx$ Factorizando el Denominador.
 $9x^4 + x^2 = x^2(9x^2 + 1)$

Luego la expresión a integral se puede expresar como

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{9x^4 + x^2} &= \frac{1}{x^2(9x^2 + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{(9x^2 + 1)} \\
 &= \frac{Ax(9x^2 + 1) + B(9x^2 + 1) + (Cx + D)x^2}{x^2(9x^2 + 1)}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos señalar que:

$$1 = 9Ax^3 + Ax + 9Bx^2 + B + Cx^3 + Dx^2$$

Por factor común se tiene: $1 = (9A + C)x^3 + (9B + D)x^2 + Ax + B$

Formando el sistema de ecuación por comparación de términos semejantes en la igualdad

$$\begin{cases} 9A + C = 0 \\ 9B + D = 0 \\ A = 0 \\ B = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} C = 0 \\ D = -9 \end{matrix}$$

Entonces

$$I = \int \frac{1}{9x^4 + x^2} dx = \int \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{(9x^2 + 1)} \right) dx = \int \left(\frac{0}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{(0)x - 9}{(9x^2 + 1)} \right) dx$$

$$I = \int \frac{dx}{x^2} - 9 \int \frac{dx}{(9x^2 + 1)} = I_1 - 9I_2$$

Donde

$$I_1 = \int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} dx \quad \text{por tabla} \quad I_1 = \frac{x^{-1}}{-1} + C \Rightarrow I_1 = -\frac{1}{x} + C$$

$$I_2 = \int \frac{dx}{(9x^2 + 1)} \quad \text{por cambio Trigonometricos } x = \frac{1}{3} Tg \theta \Rightarrow dx = \frac{1}{3} Sec^2 \theta d\theta$$

$$I_2 = \int \frac{\frac{1}{3} Sec^2 \theta d\theta}{9 \left(\frac{1}{3} Tg \theta \right)^2 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{Sec^2 \theta d\theta}{9 \frac{1}{9} Tg^2 \theta + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{Sec^2 \theta d\theta}{Tg^2 \theta + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{Sec^2 \theta d\theta}{Sec^2 \theta}$$

$$I_2 = \frac{1}{3} \int d\theta = \frac{1}{3} \theta + C \Rightarrow I_2 = \frac{1}{3} Arc Tg(3x) + C = \frac{1}{3} Tg^{-1}(3x) + C$$

Finalmente reuniendo los valores obtenidos.

$$I = I_1 - 9I_2 = -\frac{1}{x} - 9 \frac{1}{3} Tg^{-1}(3x) + C = -\frac{1}{x} - 3 Tg^{-1}(3x) + C$$

Autoevaluación

Resuelva paso a paso las siguientes integrales usada el método de fracciones parciales o simples, señale las operaciones, simplificaciones que

realice y las fórmulas de integración (tabla), explicando con sus palabras las propiedades o formula usada.

$$01.- \quad I = \int \frac{1}{x^2 + 7x + 6} dx$$

$$02.- \quad I = \int \frac{x^2 - 3x - 1}{x^3 + x^2 - 2x} dx$$

$$03.- \quad I = \int \frac{x}{x^2 - 3x - 4} dx$$

$$04.- \quad I = \int \frac{1}{x^2 - 9} dx$$

$$05.- \quad I = \int \frac{x^3}{x^3 - 1} dx$$

$$06.- \quad I = \int \frac{2x^3}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$07.- \quad I = \int \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4x + 4} dx$$

$$08.- \quad I = \int \frac{x + 1}{x^3 + x^2 - 6x} dx$$

$$09.- \quad I = \int \frac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

$$10.- \quad I = \int \frac{x^4 + 8x^3 - x^2 + 2x + 1}{(x^2 + 3)(x^3 + 1)} dx$$

Funciones hiperbólica

Las funciones hiperbólicas son aquellas cuyas definiciones están basadas en la función exponencial donde aparecen como operaciones racionales y son semejantes a las funciones trigonométricas. Como sugiere el nombre, el gráfico de una función hiperbólica representa una hipérbola rectangular, y su fórmula suele verse en las fórmulas de una hipérbola. Se definen utilizando una hipérbola en lugar de un círculo unitario como en el caso de la trigonometría. Las funciones hiperbólicas son análogas a las funciones trigonométricas, pero se derivan de una hipérbola, al igual que las funciones trigonométricas se derivan de un círculo unitario.

Las funciones hiperbólicas se expresan en términos de la función exponencial e^x . Hay seis funciones hiperbólicas: $\text{Senh } x$, $\text{Cosh } x$, $\text{Tanh } x$, $\text{CTgh } x$, $\text{Sech } x$, $\text{Csch } x$.

En la función trigonométrica ordinaria son definidas sobre un círculo unitario; una función hiperbólica se define de forma similar para una hipérbola unitaria. Para la trigonometría ordinaria, son usadas el Seno ,

Coseno y otras funciones. Para las funciones hiperbólicas, usamos Senh , Cosh , Tanh , CTgh , Sech y Csch .

De igual manera en la función trigonométrica ordinaria, las coordenadas de los puntos en el círculo unitario son $(\text{Cos } \theta, \text{Sen } \theta)$, similarmente en las funciones hiperbólicas, $(\text{Cosh } \theta, \text{Senh } \theta)$ forma la mitad derecha de la hipérbola equilátera.

Las funciones hiperbólicas básicas son:

❖ Seno hiperbólico " sinh " ❖ Coseno hiperbólico " cosh "

Que origina las funciones

Tangente hiperbólica " tanh " Cosecante hiperbólica " csch " o " cosech ".
secante hiperbólica " sech " Cotangente hiperbólica " coth "

Significado hiperbólico

Las funciones hiperbólicas se definen de forma semejante a las funciones trigonométricas. Tenemos seis funciones hiperbólicas principales, a saber, $\text{Senh } x$, $\text{Cosh } x$, $\text{Tanh } x$, $\text{CTgh } x$, $\text{Sech } x$ y $\text{Cosech } x$. Se pueden expresar como una combinación de la función exponencial. Estas funciones se derivan utilizando la hipérbola, al igual que las funciones trigonométricas se derivan utilizando el círculo unitario.

Fórmulas de funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas se definen mediante expresiones algebraicas que incluyen la función exponencial (e^x) y sus funciones exponenciales inversas (e^{-x}), donde e es la constante de Euler, donde:

✓ $\text{Sinh } (x)$: Esta es la parte impar de las funciones exponenciales. La expresión hiperbólica es:

$$\text{Senh}(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)$$

✓ Cosh x: Esta es la parte par de la función exponencial. La expresión hiperbólica es:

$$\text{Cosh}(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)$$

✓ Tanh x:

$$\text{Tanh}(x) = \frac{\text{Senh}(x)}{\text{Cosh}(x)} = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \right)$$

✓ Coth x:

$$\text{CTgh}(x) = \text{CTanh}(x) = \frac{1}{\text{Tanh}(x)} = \frac{\text{Cosh}(x)}{\text{Senh}(x)} = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \right)$$

✓ Sech x:

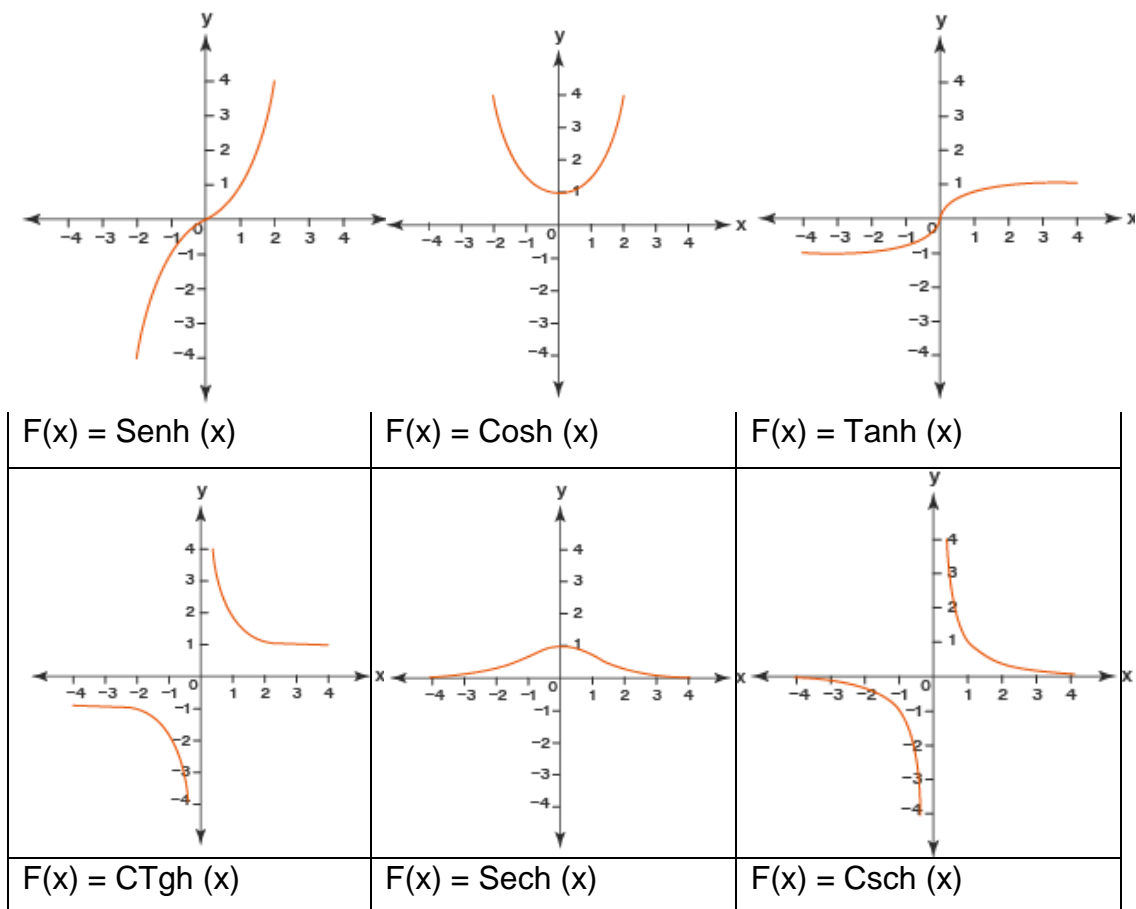
$$\text{Sech}(x) = \frac{1}{\text{Cosh}(x)} = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}} \right)$$

✓ Csch x:

$$\text{Csch}(x) = \frac{1}{\text{Senh}(x)} = \left(\frac{2}{e^x - e^{-x}} \right)$$

Gráficas de funciones hiperbólicas

La gráfica de una función hiperbólica, representa una hipérbola rectangular. A continuación se muestra un cuadro de gráficos de diferentes funciones hiperbólicas:



Identidades trigonométricas hiperbólicas

Las identidades trigonométricas hiperbólicas son similares a las identidades trigonométricas. La regla de Osborn establece que las identidades trigonométricas se pueden convertir en identidades trigonométricas hiperbólicas cuando se desarrollan completamente en términos de potencias integrales de senos y cosenos, lo que incluye cambiar seno a sinh y coseno a cosh. Se debe reemplazar el signo de cada término que contenga un producto de dos senos.

$$\text{Senh}(\alpha) - \text{Senh}(\beta) = 2\text{Cosh}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\text{Senh}\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{Senh}(\alpha) - \operatorname{Senh}(\beta) = 2\operatorname{Senh}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\operatorname{Cosh}\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{Cosh}(\alpha) + \operatorname{Cosh}(\beta) = 2\operatorname{Cosh}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\operatorname{Cosh}\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right)$$

$$\operatorname{Cosh}(\alpha) - \operatorname{Cosh}(\beta) = 2\operatorname{Senh}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\operatorname{Senh}\left(\frac{\alpha\beta}{2}\right)$$

$$2\operatorname{Cosh}(\alpha)\operatorname{Senh}(\beta) = \operatorname{Senh}(\alpha + \beta) - \operatorname{Senh}(\alpha - \beta)$$

$$2\operatorname{Senh}(\alpha)\operatorname{Senh}(\beta) = \operatorname{Cosh}(\alpha + \beta) - \operatorname{Cosh}(\alpha - \beta)$$

$$2\operatorname{Cosh}(\alpha)\operatorname{Cosh}(\beta) = \operatorname{Cosh}(\alpha + \beta) + \operatorname{Cosh}(\alpha - \beta)$$

$$\operatorname{Senh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{Senh}(\alpha)\operatorname{Cosh}(\beta) \pm \operatorname{Cosh}(\alpha)\operatorname{Senh}(\beta)$$

$$\operatorname{Cosh}(\alpha \pm \beta) = \operatorname{Cosh}(\alpha)\operatorname{Cosh}(\beta) \pm \operatorname{Senh}(\alpha)\operatorname{Senh}(\beta)$$

$$\operatorname{Tanh}(\alpha \pm \beta) = \frac{(\operatorname{Tanh}(\alpha) \pm \operatorname{Tanh}(\beta))}{(1 \pm \operatorname{Tanh}(\alpha)\operatorname{Tanh}(\beta))}$$

$$\operatorname{CTgh}(\alpha \pm \beta) = \frac{(\operatorname{CTgh}(\alpha)\operatorname{CTgh}(\beta) \pm 1)}{(\operatorname{CTgh}(\beta) \pm \operatorname{CTgh}(\alpha))}$$

$$\operatorname{Cosh}^2(\alpha) - \operatorname{Senh}^2(\alpha) = 1$$

$$\operatorname{Tanh}^2(\alpha) + \operatorname{Sech}^2(\alpha) = 1$$

$$\operatorname{CTgh}^2(\alpha) + \operatorname{Csch}^2(\alpha) = 1$$

Integrales y derivadas de funciones hiperbólicas

La derivada e integral de una función hiperbólica son similares a la derivada e integral de una función trigonométrica. A diferencia de la derivada de las funciones trigonométricas, el cambio de signo en la derivada de la función secante hiperbólica. Las integrales de las funciones hiperbólicas fueron señaladas en la tabla de integrales Funciones hiperbólicas inversas

La inversa de una función hiperbólica se denomina función hiperbólica inversa. Por ejemplo, si $x = \sinh y$, entonces $y = \sinh^{-1} x$ es la inversa de la función seno hiperbólica. Las funciones hiperbólicas inversas expresadas en términos de funciones logarítmicas se muestran a continuación:

$$\operatorname{Senh}^{-1}(x) = \operatorname{Ln}\left(x + \sqrt{(x^2 + 1)}\right) \quad \operatorname{Cosh}^{-1}(x) = \operatorname{Ln}\left(x + \sqrt{(x^2 - 1)}\right)$$

$$\operatorname{Tanh}^{-1}(x) = \operatorname{Ln}\left(\frac{(1 + x)}{(1 - x)}\right) \quad \operatorname{CTg}^{-1}(x) = \operatorname{Ln}\left(\frac{(x + 1)}{(x - 1)}\right)$$

$$\operatorname{Sech}^{-1}(x) = \operatorname{Ln}\left[\frac{1 + \sqrt{(1 - x^2)}}{x}\right] \quad \operatorname{Csch}^{-1}(x) = \operatorname{Ln}\left[\frac{1 + \sqrt{(1 + x^2)}}{x}\right]$$

Ejemplo de resolución de integrales hiperbólicas

Par realizar una integral hiperbólica se debe resolver mediante su equivalente exponencial o logarítmico; luego de obtener el resultado simplificado tratar de escribirlo como hiperbólico. Por ejemplo

$$01 \quad \text{Realizar} \quad I = \int \operatorname{Senh}\left(\frac{x}{3}\right) dx$$

Por cambio de variable se tiene

$$p = \frac{x}{3} \quad \text{diferenciando} \quad \rightarrow \quad dp = \frac{dx}{3} \quad \Rightarrow \quad dx = 3dp$$

Por lo tanto la integral nos queda transformando por su equivalente exponencial y por tabla

$$I = 3 \int \operatorname{Senh}(p) dp = 3 \int \left(\frac{e^p - e^{-p}}{2}\right) dp = \frac{3}{2} \left[\int e^p dp - \int e^{-p} dp \right]$$

$$I = \frac{3}{2}(e^p + e^{-p}) + C = 3 \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2}\right) + C = 3\operatorname{Cosh}(p) * C$$

Finalmente regresamos el cambio

$$I = 3\operatorname{Cosh}\left(\frac{x}{3}\right) * C$$

02 Realizar

$$I = \int \text{Cosh}(4x) dx$$

Por cambio de variable se tiene

$$p = 4x \xrightarrow{\text{diferenciando}} dp = 4dx \Rightarrow dx = \frac{1}{4} dp$$

Por lo tanto la integral nos queda transformando por su equivalente exponencial y por tabla

$$I = \frac{1}{4} \int \text{Cosh}(p) dp = \frac{1}{4} \int \left(\frac{e^p + e^{-p}}{2} \right) dp = \frac{1}{8} \left[\int e^p dp + \int e^{-p} dp \right]$$

$$I = \frac{1}{8} (e^p - e^{-p}) + C = \frac{1}{4} \left(\frac{e^p - e^{-p}}{2} \right) + C = \frac{1}{4} \text{Senh}(p) * C$$

Finalmente regresamos el cambio

$$I = \frac{1}{4} \text{Cosh}(4x) * C$$

03 Realizar

$$I = \int \text{Sech}^2 \left(\frac{2}{3}x + 4 \right) dx$$

Por cambio de variable se tiene

$$p = \frac{2}{3}x + 4 \xrightarrow{\text{diferenciando}} dp = \frac{2}{3}dx \Rightarrow dx = \frac{3}{2} dp$$

Por lo tanto la integral nos queda transformando por su equivalente exponencial y por tabla

$$I = \frac{3}{2} \int \text{Sech}^2(p) dp$$

Empleando la tabla que nos dice $\int \text{Sech}^2(v) dv = \text{Tanh}(v) + C$

$$I = \frac{3}{2} \text{Tanh}(p) + C$$

Finalmente regresando el cambio

$$I = \frac{3}{2} \text{Tanh} \left(\frac{2}{3}x + 4 \right) + C$$

Autoevaluación

Realice las siguientes integrales hiperbólicas, señalando los pasos y propiedades:

01 $I = \int \operatorname{Senh}(x - 8) dx$

02 $I = \int \operatorname{CTgh}(2x + 3) dx$

03 $I = \int \operatorname{Cosh}(5x + \pi) dx$

04 $I = \int \operatorname{Cch}(x - 3) dx$

05 $I = \int \operatorname{Cos}^2(4x + 1) dx$

06 $I = \int \operatorname{Sech}\left(3x - \frac{5}{2}\right) dx$

07 $I = \int \operatorname{Tanh}^2(4x + 1) dx$

08 $I = \int \operatorname{Senh}^2\left(\frac{x}{2} + 3\right) dx$

09 $I = \int \operatorname{Csch}(x - 2)\operatorname{CTg}(x - 2) dx$

10 $I = \int \operatorname{Csch}^2(3x) dx$

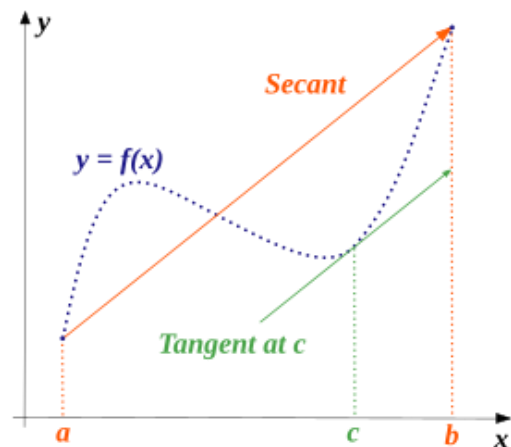
Teorema del Valor Medio en el Cálculo Integral.

El teorema de valor medio (de Lagrange), teorema de los incrementos finitos, teorema de Bonnet-Lagrange o teoría del punto medio es una propiedad de las funciones derivables en un intervalo.

De manera precisa el teorema enuncia que si f es una función continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe un punto " c " en (a, b) tal que la recta tangente en el punto " c " es paralela a la recta secante que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$, esto es

$$\exists c \in (a, b) | f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demostración



Consideramos dos puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$ que pertenecen al gráfico de la función. La ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos se expresa como:

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Se define una función auxiliar:

$$g(x) = f(x) - y = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

Dado que f es continua en $[a, b]$ y diferenciable en (a, b) entonces g también lo es. Además g satisface las condiciones del Teorema de Rolle en $[a, b]$ ya que:

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(a - a) = 0 - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(0) = 0$$

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$$

Por el Teorema de Rolle, como g es diferenciable en (a, b) , y $g(a) = g(b)$ entonces existe un punto $c \in (a, b)$ tal que $0 = g'(c) = 0$ y por tanto:

$$0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

y así

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

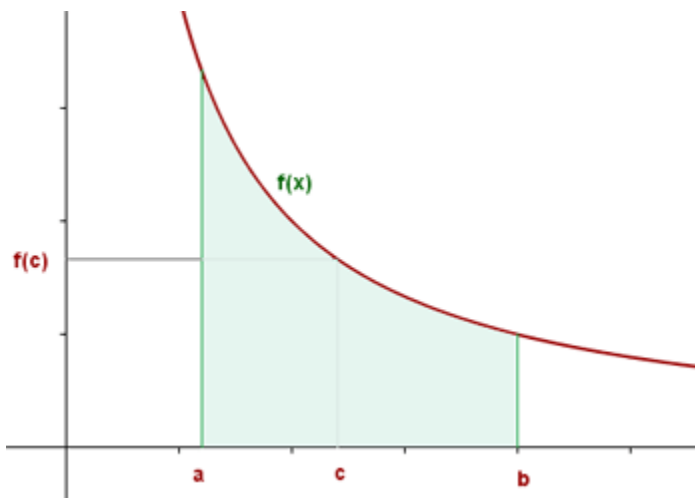
que es lo que se quería demostrar.

Nota: existe otra forma de demostración analizando la pendiente de la recta secante, la cual se la dejamos al alumno para su investigación.

El teorema del valor medio para integrales o teorema de la media dice que:

Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$, existe un punto c en el interior del intervalo tal que:

$$I = \int_a^b f(x) dx = (b - a)f(c)$$



Ejemplo de teorema del valor medio

1. Determine el valor de c , del teorema de la media, de la función

$$f(x) = 2x^2; \text{ para el intervalo } [-3, 2]$$

Solución:

Dado que la función polinómica indicada es continua en el intervalo $[-3, 2]$, podemos aplicar el teorema de la media.

$$I = \int_{-3}^2 2x^2 dx = \left. \frac{2}{3}x^3 \right|_{-3}^2 = \frac{2}{3}((2)^3 - (-3)^3) = \frac{2}{3}(8 - (-27)) = \frac{2}{3}(8 + 27)$$

$$I = \frac{2}{3}(35) = \frac{70}{3}$$

Por lo tanto

$$I = (b - a)f(c) \Rightarrow \frac{70}{3} = (2 - (-3))f(c) \Rightarrow \frac{70}{3} = (5)f(c)$$

$$f(c) = \frac{70}{15} = \frac{14}{3} \approx 4,66..$$

La solución no es válida, ya que no pertenece al intervalo señalado.

2. ¿Es aplicable el teorema del valor medio del cálculo integral a la siguiente función en el intervalo $[0, 2]$?

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

La función es continua en $[0, 2]$, se puede aplicar el teorema de la media

$$I = \int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

Por cambio de variable se resuelve y resulta

$$I = \sqrt{x^2 + 1} \Big|_0^2 = \sqrt{5} - 1$$

$$I = (b - a)f(c) \Rightarrow f(c) = \frac{\sqrt{5} - 1}{(2 - 0)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Como deseamos saber el valor de c aplicamos la formula

$$f(c) = \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}} \Rightarrow \frac{c}{\sqrt{c^2 + 1}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Despando, para ello elevamos al cuadrado ambos términos y simplificamos

$$\frac{c^2}{c^2 + 1} = \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1}{5} \Rightarrow 5c^2 = (c^2 + 1)(6 - 2\sqrt{5}) \Rightarrow 5c^2$$

$$= (c^2 + 1)(6 - 2\sqrt{5})$$

$$5c^2 = c^2(6 - 2\sqrt{5}) + 6 - 2\sqrt{5} \Rightarrow 2\sqrt{5} - 6 = c^2(6 - 2\sqrt{5}) - 5c^2$$

$$c^2(6 - 5 - 2\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 6 \Rightarrow c^2(1 - 2\sqrt{5}) = 2\sqrt{5} - 6 \Rightarrow c^2 = \frac{2\sqrt{5} - 6}{1 - 2\sqrt{5}}$$

Finalmente

$$c = \sqrt{\frac{2\sqrt{5} - 6}{1 - 2\sqrt{5}}} \approx 0,6634$$

Autoevaluación

1.- Determine el valor promedio de la función $f(x) = x^2 + 1$; en el intervalo $[-1, 2]$.

2.- Determine el punto promedio de la función $f(x) = 4x - x^2$; en el intervalo $[0, 4]$.

3.- indique el punto promedio en el intervalo $[0, 3]$. para $f(x) = 4 - x$;

4.- Determine el valor promedio de la función $f(x) = 3x^2 - 2x$; en el intervalo $[1, 4]$.

5.- Determine los números b tal que el valor promedio de la función $f(x) = 2 + 6x - 3x^2$ en el intervalo $[0, b]$ sea igual a 3.

El teorema fundamental del cálculo

Mediante la aplicación de dicho teorema podemos afirmar que la derivada es una operación inversa a la integral y viceversa. Esto significa que toda función acotada e integrable (continua o discontinua en un número finito de puntos) verifica que la derivada de su integral es igual a ella misma. Este teorema es central para el análisis matemático o cálculo infinitesimal.

El teorema fue fundamental ya que el cálculo aproximado de áreas (integrales) trabajadas desde la antigüedad (Arquímedes) estaba separado del cálculo diferencial que desarrollando por Isaac Newton, Isaac Barrow y Gottfried Leibniz para el siglo XVIII, dando lugar a conceptos como el de las derivadas. Las integrales eran investigadas como formas de estudiar áreas y volúmenes, donde ambos puntos de estudio convergieron, con su demostración el estudio del “área bajo la curva de una función” estaba íntimamente unido al cálculo diferencial, resultando la integración la operación inversa a la derivación.

“Sección“. Nótese que la aproximación al área buscada es más precisa cuanto más pequeño sea el valor de h .

Por lo tanto, se puede decir que $A(x + h) - A(x)$ es aproximadamente igual a $f(x) \cdot h$, y que la precisión de esta aproximación mejora al disminuir el valor de h . En otras palabras, $f(x) \cdot h \approx A(x + h) - A(x)$, convirtiéndose esta aproximación en igualdad cuando h tiende a 0 como límite.

Dividiendo los dos lados de la ecuación por h se obtiene

$$f(x) \approx \frac{A(x + h) - A(x)}{h}$$

Cuando h tiende a 0, se observa que el miembro derecho de la ecuación es sencillamente la derivada $A'(x)$ de la función $A(x)$ y que el miembro izquierdo se queda en $f(x)$ al ya no estar h presente

Se muestra entonces de manera informal que $f(x) = A'(x)$ es decir, que la derivada de la función de área $A'(x)$ es en realidad la función $f(x)$. Dicho de otra forma, la función de área $A(x)$ es la antiderivada de la función original.

Lo que se ha mostrado es que, intuitivamente, calcular la derivada de una función y «hallar el área» bajo su curva son operaciones «inversas», es decir, el objetivo del teorema fundamental del cálculo integral.

Enunciado de los teoremas.

- Teorema fundamental del cálculo. Sea f una función real integrable definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. Si se define F para cada x de $[a, b]$

$$F(x) = \int_a^x f(x) dx$$

Entonces $F(x)$ es continua en $[a, b]$. Si f es continua en x de $[a, b]$, entonces F es derivable en x , y $F'(x) = f(x)$

- Segundo teorema fundamental del cálculo. Sea f una función real, integrable definida en un intervalo cerrado $[a, b]$. si F es una función tal que $F'(x) = f(x)$ para todo x de $[a, b]$ (donde F es una primitiva de f), entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

- ✓ Colorarío. Si f es una función continua en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$, y F , definida por

$$F(x) = \int_a^b f(x) dx$$

Es una primitiva de f en $[a, b]$. Además,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplos del teorema fundamental del cálculo

El teorema fundamental del cálculo dice que la derivada de la integral $F(x)$ de la función continua $f(x)$ es la propia $f(x)$.

$$F'(x) = f(x)$$

El teorema fundamental del cálculo nos indica que la derivación y la integración son operaciones inversas. Al integrar una función continua y luego derivarla se recupera la función original. Por ejemplo:

1.- Hallar la derivada de

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

a) Notamos que $t = x$, por lo que su diferencial $dt = dx$

b) Aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$F'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

2.- Hallar la derivada de

$$F(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

a) Primero cambiamos los límites de integración, ello produce que la integral cambie de signo

$$F(x) = \int_x^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = - \int_1^x \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

b) Notamos que $t = x$, por lo que su diferencial $dt = dx$

c) Aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$F'(x) = - \frac{1}{x^2 + 1}$$

3.- Hallar la derivada de

$$F(x) = \int_1^{x^2} \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

a) Notamos que $t = x^2$, por lo que su diferencial $dt = 2x dx$

b) Aplicando el teorema fundamental del cálculo tenemos

$$F'(x) = - \frac{1}{(x^2)^2 + 1} \cdot 2x = \frac{2x}{x^4 + 1}$$

4.- Considérese la integral

$$F(x) = \int_0^\pi \cos(x) dx$$

Se tiene que $F(x) = \text{Sen}(x)$ pues su primitiva es $F'(x) = f(x) = \cos(x)$ por lo que

$$F(x) = \int_0^\pi \cos(x) dx = [\text{Sen}(x)]_0^\pi = \text{Sen}(\pi) - \text{Sen}(0) = 0 - 0 = 0$$

5.- Considérese la integral

$$F(x) = \int_1^e \frac{dx}{x}$$

Se tiene que $F(x) = \text{Ln}|x|$ pues $F'(x) = f(x) = \frac{1}{x}$ por lo que

$$F(x) = \int_1^e \frac{dx}{x} = [\text{Ln}|x|]_1^e = \text{Ln}(e) - \text{Ln}(1) = 1 - 0 = 1$$

Como se puede integrar inmediatamente.

Autoevaluación

. Utilice el teorema fundamental del cálculo, Hallar la derivada de las funciones

:

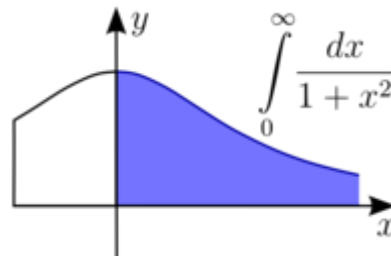
$$01 \quad F(x) = \int_0^x \sqrt{t^2 + 4} dt \quad 02 \quad F(x) = \int_0^x \frac{1}{t^3 + 1} dt$$

$$03 \quad F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \text{Sen}(t) dt \quad 04 \quad F(x) = \int_0^{x^3} \frac{1}{t^3 + 1} dt$$

$$05 \quad F(x) = \int_0^{x^3} e^{t^3} dt \quad 06 \quad F(x) = \int_0^{x^3} \text{Cos}(t) dt$$

Integrales Impropias

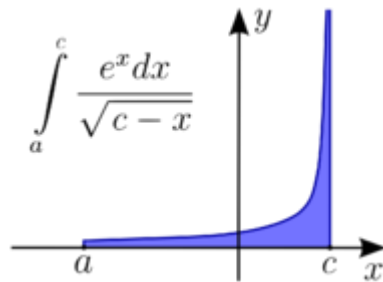
En calculo, una integral impropia de una función es el límite de una integral definida cuando uno o ambos extremos del intervalo de integración se acercan a un número que no está dentro de su dominio, a $+\infty$, o a $-\infty$. Por otro lado, una integral definida es impropia cuando la función integrando de la integral definida no es continua en todo el intervalo de integración. También se pueden dar ambas situaciones.



Punto singular en el infinito.

Dada la función $f(x)$ al ser integrada desde “a” hasta “c” posee una discontinuidad en “c”, especialmente en la forma de una asíntota vertical, o si $c = \infty$ entonces la integral

$$I = \int_a^c f(x) dx$$



Punto singular en c.

Es más conveniente reescribirla ó redefinirla de la siguiente forma:

$$I = \lim_{b \rightarrow c^-} \int_a^b f(x) dx$$

Existen casos, donde la integral desde “a” hasta “c” no está definida, puesto que las integrales de la parte positiva y negativa de $f(x)dx$ entre “a” y “c” ambas son infinitas, pero el límite puede existir. Estos casos corresponden a las llamadas "integrales impropias", es decir, aquellas cuyos valores no pueden definirse excepto como límites.

<p>La integral</p> $I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$	<p><i>puede</i> interpretarse como</p> $I = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 1}$
---	--

pero desde el punto de vista del análisis matemático no es *obligatorio* interpretarla de tal manera, ya que puede interpretarse como una integral de Lebesgue sobre el intervalo $(0, \infty)$. Además, el uso del límite de integrales definidas en intervalos finitos es útil, aunque no sea como forma de calcular su valor.

Podemos señalar como caso opuesto a la antes señalado,

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\text{Sen}(x)}{x} dx$$

no puede ser interpretada como una integral de Lebesgue, ya que

$$I = \int_0^{\infty} \left| \frac{\text{Sen}(x)}{x} \right| dx = \infty$$

Ésta es una "verdadera" integral impropia, cuyo valor está dado por

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\text{Sen}(x)}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\text{Sen}(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

Llamamos *singularidades* de una integral impropia a los puntos de la recta real extendida en los cuales debemos utilizar límites.

Tales integrales son frecuentemente escritas en forma simbólica de igual forma que una integral definida, utilizando un *infinito* como límite de integración. Esto no hace más que "ocultar" el debido proceso de calcular los límites de la integral. Utilizando la más avanzada integral de Lebesgue en lugar de una integral de Riemann, uno puede a veces evitar tal operación. Pero si solo se desea evaluar el límite para obtener un valor definido, tal mecanismo pudiera no resultar de ayuda.

Límites infinitos de integración

Las integrales impropias más básicas son integrales de la forma :

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$$

Como se señaló anteriormente éstas no necesitan ser definidas como una integral impropia, ya que pueden ser construidas como una integral de Lebesgue. Sin embargo, para propósitos de calcular esta integral, es más conveniente tratarla como un integral impropia, por ejemplo, evaluarla cuando el límite superior de integración es finito y entonces coger el límite

ya que este límite se acerca a ∞ . La primitiva de la función que está siendo integrada es $\text{ArcTan}(x)$. La integral es

$$I = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2 + 1} = \lim_{b \rightarrow \infty} [\text{ArcTan}(x)]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} [\text{ArcTan}(b) - \text{ArcTan}(0)]$$

$$I = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

por lo que el área bajo la curva nunca puede ser definida de forma verdadera.

Asíntotas verticales en los límites de integración

Consideremos:

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^{2/3}}$$

Esta función involucra una asíntota vertical en 0.

Se puede obtener el valor de esta integral evaluándola desde “b” a 1, y entonces tomando el límite como “b” tendiendo a 0. observe que la anti derivativa de esta función es

$$3x^{1/3}$$

la cual puede ser evaluada por sustitución directa para dar el valor

$$3(1 - b^{1/3})$$

el límite cuando $b \rightarrow 0$ es $3(1 - (0)^{1/3}) = 3$

Carácter y valor de las Integrales Impropias

Si la integral que nos ocupa es de fácil resolución podemos determinar su carácter mediante el cálculo de la integral impropia. Según el resultado

que obtengamos sabremos si es convergente o divergente. Primero clasifiquemos las integrales en 3 tipos:

Primera especie

Son del tipo $I = \int_a^\infty f(x)dx$ ó $I = \int_{-\infty}^b f(x)dx$

Presentan una asíntota horizontal.

Segunda especie

Son del tipo $I = \int_a^b f(x)dx$, donde $f(x)$ no está definida en todo el intervalo o los extremos de integración.

Típicamente, el integrando presenta una asíntota vertical.

Tercera especie

Son mezclas de los dos tipos anteriores, es decir, que presentan un infinito en los extremos de integración y la función se hace infinito en uno o más puntos del intervalo de integración.

Este tipo de integrales impropias se pueden dividir en suma de dos integrales: una de primera especie y otra de segunda especie. Por lo tanto deberemos seguir los pasos anteriores para determinar su carácter, y tener en cuenta que para que sea convergente tanto la integral de primera especie como la de segunda especie tienen que ser convergentes, si no, en cualquier otro caso, diverge.

Resolución de Integrales Impropias.

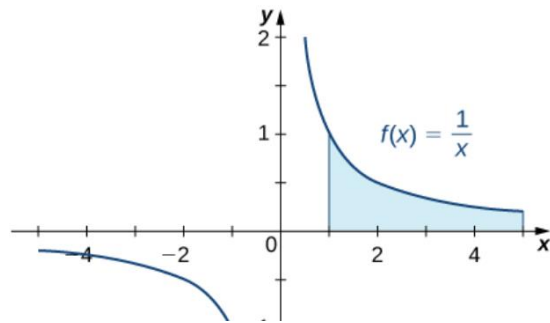
01.- Hallar el área entre el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ y el eje x en el intervalo

$[1, +\infty)$.

Solución.

Primero realizamos la gráfica de la función, donde colocamos los márgenes que abarca los límites señalados

x	.-1	1	2	3	4	5
f(x)	-1	1	1/2	1/3	1/4	1/5



Se observa en la gráfica que el área buscada se obtiene por la expresada

$$A = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x}$$

Realizando la integral como un límite.

$$A = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln|x|]_1^t$$

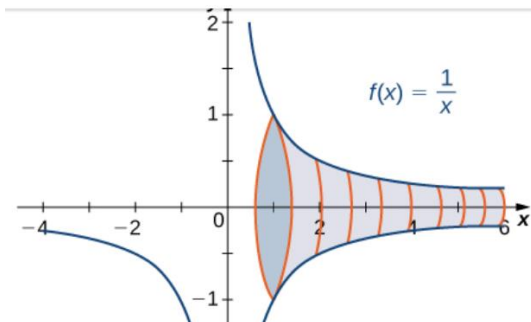
Calculando la antiderivada y evaluando

$$A = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln|t| - \ln|1|] = +\infty - 0 = +\infty$$

El área de la región es infinita. Luego la integral impropia diverge a $+\infty$

02.- Calcule el volumen del sólido obtenido cuando se gira la región delimitada por el gráfico de $f(x) = \frac{1}{x}$ y el eje x en el intervalo $[1, +\infty)$ alrededor del eje x.

Solución:



El sólido se muestra en la de la izquierda Utilizando el método del disco, vemos que el volumen V es

$$V = \pi \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx.$$

$$V = \pi \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t \frac{dx}{x^2}$$

Realizando la integral como un límite.

$$V = \pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^t$$

Calculando la antiderivada y evaluando

$$V = \pi \lim_{t \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{t} + 1 \right] = \pi$$

La integral impropia converge a π . Por lo tanto, el volumen del sólido de revolución es π .

Autoevaluación

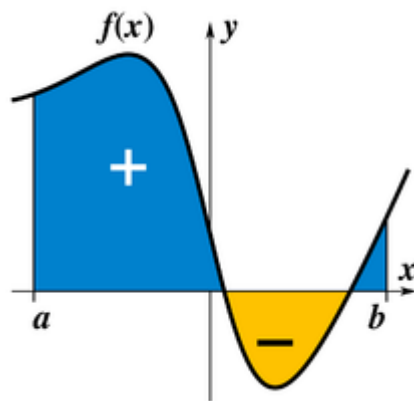
Realizar los siguientes ejercicios de integrales impropias

01	$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$	02	$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$
03	$I = \int_{-\infty}^0 e^x dx$	04	$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2 + 1} dx$
05	$I = \int_1^{\infty} \frac{x}{e^x} dx$	06	$I = \int_2^6 \frac{1}{\sqrt{x-2}} dx$
07	$I = \int_0^2 \frac{1}{x-2} dx$	08	$I = \int_0^4 \frac{1}{x-1} dx$

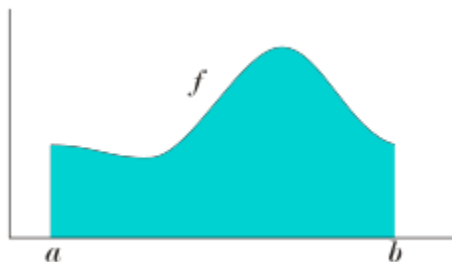
UNIDAD 2

Aplicaciones de la integral definida

Cálculo de áreas planas por integración



La integral definida de una función representa el área limitada por la gráfica de la función, en un sistema de coordenadas cartesianas con signo positivo cuando la función toma valores positivos (encima del eje de las abscisas) y signo negativo cuando toma valores negativos (debajo del eje de las abscisas).

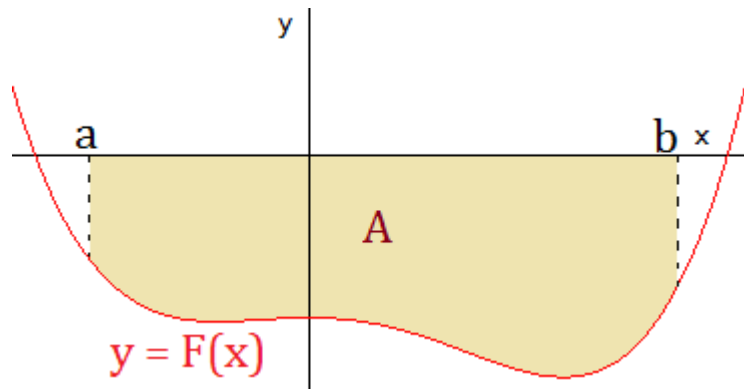


Dada una función $f(x)$ de una variable real " x " y un intervalo $[a, b]$ de la recta real, la integral es igual al área de la región del plano xy limitada entre la gráfica de $f(x)$, el eje " x ", y las líneas verticales $x = a$ y $x = b$, donde son negativas las áreas por debajo del eje " x ".

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

Región negativa

Si la región se encuentra en el semiplano inferior $f(x) \leq 0$, entonces, la integral sigue siendo el área de la región, pero con signo negativo:

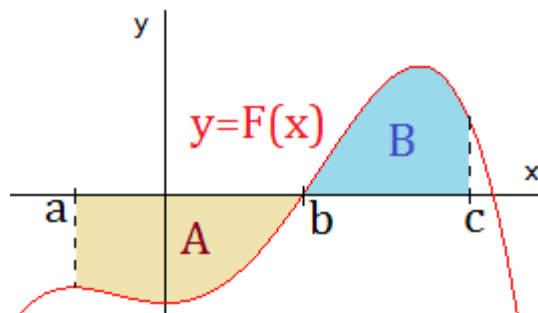


Luego, el área es el valor absoluto de la integral:

$$A = \left| \int_a^b f(x) dx \right|$$

Región negativa y positiva

Si la región se encuentra dividida por el eje de las abscisas, para calcular el área se debe calcular una integral definida para cada región.



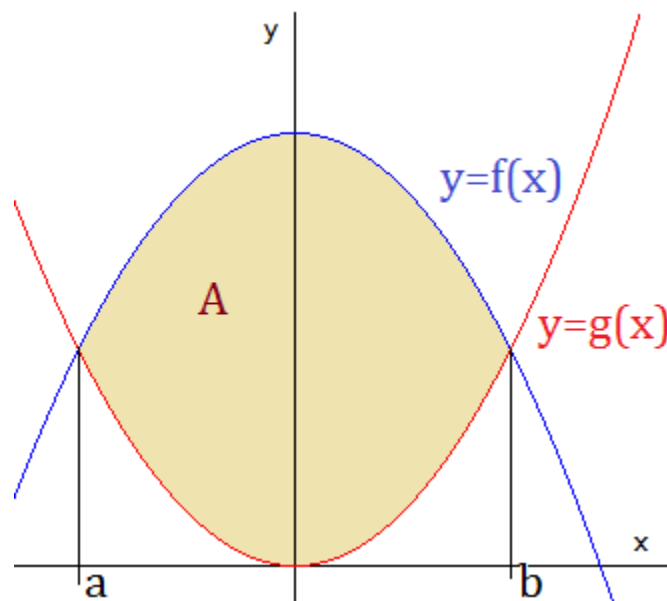
En las regiones de la parte superior, el resultado es positivo. En las de la parte inferior, es negativo.

En el caso representado en la gráfica superior, el área de la región es

$$A + B = \left[\int_a^b f(x) dx \right] + \int_b^c f(x) dx$$

Si no se calculan las integrales por separado, el resultado de la integral es menor o igual que el área, puesto que estamos sumando áreas positivas y negativas.

Área entre dos gráficas



El área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ viene dada por la integral de la resta de las funciones:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

Nota: Observad que la integral anterior es la resta de las áreas que encierran, por separado, ambas gráficas con el eje de abscisas:

Debemos tener en consideración:

- ❖ El integrando debe ser la función cuya gráfica está arriba menos la función cuya gráfica está debajo.
- ❖ Cuando la región este dividida por el eje de las abscisas o bajo dicho eje, debemos aplicar lo señalado.
- ❖ Los límites de la integral son los puntos donde las gráficas se intersectan.

Ejercicios de Áreas de Funciones.

El uso de funciones matemáticas nos modela diversos eventos de estudios en diferentes disciplinas del desarrollo científico tecnológico de la humanidad los siguientes ejemplos nos permite comprender como hallar el áreas bajo curvas de funciones.

El cálculo integral se emplea para determinar el área bajo una curva de función

01.- Calcular el área del recinto limitado por la curva $y = -x^2 + 4x$ y el eje $0x$.

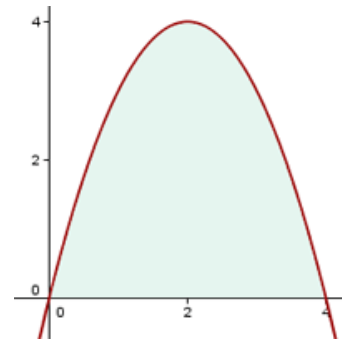
Solución

Iniciamos con la determinación de los puntos de corte con el eje $0x$, luego realizamos la representación de la curva, donde obtenemos los límites de integración.

Por la ecuación factorizamos

$$\begin{aligned}
 -x^2 + 4x = 0 &\Rightarrow x(-x + 4) = 0 \\
 &\Rightarrow x = 0 \\
 &\quad x = 4
 \end{aligned}$$

Ahora procedemos a calcular la integral:



$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^4 (-x^2 + 4x) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 \right) \Big|_0^4 \\
 &= \left(-\frac{(4)^3}{3} + 2(4)^2 \right) - \left(-\frac{(0)^3}{3} + 2(0)^2 \right) \\
 A &= \left(-\frac{64}{3} + 32 \right) - (-0 + 0) = \left(\frac{96 - 64}{3} \right) = \frac{32}{3}
 \end{aligned}$$

Finalmente el área es:

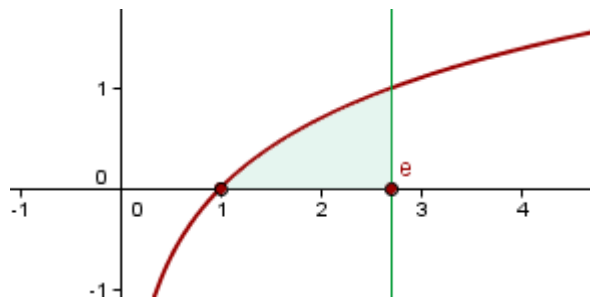
$$A = \frac{32}{3} u^2$$

02.- Hallar el área de la región del plano encerrada por la curva $y = \ln x$ entre el punto de corte con el eje Ox y el punto de abscisa $x = e$.

Solución

Iniciamos calculado el punto de corte con el eje de abscisas.

$$\ln x = 0 \Rightarrow e^0 = 1 \text{ por lo tanto el punto } A(1,0)$$



Procedemos a calcular el área mediante la expresión

$$A = \int_1^e \ln x dx$$

Esta integral se resuelve mediante el método de integración por partes

$$\begin{array}{l}
 u = \ln x \quad \text{Derivando} \quad du = \frac{1}{x} \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \rightarrow \\
 dv = dx \quad \text{integrando} \quad v = x \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \rightarrow
 \end{array}$$

Aplicando la fórmula de integración por partes se tiene

$$I = uv - \int v du \Rightarrow I = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx \Rightarrow I = x \ln x - \int dx$$

$$= x \ln x - x$$

Por lo tanto nuestra area será:

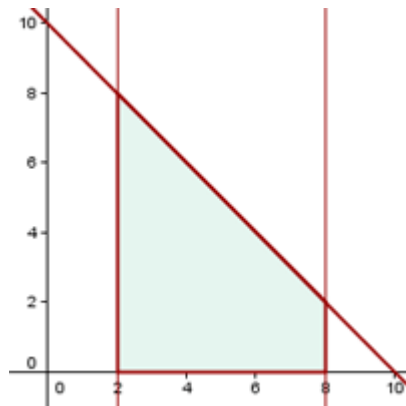
$$A = \int_1^e \ln x dx = (x \ln x - x) \Big|_1^e = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1)$$

$$A = (e - e) - (0 - 1)$$

$$A = 1 u^2$$

03.- Hallar el área limitada por la recta $x + y = 10$, el eje px y las ordenadas de $x = 2$ y $x = 8$.

Solución



Para determinar el área aplicamos la formula e integramos por tabla

$$A = \int_2^8 (10 - x) dx = \left(10x - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^8 = \left(10(8) - \frac{(8)^2}{2} \right) - \left(10(2) - \frac{(2)^2}{2} \right)$$

$$A = (80 - 32) - (20 - 2) = 48 - 18 = 30u^2$$

04.- Encuentra el área entre la curva $f(x) = e^x$ y la curva $g(x) = e^{-x}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

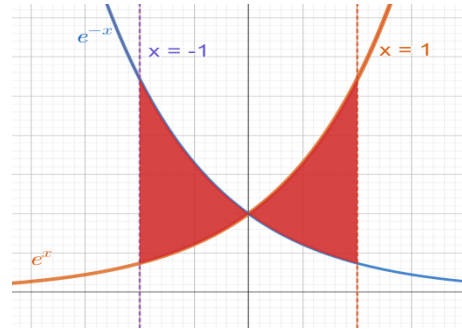
Solución

Iniciamos analizado los puntos de intersección de dichas curvas. Notemos que en los puntos $x = 1$ y $x = -1$, la función posee las siguientes imágenes

$$f(-1) = e^{-1} \approx 0,3679 \quad g(1) = e^1 \approx 2,7183$$

$$f(1) = e^1 \approx 2,7183 \quad g(1) = e^{-1} \approx 0,3679$$

Podemos asegurar que $f(x) = g(-x)$ para todo "x", observe que, $f(0) = g(0) = 1$. Luego, para calcular el área, debemos separar la integral en este punto, donde se encuentra el cambio de la función dominante (la que tiene el valor más grande).



Como notamos anteriormente, $e^{-x} \geq e^x$ en el intervalo $[-1, 0]$, pero luego $e^x \geq e^{-x}$ en el intervalo $[0, 1]$. Por lo tanto, el área entre las curvas es

$$A_t = A_1 + A_2 \int_{-1}^0 (e^{-x} - e^x) dx + \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx =$$

$$A_t = (-e^{-x} - e^x) \Big|_{-1}^0 + (e^x + e^{-x}) \Big|_0^1$$

$$A_t = [(-e^0 - e^0) - (-e^1 - e^{-1})] + [(e^1 + e^{-1}) - (e^0 + e^0)]$$

$$A_t = [(-1 - 1) - (-e - e^{-1})] + [(e + e^{-1}) - (1 + 1)]$$

$$A_t = -2 + e + e^{-1} + e + e^{-1} - 2 = -4 + 2e + 2e^{-1} \approx 2,17$$

05.- Encuentra el área entre la curva $f(x) = \text{Cos}(x)$ y la curva $g(x) = \text{Sen}(x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solución

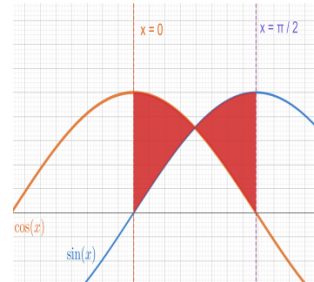
Iniciamos analizado los puntos de intersección de dichas curvas.

Observe que en los puntos $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$, tenemos

$$f(0) = \text{Cos}(0) \approx 1 \quad g(0) = \text{Sen}(0) \approx 0$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 0 \quad g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) \approx 1$$

Además en $x = \frac{\pi}{4}$ tenemos $\text{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \text{Cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Entonces, el área bajo la curva es la integral de $f(x) - g(x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ más la integral de $g(x) - f(x)$ en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$:



$$A_t = A_1 + A_2 \int_0^{\pi/4} (\text{Cos}(x) - \text{Sen}(x)) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\text{Sen}(x) - \text{Cos}(x)) dx =$$

$$A_t = (\text{Sen}(x) + \text{Cos}(x)) \Big|_0^{\pi/4} + (-\text{Cos}(x) - \text{Sen}(x)) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2}$$

$$A_t = \left[\left(\text{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \text{Cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right) - (\text{Sen}(0) + \text{Cos}(0)) \right] + \left[(-\text{Cos}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \text{Sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)) - (-\text{Cos}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \text{Sen}\left(\frac{\pi}{4}\right)) \right]$$

$$A_t = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - (0 + 1) \right] + \left[(0 - 1) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right]$$

$$A_t = \sqrt{2} - 1 - 1 + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 = 2(\sqrt{2} - 1)$$

Autoevaluación

01.- Calcular el área limitada por la curva $y = -3x^3 + 6x^2$ y el eje de abscisas.

02.- Calcular el área de las regiones del plano limitada por la curva $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$ y el eje

03.- Calcular el área del círculo de radio r

04.- Hallar el área de una elipse de semiejes a y b

05.- Calcular el área limitada por la curva $y = x^2 - 5x + 6$ y la $y = 2x$.

06.- Calcular el área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $y = x$

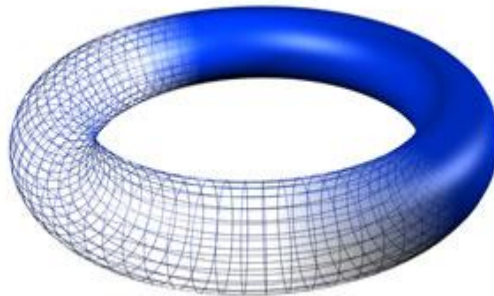
07.- Calcular el área limitada por las gráficas de las funciones $3y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$

08.- Calcula el área de la figura plana limitada por las parábolas $y = x^2 - 2x$, e $y = -x^2 + 4x$

09.- Encuentra el área entre la curva $f(x) = e^x$ y la curva $g(x) = e + 1 - x$ en el intervalo $[0, 1]$.

10.- Encuentra el área entre la curva $f(x) = \frac{1}{x}$ y la curva $g(x) = 2x$ en el intervalo $[1, 2]$.

Sólido de revolución



Un volumen con forma de toro se obtiene por la rotación de un círculo

Un sólido de revolución es un cuerpo regular que puede obtenerse mediante la rotación de una curva plana alrededor de una recta que está contenida en su mismo plano. Dicha recta llamada eje de revolución. La superficie creada por esta rotación y que encierra el sólido se denomina superficie de revolución.

Cualquier sólido con simetría axial o cilíndrica es un sólido de revolución.

Rotaciones alrededor de los ejes cartesianos

El volumen de los sólidos generados por revolución alrededor de los ejes cartesianos, pueden obtenerse mediante las ecuaciones cuadráticas siguientes.

Rotación paralela al eje de abscisas 0x.

El volumen de un sólido generado por el giro de un área comprendida entre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ definidas en un intervalo $[a, b]$ alrededor de un eje horizontal, o sea, una recta paralela al eje $0x$ de expresión $y = k$ siendo k constante, viene dado por la siguiente fórmula genérica:

$$V = \pi \int_a^b ([f(x) - k]^2 - [g(x) - k]^2) dx$$

En particular, si se gira una figura plana comprendida entre $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje $0x$, el volumen del sólido de revolución viene generado por la fórmula:

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

Método de discos.

Ambas expresiones se deducen de que al girar un área formada por infinitos rectángulos de base dx y altura $f(x)$, alrededor del eje $0x$, se forman discos colocados verticalmente cuyos volúmenes sumados resultan en el volumen de todo el sólido.

Cada disco tiene por volumen el de un cilindro parecido a una moneda colocada verticalmente, ó sea, $V = \pi r^2 h$ donde el radio de la base del cilindro es $f(x)$, y la altura del cilindro es dx , por lo que el volumen del cilindro resulta ser $dV = \pi f^2(x) dx$ y la suma de todos estos volúmenes parciales, es el volumen total que resulta en la expresión:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

- Si son dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, el volumen total será la resta del volumen mayor R menos el volumen menor r tal que

$$V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx$$

- Si el giro es alrededor de una recta paralela al eje Ox : $y = K$, entonces la expresión resultante es (siempre que $K < x$ en para todo x):

$$V = \pi \int_a^b ([f(x) - k]^2 - [g(x) - K]^2) dx$$

- Por último, en el caso en el que $K > x$, es decir la recta $y = K$ que se encuentre debajo de las funciones, se debe aplicar:

$$V = \pi \int_a^b ([k - f(x)]^2 - [K - g(x)]^2) dx$$

Rotación paralela al eje de ordenadas

Otro método que permite la obtención de volúmenes generados por el giro de un área comprendida entre dos funciones cualesquiera, $f(x)$ y $g(x)$, en un intervalo $[a, b]$, con $f(x) > g(x)$ en el intervalo $[a, b]$. Alrededor de un eje de revolución paralelo al eje de ordenadas cuya expresión es $x = K$ siendo K constante positiva. La fórmula general del volumen de estos sólidos es:

$$V = 2\pi \int_a^b (x - k)[f(x) - g(x)] dx$$

Nótese que $x - k > 0$, por ende, esta fórmula funciona si la recta se encuentra a la izquierda de la región \mathbb{R} comprendida entre las curvas $f(x)$ y $g(x)$, para que nuestra integral sea positiva.

Esta fórmula se simplifica si giramos la figura plana comprendida entre $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ alrededor del eje Oy , ya que el volumen del sólido de revolución viene generado por:

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$$

(método de cilindros o capas)

Ejemplos de determinación de volúmenes de sólidos

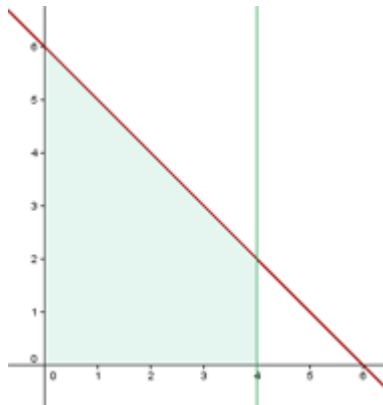
El volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la curva $f(x)$ alrededor del eje Ox y limitado por $x = a$ y $x = b$, viene dado por:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

01.- Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por la rotación alrededor Ox del área limitada por $y = 6 - x$, $y = 0$, $x = 0$, $X = 4$

Solución

Realizando la gráfica del problema



Ahora en la expresión que se emplea para hallar este tipo de volumen, sustituimos los valores dados y determinamos el volumen solicitado

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^4 [6 - x]^2 dx$$

Para resolver la integral, desarrollamos el binomio y aplicamos tablas

$$V = \pi \int_0^4 (36 - 12x + x^2) dx = \pi \left(36x - 6x^2 + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4$$

Nota: también podemos usar otro método para obtener la integral. Al tratarse de una integral definida, podemos prescindir de la constante de integración

Ahora, evaluamos en los extremos de integración y simplificamos

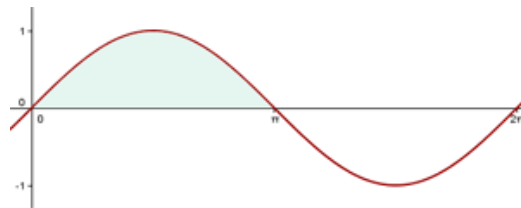
$$\begin{aligned} V &= \pi \left[\left(36(4) - 6(4)^2 + \frac{(4)^3}{3} \right) - \left(36(0) - 6(0)^2 + \frac{(0)^3}{3} \right) \right] \\ &= \pi \left(144 - 96 + \frac{64}{3} \right) \\ V &= \pi \left(\frac{144 + 64}{3} \right) = \frac{208}{3} \pi \end{aligned}$$

Finalmente el volumen es $V = \frac{208}{3} \pi u^3$

02.- Hallar el volumen engendrado por las superficies limitadas por la curva $y = \text{Sen}(x)$ y las rectas $x = 0$ y $x = \pi$, al girar en torno al eje OX

Solución

Iniciamos con la gráfica del problema



Ahora en la expresión que se emplea para hallar este tipo de volumen, sustituimos los valores dados y determinamos el volumen solicitado

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \text{Sen}^2(x) dx$$

Al resolver la integral, consideramos la identidad Trigonométrica

$$\text{Sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \text{Cos}(2x))$$

por lo que la integral se expresa

$$V = \pi \int_0^{\pi} \text{Sen}^2(x) dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \text{Cos}(2x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \text{Cos}(2x)) dx$$

Esta integral ya la hemos realizado por tabla y cambio de variable, resultando

$$V = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\text{Sen}(2x)}{2} \right) \Big|_0^{\pi}$$

Evaluamos en los valores indicados

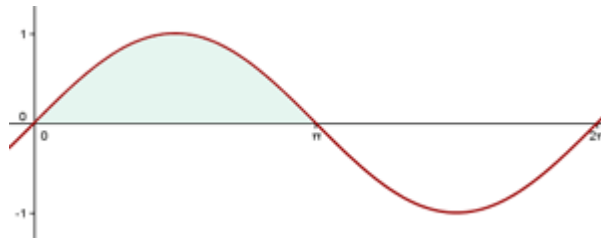
$$V = \frac{\pi}{2} \left[\left(\pi - \frac{\text{Sen}(2\pi)}{2} \right) - \left(0 - \frac{\text{Sen}(2(0))}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{2} (\pi) = \frac{\pi^2}{2}$$

Por lo tanto Luego el volumen es $V = \frac{\pi^2}{2} u^3$

03.- Calcular el volumen engendrado por una semionda de la senoide $y = \text{Sen}(x)$, al girar alrededor del eje $0x$.

Solución

Como en el ejemplo anterior su gráfica es y trabajando de manera similar



Ahora en la expresión que se emplea para hallar este tipo de volumen, sustituimos los valores dados y determinamos el volumen solicitado

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \text{Sen}^2(x) dx$$

Al resolver la integral, consideramos la identidad Trigonométrica

$$\text{Sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \text{Cos}(2x))$$

por lo que la integral se expresa

$$V = \pi \int_0^{\pi} \text{Sen}^2(x) dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1}{2}(1 - \text{Cos}(2x)) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} (1 - \text{Cos}(2x)) dx$$

Esta integral ya la hemos realizado por tabla y cambio de variable, resultando

$$V = \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{\text{Sen}(2x)}{2} \right) \Big|_0^{\pi}$$

Evaluamos en los valores indicados

$$V = \frac{\pi}{2} \left[\left(\pi - \frac{\text{Sen}(2\pi)}{2} \right) - \left(0 - \frac{\text{Sen}(2(0))}{2} \right) \right] = \frac{\pi}{2} (\pi) = \frac{\pi^2}{2}$$

Por lo tanto Luego el volumen es $V = \frac{\pi^2}{2} u^3$

04.- Hallar el volumen del cuerpo revolución engendrado al girar alrededor del eje Ox , la región determinada por la función $f(x) = \frac{1}{2} + \text{Cos}(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 0, x = \pi$

Solución

Ahora en la expresión que se emplea para hallar este tipo de volumen, sustituimos los valores dados y determinamos el volumen solicitado

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \text{Cos}(x) \right)^2 dx$$

Desarrollando eo producto notable del integrando

$$V = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{4} + \text{Cos}(x) + \text{cos}^2(x) \right) dx$$

Al resolver la integral, consideramos la identidad Trigonométrica

$$\text{Cos}^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \text{Cos}(2x))$$

por lo que la integral se expresa

$$V = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{4} + \text{Cos}(x) + \frac{1}{2} + \frac{\text{Cos}(2x)}{2} \right) dx$$

$$V = \pi \int_0^{\pi} \left(\frac{3}{4} + \cos(x) + \frac{\cos(2x)}{2} \right) dx$$

Esta integral ya la hemos realizado por tabla y cambio de variable, resultando

$$V = \pi \left(\frac{3}{4}x + 2\text{Sen}(x) + \frac{\text{Sen}(2x)}{4} \right) \Big|_0^{\pi}$$

Evaluamos en los valores indicados

$$V = \pi \left[\left(\frac{3}{4}\pi + 2\text{Sen}(\pi) + \frac{\text{Sen}(2(\pi))}{4} \right) - \left(\frac{3}{4}(0) + 2\text{Sen}(0) + \frac{\text{Sen}(2(0))}{4} \right) \right]$$

$$V = \frac{3\pi}{4}(\pi) = \frac{3\pi^2}{4}$$

Por lo tanto Luego el volumen es $V = \frac{3\pi^2}{4}u^3$

05.- Hallar el volumen engendrado por el círculo $x^2 + y^2 - 4x = -3$ al girar alrededor del eje 0x

Solución

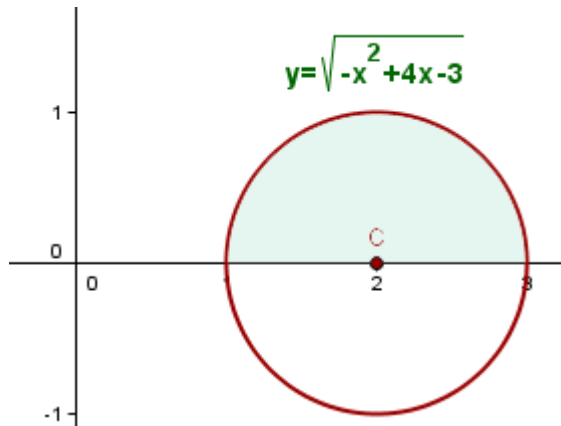
Expresamos la ecuación del círculo en su forma ordinaria para ello

$$x^2 + y^2 - 4x = -3 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = -3 + 4 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 1$$

El centro de la circunferencia es C(2, 0) y el radio r = 1. Los puntos de corte con el eje 0x son: A(1, 0); B(3, 0)

A partir de la ecuación general del círculo obtenemos la función

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y^2 = 1 - (x - 2)^2 \Rightarrow y = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$$



Sustituimos en la fórmula para encontrar el volumen

Ahora en la expresión que se emplea para hallar este tipo de volumen, sustituimos los valores dados y determinamos el volumen solicitado

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^3 (\sqrt{-x^2 + 4x - 3})^2 dx = \pi \int_1^3 (-x^2 + 4x - 3) dx$$

Desarrollamos el integrando

$$V = \pi \left(-\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x \right) \Big|_1^3$$

$$V = \pi \left[\left(-\frac{3^3}{3} + 2(3)^2 - 3(3) \right) - \left(-\frac{(1)^3}{3} + 2(1)^2 - 3(1) \right) \right]$$

$$V = \pi \left[(-9 + 18 - 9) - \left(-\frac{1}{3} + 2 - 3 \right) \right] = \pi \left[(0) - \left(-\frac{4}{3} \right) \right] = \frac{4}{3}\pi$$

Luego el volumen es

$$V = \frac{4}{3}\pi u^3$$

Autoevaluación

01.- Calcular el volumen engendrado al girar alrededor del eje 0x, limitado por las gráficas de $y = -x^2 + 3$, $y = -2x + 1$

02.- Calcular el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje Ox limitado por las gráficas de $y = x^2 - 8x$, $y = x$

03.- Calcular el volumen que engendra un triángulo de vértices $A(3, 1)$ $B(7, 2)$, $C(6, 1)$ al girar 360° alrededor del eje Ox

04.- Hallar el volumen de la figura engendrada al girar la elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ alrededor del eje Ox .

05.- Calcular el volumen del cilindro engendrado por el rectángulo limitado por las rectas $y = 3$, $x = 2$, $x = 5$, y el eje Ox al girar alrededor de este eje.

06.- Calcular el volumen de la esfera de radio $r = 3$.

07.- Calcular el volumen engendrado por la rotación del área limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 3$, alrededor del eje Oy .

08.- Hallar el volumen del elipsoide engendrado por la elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$, al girar alrededor del eje.

09.- Encuentra el volumen del sólido de revolución generado al revolucionar la función $4\sqrt{\cos(x)}$, definida en el intervalo $[0, \pi/2]$, alrededor del eje Ox .

10.- Hallar el volumen engendrado por las superficies limitadas por la curva $y = \text{Sen}(x)$ y las rectas $x = 0$, $x = \pi$, al girar en torno al eje Ox

RECURSOS INTERACTIVOS

- ❖ https://www.youtube.com/watch?v=qX_CpzfWFdo
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=a99QBkg1ylo>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=carzL5yQaKs>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=UZyG4jCBMgU>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=zCldXOtAKQo>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=93kW5colCAU>
- ❖ https://www.youtube.com/watch?v=_T7AE2KEaJY
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=or5zBGwjW2s>
- ❖ https://www.youtube.com/watch?v=qzG4_jtwcXU
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=6pFmUh41jsQ>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=nnDxN90bVUM>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=YnNqR370myg>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=k-33sj2zJqc>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=VW4ZhNrkbBE>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=ZdEfzXWusgc>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=SCKpUCax5ss>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=qFvD4ktfzk>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=3JnjuJhUxjQ>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=Fu5WGVzighw>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=kXxUIQzAA5A>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=oiaW3oLTZJg>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=K15rvmw2Wwl>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=3z1D8uSuC5U>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=7gdCygkCJgA>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=JB3Fqto7rjQ>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=94vepPBcljA>
- ❖ <https://www.youtube.com/watch?v=nQ9lemjpnys>

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Apostol, Tom M. (1960). *Análisis matemático: Introducción moderna al cálculo superior*. Reverté. [ISBN 84-291-5000-5](#).
- Sullivan, J. (2006). Polinomios y funciones racionales. Álgebra y Trigonometría. Pearson Educación 7ª edición
- <http://es.wikipedia.or>
- Rey Pastor, Julio (1985). *Análisis matemático: Teoría de ecuaciones; cálculo infinitesimal de una variable*. Kapelusz. [ISBN 950-13-3301-9](#).
- Ayres, F. (1972). Cálculo diferencial e integral. Editorial McgGhill. México
- Larson, R. (1999). Cálculo con Geometría Analítica. México. Edición 8va. Editorial Mcgrawhill.
- Leithold, L. (1994). Cálculo ec7. México. Editorial Oxford
- Granville – Calculo diferencial e integral – Editorial Limusa
- <https://jcastrom.jimdofree.com/matematica/c%C3%A1lculo-integral/integrales-impropias/>