

ESTADÍSTICA II



CARRERA:

- ADMINISTRACIÓN INDUSTRIAL
- ANÁLISIS DE SISTEMAS
- ELECTRÓNICA

SEMESTRE: TERCERO

ÍNDICE

Pág.

| | |
|--|-----------|
| INTRODUCCIÓN A LA ASIGNATURA | 03 |
| CONTENIDO PROGRAMATICO | 04 |
| UNIDAD I TEORIA DE LAS PROBABILIDADES | 06 |
| UNIDAD II VARIABLE ALEATORIA | 20 |
| UNIDAD III DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDADES | 26 |
| UNIDAD IV DISTRIBUCIÓN DE MUESTREO | 41 |
| UNIDAD V ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS | 54 |
| UNIDAD VI PRUEBA DE HIPÓTESIS | 60 |
| RECURSOS INTERACTIVOS | 71 |
| REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA | 74 |

INTRODUCCIÓN A LA ASIGNATURA

En estadística I, se presentó distribución de frecuencias como una forma útil de resumir las variaciones en los datos observados. Se explicó las tablas de distribución de frecuencias haciendo una lista de todos los resultados posibles de un experimento y, después, indicando la frecuencia observada de cada resultado posible. Fue una herramienta de cómo debemos ordenar, clasificar y evaluar los resultados de dichos experimentos, en esta guía se dará a conocer sobre aspectos relacionados con Estadística II, basado en las distribuciones de probabilidad quienes están relacionadas con las distribuciones de frecuencias.

De hecho, podemos pensar en la distribución de probabilidad como una distribución de frecuencias teóricas, debido a que estas distribuciones tratan sobre expectativas de que algo suceda, resultan ser modelos útiles para hacer inferencias y tomar decisiones en condiciones de incertidumbre. La Estadística II, se basa en determinar las diferentes maneras de obtener probabilidades de acuerdo a su población a muestra que se desea estudiar.

OBJETIVOS:

- Dotar al estudiante de los principales conceptos y teoremas de la teoría de la probabilidad que son necesarios para el estudio de la estadística.
- Proporcionar las herramientas necesarias para calcular las probabilidades, a través de variables aleatorias.
- Iniciar al estudiante en el estudio de las distribuciones probabilísticas (tanto discretas como continuas) de mayor aplicación en las distintas áreas de la carrera.

Licdo. Luis Aponte
Profesor de la Asignatura



Una Publicación de:



UNIDAD I TEORIA DE LAS PROBABILIDADES

- **Definiciones básicas**
 - Experimento aleatorio, evento o suceso
 - Espacio muestral y puntos muestrales
 - Probabilidad
- **Tipos de Eventos**
 - ✚ Para la adición
 - ✚ Para la multiplicación
- **Muestreo**
 - ✚ Con Reemplazo
 - ✚ Sin Reemplazo

UNIDAD II VARIABLE ALEATORIA

- **Definición**
 - Tipos de variables
- **Función: de Probabilidad, de Distribución, de Densidad**
- **Esperanza Matemática**
- **Desviación Típica**
- **Varianza para variables aleatorias discretas y continuas**

UNIDAD III DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDADES

- **Tipos:**
 - Bernoulli
 - Binomial
 - De Poisson
 - Normal (Gauss)
- **Valor esperado, Desviación típica y Varianza aplicada a cada distribución**

UNIDAD IV DISTRIBUCIÓN DE MUESTREO

- **Tipos:**
 - **Chi cuadrado**
 - **T – Student**
 - **F de Fisher**

UNIDAD V ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

- **Definición de Estimación**
 - **Tipos de Estimación**
- **Definición de Estimación de Parámetros**
- **Estimación Puntual y por Intervalos**
 - **Intervalos de Confianza para la Media y la Proporción**

UNIDAD VI PRUEBAS DE HIPÓTESIS

- **Definición de Hipótesis**
 - **Tipos de Hipótesis**
- **Definición de Prueba de Hipótesis**
 - **Hipótesis Nula y Estadística**
- **Errores Tipo I, II**
 - **Nivel de Significación**
- **Prueba Estadística: Prueba Estadística que involucran Medias y Varianza**

UNIDAD I TEORIA DE LAS PROBABILIDADES

PROBABILIDADES

Entre los primeros teóricos de la probabilidad se encuentran Jacob Bernoulli (1654–1705), Abraham de Moivre (1667–1754), el reverendo Thomas Bayes (1702–1761) y Joseph Lagrange (1736–hum 1813) quienes desarrollaron fórmulas y técnicas para el cálculo de la probabilidad. En el siglo XIX, Pierre Simón, Márquez de Laplace (1749–1827), unificó todas estas primeras ideas y compiló la primera teoría general de probabilidad. La teoría de probabilidad fue aplicada con éxito en las mesas de juego y, lo que es más importante en nuestro estudio, en problemas sociales y económicos, muchos centros de aprendizaje estaban estudiando la probabilidad como una herramienta para el entendimiento de los fenómenos sociales.

En la actualidad, la teoría matemática de la probabilidad es la base para las aplicaciones estadísticas tanto en investigaciones sociales como en la toma de decisiones. La probabilidad es una parte de nuestras vidas cotidianas, en la toma de decisiones personales y administrativas, nos enfrentamos a la incertidumbre y utilizamos la teoría de la probabilidad, admitamos o no el uso de algo tan complejo. Cuando escuchamos una predicción de un 70% de posibilidades de lluvia, cambiamos nuestros planes de salir de día de campo y nos quedamos en casa divirtiéndonos con juegos de mesa.

Los Administradores que se encargan del inventario de ropa de moda para mujer deben preguntarse sobre las posibilidades de que las ventas alcancen o excedan un cierto nivel. Vivimos en un mundo que es incapaz de predecir el futuro con total certidumbre. Antes de profundizar en la forma como se utilizan las probabilidades, es necesario conocer de cierta manera de donde provienen. Hay tres formas de calcular o estimar la probabilidad.

El enfoque clásico o a priori proveniente de los juegos de azar o definición clásica de Laplace que se emplea cuando los espacios muestrales son finitos y tienen resultados

igualmente probables; la definición empírica, a posteriori o frecuencia relativa de ocurrencia de un evento con respecto a un gran número de ensayos repetidos y por último. La probabilidad mide la frecuencia con que se obtiene un resultado (o conjunto de resultados) al llevar a cabo un experimento aleatorio, del que se conocen todos los resultados posibles, bajo condiciones suficientemente estables. La probabilidad es simplemente que tan posible es que ocurra un evento determinado.

Cuando no estamos seguros del resultado de un evento, podemos hablar de la probabilidad de ciertos resultados: que tan común es que ocurran.

DEFINICIONES BÁSICAS DE PROBABILIDAD:

- **Probabilidad:** Es una medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento. Por tanto, las probabilidades son una medida del grado de incertidumbre asociado con cada uno de los eventos previamente enunciados.
- **Evento:** En teoría de la probabilidad, un evento es uno o más posibles resultados de hacer algo. Por ejemplo, lanzar una moneda al aire, si cae cara es un evento, y si cae sello (cruz) es otro evento, elegir un estudiante de 100, para que responda una pregunta, cuando escuchamos las pocas gratas predicciones del índice de mortalidad en accidentes de tránsito, esperamos no ser uno de tales eventos.
- **Eventos exhaustivamente colectivos:** lista de eventos que representa todos los resultados posibles de un experimento.
- **Eventos mutuamente excluyentes:** Eventos que no se pueden presentar juntos.
- **Experimento:** En el contexto de la probabilidad, un experimento es definido como un proceso que genera resultados definidos, es la actividad que se origina de dichos eventos, como el de lanzar una moneda al aire es el experimento, lanzar un dado, determinar el número de alumnos que aprobaron estadística, etc.
- **Espacio Muestral:** Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento,

el ejemplo de lanzar una moneda, su espacio muestral se denota con la letra S, y viene siendo: $S = \{\text{cara, sello}\}$

- **Diagrama de Venn:** Representación gráfica de los conceptos de probabilidad en la que el espacio muestral está representado por un rectángulo y los eventos que suceden en el espacio muestral se representan como parte de dichos rectángulos.
- **Árbol de probabilidades:** Representación gráfica que muestra los resultados posibles de una serie de experimentos y sus respectivas probabilidades.

Tabla N°13. Ejemplo de Experimento y Espacio Muestral

| Experimento | Resultado del experimento |
|--------------------------------------|----------------------------|
| Lanzar una moneda | Cara, cruz (sello) |
| Tomar una moneda para inspeccionarla | Con defecto, sin defecto |
| Realizar una llamada de ventas | Hay compra, no hay compras |
| Lanzar un dado | 1,2,3,4,5,6 |
| Jugar un partido de futbol | Ganar, perder, empatar |

DEFINICIONES DE PROBABILIDAD CLÁSICA:

El planteamiento clásico define la probabilidad de que un evento ocurra como:

$$\text{Probabilidad de un Evento} = \frac{\text{Número de resultados en los que se presenta el evento}}{\text{Número total de resultados posibles}}$$

Ejemplo: Calcular la probabilidad de obtener cara al lanzar una moneda, aplicando la fórmula se obtiene:

$$P(\text{cara}) = \frac{1}{(1 + 1)} = \frac{\text{Número de resultados posibles en un lanzamiento en los que se presenta el evento (en este caso, el \# de resultados que producirán una cara)}}{\text{Número total de resultados posibles en un lanzamiento (una cara y un sello)}}$$

Resultado: $P(\text{cara}) = \frac{1}{2} = 0,5$

Planteamiento de frecuencia relativa:

En el siglo XIX, los estadísticos británicos, interesados en la fundamentación teórica del cálculo del riesgo de pérdidas en las pólizas de seguros de vida y comerciales, empezaron a recoger datos sobre nacimientos y defunciones. En la actualidad, a este planteamiento se le llama frecuencia relativa de presentación de un evento y define la probabilidad como: la frecuencia relativa observada de un evento durante un gran número de intentos o la fracción de veces que un evento se presenta a la larga, cuando las condiciones son estables.

Ejemplo: suponga que en una compañía de seguros sabe, por la información obtenida de los datos actuariales registrados, que los hombres de 40 años de edad, 60 de cada 100.000 morirán en un período de 1 año. Calculando la probabilidad queda determinada.

$$P (\text{muerte de 40 años}) = 60/100.000 = 0,00006$$

Planteamiento de probabilidad subjetiva:

Las probabilidades subjetivas están basadas en las creencias de las personas que efectúan la estimación de probabilidad. De hecho, la probabilidad subjetiva se puede definir como la probabilidad asignada a un evento por parte de un individuo, basada en la evidencia que se tenga disponible. Esta evidencia puede presentarse en forma de frecuencia relativa de presentación de eventos pasados, o puede tratarse simplemente de una creencia meditada.

Las asignaciones de probabilidad subjetiva se dan con más frecuencia cuando los eventos se presentan sólo una vez o un número reducido de veces. Por ejemplo, usted tiene encomendada la tarea de entrevistar y elegir a un nuevo trabajador social. Su población se ha reducidos a sólo tres personas, cada una de éstas tiene buena apariencia, alto nivel de actividad, bastante confianza en sí misma, buen registro de logros pasados y buena disposición de ánimo para enfrentar los retos que se presentan. ¿Cuáles son las posibilidades de que cada candidato se relacione exitosamente con los clientes? El

responder a esta pregunta y escoger a uno de los tres requerirá que usted asigne una probabilidad subjetiva al potencial de cada persona que solicita el puesto.

Reglas de probabilidad:

Los valores de probabilidad se encuentran en una escala de 0 a 1. Los valores cercanos a 0 indican que las posibilidades de que ocurra un evento son muy pocas. Los cercanos a 1 indican que es casi seguro que ocurra un evento. Otras probabilidades entre cero y uno representan distintos grados de posibilidad de que ocurra un evento. Por ejemplo, si considera el evento “que llueva mañana”, se entiende que si el pronóstico del tiempo dice “la probabilidad de que llueva es cercana a cero”, implica que casi no hay posibilidades de que llueva. En cambio, si informan que la probabilidad de que llueva es 0.90, sabe que es muy posible que llueva, lo cual representa un 90% de posibilidad. La probabilidad de 0,50 indica que es igual de posible que llueva como no llueva.

Probabilidad compuesta:

- ✓ Los experimentos compuestos están formados por dos o más experimentos simples.
- ✓ Utilizamos diagramas de árbol para obtener el conjunto de resultados posibles.
- ✓ La probabilidad de un camino es igual al producto de las probabilidades de las ramas de dicho camino.

Tipos de eventos o sucesos:

Sucesos independientes: extracción con devolución (con reemplazo)

Dos sucesos A y B son independientes si la realización de A no condiciona la realización del suceso B, es decir, $p(B/A) = p(B)$

$$P(A \cap B) = p(A) * p(B)$$

Sucesos dependientes: extracción sin devolución (sin reemplazo)

Dos sucesos A y B son dependientes si la realización de A condiciona la realización de B, es decir, $p(B/A) \neq p(B)$.

Ejemplo de probabilidad compuesta:

En una caja hay 5 bolas: 3 azules y 2 verdes. Se extrae una bola, se anota el color y se repite el mismo proceso otra vez. a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener 2 bolas azules? b) ¿Cuál es la probabilidad de que la 1ra sea verde y la 2da sea azul? Con devolución y sin devolución para cada alternativa.

Con Reemplazo: Sucesos independientes

- a) Probabilidad de obtener 2 bolas azules

Evento A: 1^{ra} extracción obtener bola azul

$$\rightarrow P(A) = 3/5$$

Evento B: 2^{da} extracción obtener bola azul

$$\rightarrow P(B) = 3/5$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 3/5 \cdot 3/5 = 9/25$$

- b) Probabilidad de obtener en la 1^{ra} extracción verde y 2^{da} extracción azul

Evento A: 1^{ra} extracción obtener bola verde

$$\rightarrow P(A) = 2/5$$

Evento B: 2^{da} extracción obtener bola azul

$$\rightarrow P(B) = 3/5$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 2/5 \cdot 3/5 = 6/25$$

Sin Reemplazo: Sucesos independientes

- a) Probabilidad de obtener 2 bolas azules

Evento A: 1^{ra} extracción obtener bola azul

$$\rightarrow P(A) = 3/5$$

Evento B: 2^{da} extracción obtener bola azul

$$\rightarrow P(B) = 2/4$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 3/5 \cdot 2/4 = 6/20 = 3/10$$

- b) Probabilidad de obtener en la 1^{ra} extracción verde y 2^{da} extracción azul

Evento A: 1^{ra} extracción obtener bola verde

$$\rightarrow P(A) = 2/5$$

Evento B: 2^{da} extracción obtener bola azul

$$\rightarrow P(B) = 3/4$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 2/5 \cdot 3/4 = 6/20 = 3/10$$

Sucesos mutuamente excluyentes:

Se dice que 2 eventos son mutuamente excluyentes si no tienen puntos muestrales en común. Dos o más eventos son mutuamente excluyentes o disjuntos, si no pueden ocurrir simultáneamente. Es decir, la ocurrencia de un evento impide automáticamente la ocurrencia del otro evento (o eventos).

Por ejemplo, al lanzar una moneda al aire, solo puede ocurrir que salga cara o sello, pero no los dos a la vez, es decir, sale cara, o sale sello(cruz). La intersección de dos o más sucesos mutuamente excluyentes, es el conjunto vacío, $A \cap B = \emptyset$

Ley de adición para eventos mutuamente excluyentes:

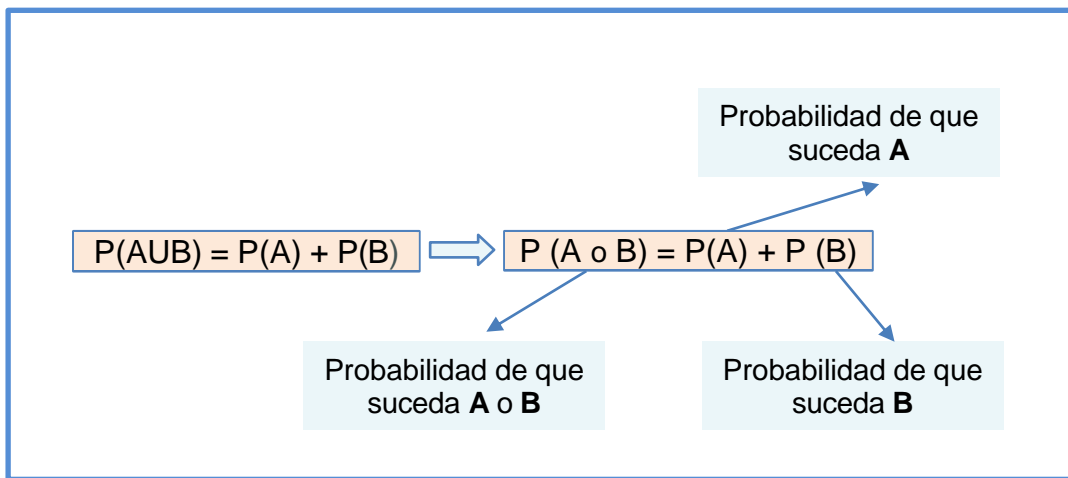


Fig. # 2. Diagrama de Venn



Ejemplo:

Cinco estudiantes por igual capacidad, esperan la fecha en que se les hará una entrevista para trabajar en el verano, la compañía solicitante ha anunciado que contratará a

sólo uno de los cinco, mediante una elección aleatoria. El grupo está formado por los estudiantes siguientes: Bill, Helen, John, Sally y Walter.

Determine:

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que John sea elegido?
- b) ¿Cuál es la probabilidad de que John o Sally sean elegidos?

Respuesta:

a) $P(\text{John}) = 1/5 = 0,2$ Es una probabilidad sencilla

b) **Evento A:** John sea elegido

Evento B: Sally sea elegida

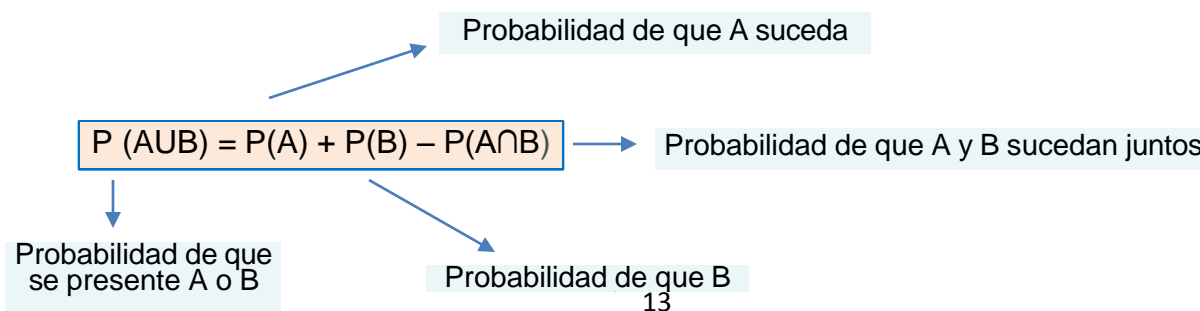
$$P(\text{John o Sally}) = P(A) + P(B) = 1/5 + 1/5 = 2/5 = 0,4$$

Sucesos no excluyentes o solapados:

Dos o más eventos o sucesos son no excluyentes, o conjuntos, cuando es posible que ocurran ambos. Esto no indica que necesariamente deban ocurrir estos eventos en forma simultánea. Por ejemplo, si consideramos en un juego de domino sacar al menos un blanco y un seis, estos eventos son no excluyentes porque puede ocurrir que salga 6 blanco.

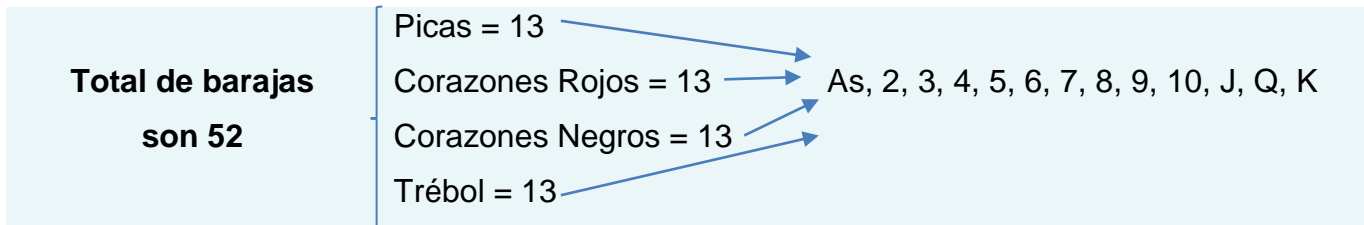
Ley de adicción para eventos mutuamente excluyentes:

Si dos eventos no son mutuamente excluyentes, es posible que ambos se presenten al mismo tiempo, en tales casos, debemos modificar la regla de la adición. Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de sacar un as o un corazón de un mazo de barajas?, los eventos as y corazón pueden presentarse juntos, ya que se puede sacar un as de corazón de un mazo de barajas, cuya fórmula sería:



Ejemplo:

1) Se tiene un mazo de barajas, se desea determinar la probabilidad de extraer 1 carta de AS o Corazón Rojo.



Evento A: Extraer un AS $P(A) = 4/52$

Evento B: Extraer un Corazón Rojo $P(B) = 13/52$

LA PROBABILIDAD DE QUE SUCEDA A Y B:

$$P(A \cap B) = 1/52$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A \cup B) = 4/52 + 13/52 - 1/52 = 16/52$$

2) Los empleados de una cierta compañía han elegido a cinco de ellos para que los representen en el consejo administrativo y de personal sobre productividad. Los perfiles de los cinco elegidos son:

- hombre de 30 años
- hombre de 32 años
- mujer de 45 años
- mujer de 20 años
- hombre de 40 años

Este grupo decide elegir un vocero, la elección se efectúa sacando de un sombrero uno de los nombres impresos. ¿Se desea determinar la probabilidad de que el vocero sea mujer o cuya edad esté por arriba de 35 años?

Evento A: sea mujer $P(A) = 2/5$

Evento B: mayor de 35 años $P(B) = 2/5$

La probabilidad de que sea mujer y mayor de 35 años $P(A \cap B) = 1/5$,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 2/5 + 2/5 - 1/5 = 3/5$$

Probabilidad Condicional:

Si los sucesos A y B pertenecen al mismo espacio muestral E y si $P(A)$ es distinto a cero, entonces la probabilidad condicional de B dado que A haya ocurrido, designada por $P(B | A)$, se define como: $P(A) \neq 0$;

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

El término probabilidad condicional toma en cuenta la posibilidad de que la probabilidad de B pueda depender del hecho de que el suceso A haya o no ocurrido.

Ejemplo:

Una caja contiene bolitas rojas y verdes. Además cada una tiene grabada una letra que puede ser M y E. La composición de la caja se presenta a continuación.

| | Rojas | Verdes | Total |
|-------|-------|--------|-------|
| E | 3 | 4 | 7 |
| M | 5 | 3 | 8 |
| Total | 8 | 7 | 15 |

Determinemos la probabilidad de seleccionar una bolita verde de la caja, dado que tenga grabada un letra E.

Solución:

Por definición $P(E) \neq 0$;

$$P(V | E) = \frac{P(E \cap V)}{P(E)}$$

Calculemos las siguientes probabilidades.

- $P(E)$ = probabilidad de obtener una bolita con la letra E, es igual a $7/15$, ya que existen

7 bolitas con la letra E, de un total de 15.

- $P(E \cap V)$ = probabilidad de obtener una bolita con la letra E y sea verde es igual a $4/15$, ya que hay 4 bolitas verdes con la letra E, de un total de 15.
- Como conocemos $P(E)$ y $P(E \cap V)$, sustituyendo en la definición tenemos:

$$P(V | E) = \frac{4/15}{7/15}$$
$$= \frac{4}{7}$$

- O también directamente $P(V | E)$ = probabilidad de obtener una bolita verde, dado que la bolita seleccionada tenga la letra E es igual a $4/7$, ya que hay 7 bolitas con la letra E de las cuales 4 son verdes; o sea, $P(V | E) = 4/7$

EVENTO PARA LA MULTIPLICACIÓN

Regla de la multiplicación

La regla de la multiplicación expresa que la probabilidad de que ocurran **A** y **B** es igual a la probabilidad de **A** multiplicada por la probabilidad de que ocurra **B**, dado que **A** ha ocurrido.

En simbología:

$$P(\mathbf{A \text{ y } B}) = P(A \cap B) = P(B) \cdot P(B | A)$$

Demostración

Partiendo de la probabilidad condicional

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Multiplicando ambos miembros por $P(A)$ Tenemos:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A)$$

Regla de la multiplicación para sucesos independientes o regla de la multiplicación con reemplazamiento.

Si **A** y **B** son sucesos independientes la $P(B | A)$ es igual a la probabilidad incondicional de **B**, es decir, $P(B | A) = P(B)$. Si este es el caso la regla de la multiplicación pasa

a ser:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) = P(A) \cdot P(B)$$

Luego la probabilidad de A y B es igual a la probabilidad de A, por la probabilidad de B;

Es decir:

$$P(A \text{ y } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Regla de la multiplicación para sucesos dependientes o regla de la multiplicación sin reemplazamiento.

Si A y B son sucesos dependientes, entonces, la probabilidad de que ocurran A y B es igual a la probabilidad de A, multiplicada por la probabilidad de que ocurra B, dado que A ha ocurrido; o sea,

$$P(A \text{ y } B) = P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B | A) \text{ o también}$$

$$P(A \text{ y } B) = P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A | B)$$

Regla de la multiplicación en general.

Sean $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, sucesos cualesquiera, se define la probabilidad de ocurrencia conjunta como:

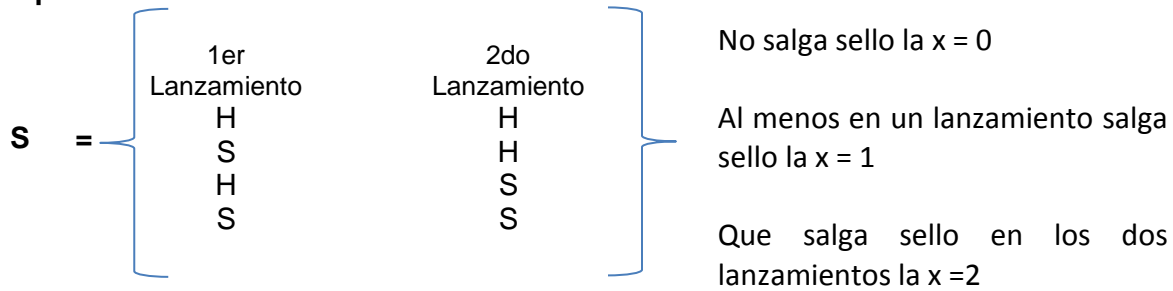
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \dots P(A_n | A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

Ejemplo: recordemos la idea del lanzamiento de la moneda no alterada, suponiendo que se lanza dos veces la moneda cuyo resultado puede ser cara(H) o sello(T), supóngase ahora que se quiere determinar la distribución de probabilidad del **número de sellos** que podrían caer cuando lanzamos la moneda dos veces. Hay que determinar lo siguiente:

Experimento: Lanzar una moneda no alterada

Evento: Obtener el número de sellos al lanzar la moneda dos veces.

Espacio Muestral:



A continuación, se presenta la tabla de distribución de probabilidades

Tabla °1. Distribución de probabilidad al lanzar dos veces una moneda no alterada

| X Numero de sellos | Fi Casos Observados | P _i | P _a | % P _i | % P _a |
|-----------------------|------------------------|----------------|----------------|------------------|------------------|
| 0 | 1 | 0,25 | 0,25 | 25 | 25 |
| 1 | 2 | 0,5 | 0,75 | 50 | 75 |
| 2 | 1 | 0,25 | 1 | 25 | 100 |
| Total | 4 | 1 | | 100 | |

Fuente: García, I (2019)

X = Numero de sellos

Fi: casos observados

Pi: Probabilidad, se obtiene → **Pi** = casos favorables / casos posibles

$$P_i = 1/4 = 0,25$$

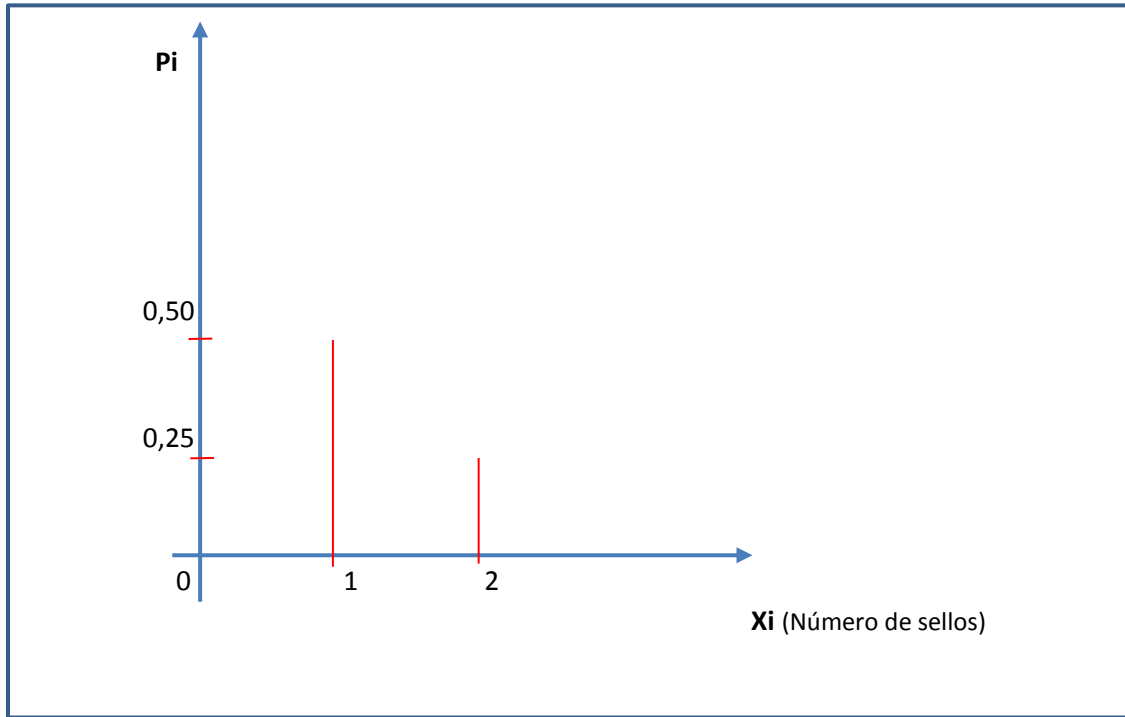
Pa: Probabilidad acumulada, se determina como la frecuencia acumulada vista en Estadística I

% Pi: es el porcentaje de la probabilidad, $P_i * 100 = 0,25 * 100 = 25\%$

% Pa: es el porcentaje de la probabilidad acumulada $P_a = 0,75 * 100 = 75\%$

Podemos representar en forma gráfica la distribución de probabilidad, según la siguiente, en el eje x se representa la variable (x_i), en el eje y la probabilidad.

Fig. °1. Distribución de probabilidad, para el número de sellos al lanzar dos veces una moneda



Fuente: García, I (2019)

Ejemplo:

Una caja contiene 6 bolitas blancas y 4 negras. Se extraen dos bolitas sucesivamente y sin restricción.

- ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean blancas?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea blanca y la segunda sea negra?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea negra y la segunda sea blanca?
- ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean negras?

Solución:

- Sea el espacio muestral $E = (10 \text{ bolitas entre blancas y negras})$:
- Los sucesos definidos son:
 - $B = (\text{Extraer bolitas blancas}).$
 - $N = (\text{Extraer bolitas negras}).$
- Calculemos las siguientes probabilidades:
 - a) $P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2 | B_1)$
 $= 6/10 \cdot 5/9 = 30/90 = 0,333\dots$
 - b) $P(\text{la primera sea blanca y la segunda sea negra}).$
 $P(B_1 \cap N_2) = P(B_1) \cdot P(N_2 | B_1) = 6/10 \cdot 4/9 = 24/90 = 0,266\dots$
 - c) $P(\text{la primera sea negra y la segunda blanca}).$
 $P(N_1 \cap B_2) = P(N_1) \cdot P(B_2 | N_1) = 4/10 \cdot 6/9 = 24/90 = 0,266\dots$
 - d) $P(\text{ambas sean negras})$
 $P(N_1 \cap N_2) = P(N_1) \cdot P(N_2 | N_1) = 4/10 \cdot 3/9 = 12/90 = 0,133\dots$

UNIDAD II VARIABLE ALEATORIA

Variable Aleatoria: Una variable es aleatoria si toma diferentes valores como resultado de un experimento aleatorio, puede ser discreta o continua como se explicó en Estadística I, si puede tomar sólo un número limitado de valores, es una variable aleatoria discreta, ahora si toma cualquier valor dentro de un intervalo dado, es una variable aleatoria continua.

Las variables aleatorias son fundamentales en estadística porque permite modelar fenómenos aleatorios y calcular probabilidades, esperanza, varianza y otras medidas de interés.

Tipo de Variables Aleatorias:

- **Discretas:** son aquellas que toman valores en un conjunto finito o infinito numerable (es decir, valores que se pueden contar)

Ejemplos:

- Número de caras al lanzar una moneda tres veces.
- Número de estudiantes que aprueban un examen.
- Número de defectos en un lote de productos.

- **Continuas:** son aquellas que pueden tomar cualquier valor dentro de un intervalo o conjunto no numerable (Valores que no se pueden contar)

Ejemplos:

- Tiempo que tarda un estudiante en resolver un examen.
- Peso de una persona.
- Temperatura en una ciudad.

Función de distribución de probabilidades (f.d.p.)

Es un conjunto formado por pares ordenados $[X_1, P(X_1)]$, donde la primera componente son todos los posibles valores de la variable y la segunda componente son las probabilidades asociadas a ella, y la denotamos por f.d.p.

Así f.d.p.= $\{[X_1, P(X_1)]\}$.

Propiedades:

$$1) 0 \leq P(X_1) \leq 1$$

$$2) \sum_{i=1}^n P(X_1) = 1$$

Ejemplo 1:

Una moneda corriente se lanza cuatro veces. Determinemos la función de distribución de probabilidad del número de caras.

Solución:

- Determine el espacio muestral (E) del lanzamiento de la moneda cuatro veces.
- Escriba la función de distribución de X; es decir, $F(X) = P(X = \text{número de caras})$.
- Construya una tabla, que contenga en la primera fila todos los valores de la variable "X" en función del experimento y en la segunda fila escriba la probabilidad asociada a cada valor de "X"; es decir:

| X_1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|----------|------|------|------|------|------|
| $P(X_1)$ | 1/16 | 4/16 | 6/16 | 4/16 | 1/16 |

$$P(X = 0) = 1/16 ; P(X = 1) = 4/16 ; P(X = 2) = 6/16 ; P(X = 3) = 4/16 ; P(X = 4) = 1/16$$

Luego la f.d.p. = $\{ [X_1, P(X_1)] \}$. Así,

$$\text{f.d.p.} = \{ (0, 1/16) ; (1, 4/16) ; (2, 6/16) ; (3, 4/16) ; (4, 1/16) \}.$$

Esperanza Matemática o valor esperado: El valor esperado es una idea fundamental en el estudio de las distribuciones de probabilidad. Durante muchos años, el concepto a ha sido puesto en práctica con bastante regularidad por las compañías aseguradoras, también ha sido utilizado ampliamente por muchas de las personas que tienen que tomar decisiones en condiciones de incertidumbre.

Para obtener el valor esperado de una variable aleatoria discreta, multiplicamos cada valor que la variable puede tomar por la probabilidad de presentación de ese valor y luego sumamos los productos.

En la siguiente tabla, se toma como referencia, una clínica de tratamiento de cáncer de pecho, para calcular el promedio de mujeres atendidas diariamente, utilizando registros sobre pacientes anteriores como base para calcular su valor esperado,

Tabla °2. Número de mujeres atendidas diariamente de cáncer de pecho.

| Valores posibles de la variable aleatoria (X _i) | Probabilidad de que la variable aleatoria tome estos valores (P _i) | Multiplicando (X _i *P _i) |
|---|--|---|
| 100 | 0,01 | 1,00 |
| 101 | 0,02 | 2,02 |
| 102 | 0,03 | 3,06 |
| 103 | 0,05 | 5,15 |
| 104 | 0,06 | 6,24 |
| 105 | 0,07 | 7,35 |
| 106 | 0,09 | 9,54 |
| 107 | 0,10 | 10,70 |
| 108 | 0,12 | 12,96 |
| 109 | 0,11 | 11,99 |
| 110 | 0,09 | 9,90 |
| 111 | 0,08 | 8,88 |
| 112 | 0,06 | 6,72 |
| 113 | 0,05 | 5,65 |
| 114 | 0,04 | 4,56 |
| 115 | 0,02 | 2,30 |
| TOTAL | 1 | 108,02 |

Fuente: García, I (2019)

Por lo tanto, el valor esperado es:

Esperanza Matemática: $E(x) = \sum (X_i * P_i) = 108,02$

Varianza y Desviación Estándar:

Estas medidas numéricas describen la dispersión o variabilidad de la variable aleatoria mediante el promedio o valor esperado de las desviaciones cuadráticas de los valores de **x** a partir de su media (**μ**).

Sea x la variable aleatoria discreta con distribución de probabilidad $f(x)$ y media μ que viene siendo el valor esperado, la varianza de x es σ^2 cuya fórmula es:

$$\sigma^2 = \sum (X_i^2 * P_i) - E^2(x)$$

Y la desviación estándar se determina por

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}$$

Sea x la variable aleatoria continua con distribución de probabilidad $f(x)$ y la media μ la varianza de x es:

$$\sigma^2 = E [(x - \mu)^2] = \int (X - \mu)^2 F_x dx$$

Tomando los datos del ejercicio anterior y utilizando la primera fórmula, determinamos la varianza y la desviación estándar.

Tabla °3. Número de mujeres atendidas diariamente de cáncer de pecho.

| Valores posibles de la variable aleatoria (X_i) | Probabilidad (P_i) | X_i^2 | $X_i^2 * P_i$ |
|---|------------------------|---------|---------------|
| 100 | 0,01 | 10000 | 100 |
| 101 | 0,02 | 10201 | 204,02 |
| 102 | 0,03 | 10404 | 312,12 |
| 103 | 0,05 | 10609 | 530,45 |
| 104 | 0,06 | 10816 | 648,96 |
| 105 | 0,07 | 11025 | 771,75 |
| 106 | 0,09 | 11236 | 1011,24 |
| 107 | 0,10 | 11449 | 1144,9 |
| 108 | 0,12 | 11664 | 1399,68 |
| 109 | 0,11 | 11881 | 1306,91 |

| | | | |
|--------------|----------|-------|-----------------|
| 110 | 0,09 | 12100 | 1089 |
| 111 | 0,08 | 12321 | 985,68 |
| 112 | 0,06 | 12544 | 752,64 |
| 113 | 0,05 | 12769 | 638,45 |
| 114 | 0,04 | 12996 | 519,84 |
| 115 | 0,02 | 13225 | 264,5 |
| TOTAL | 1 | | 11680,14 |

Fuente: García, I (2019)

Sustituyendo en la primera fórmula, tenemos:

Varianza: $\sigma^2 = 11680,14 - 108,02^2 = 11819,6$

Desviación estándar: $\sigma = \sqrt{11819,96} = 3,4376$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

- 1) Determine la distribución de probabilidad si se lanzan 4 monedas al aire, y se desea obtener el número de Sellos.
- 2) Al lanzar 2 dados, determine: a) tabla de distribución de probabilidad b) gráfica, de los puntos que se obtienen (suma de las caras de los dos dados)
- 3) Una caja contiene 30 canicas rojas, y 20 bancas, se quiere obtener el número de canicas Rojas al extraer 4 de la caja, construya su distribución de probabilidad y gráfica
- 4) Se realizó una encuesta sobre el número de hijos en familias de 3 hijos, para determinar el número de Niñas que nacen, determine: distribución de probabilidad y represente gráficamente.
- 5) Los siguientes datos se refiere al número de hijos por familia, determine
 - a) Valor esperado b) Desviación estándar

| | | | | | | | |
|-------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| No. De hijos | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Proporción de familias | 0,05 | 0,10 | 0,30 | 0,25 | 0,15 | 0,10 | 0,05 |

6) Para la siguiente distribución determine:

- a) Esperanza matemática b) Desviación estándar

| | | | | | | | | |
|------------------|----|----|---|---|---|---|---|---|
| X_i | -3 | -2 | 0 | 1 | 2 | 4 | 5 | 6 |
| Casos observados | 2 | 5 | 7 | 6 | 4 | 3 | 2 | 1 |

UNIDAD III DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDADES

DISTRIBUCIÓN BERNOULLI

Se distribuye a varias generaciones de la familia Bernoulli, quienes fueron matemáticos suizos del siglo XVIII, el nombre de Bernoulli ha quedado así asociado con esta clase de experimento, y cada recepción de experimento con solo dos resultados posibles.

Para los fines de la teoría de probabilidades, el interés se centra no en única prueba de Bernoulli, sino en una serie de pruebas de Bernoulli independientes y repetidas, es decir, estamos interesados en más de una prueba, el hecho de que estas pruebas deben ser independientes significa que el resultado de cualquiera de ellas no pueda influir en el resultado de cualquiera de las demás.

Es una **distribución de probabilidad discreta**, que toma valor de 1 para la probabilidad de éxito, y valor 0 para la probabilidad de fracaso. Como por ejemplo si un jugador de basquetbol está a punto de tirar hacia la parte superior del tablero,

sea $x = 1$ si anota el tiro, sino lo hace $x = 0$.

Esta distribución está basada en dos resultados “cierto” y “falso”, donde p representa el éxito, y q representa el fracaso. Los ensayos repetidos cumplen un papel muy importante en probabilidad y estadística, en especial cuando el número de ensayos es fijo, el parámetro es el mismo para cada ensayo y cuando todos los ensayos son independientes, existen algunas variables aleatorias que aparecen en conexión con ensayos repetidos.

Podríamos por tanto definir este experimento mediante una variable discreta x que toma los valores: $X = 0$ Si el suceso no ocurre, $X = 1$ en caso contrario y se denota de la siguiente manera:

$$X \sim B(n, p) \leftrightarrow X = \begin{cases} 0 \rightarrow q = 1 - p = P[X = 0] \\ 1 \rightarrow p = P[X = 1] \end{cases}$$

Un ejemplo típico de este tipo de **variable aleatoria** consiste en lanzar una moneda al aire y considerar la variable:

$$X = \text{Número de caras} = \begin{cases} 0 \rightarrow q = 1/2 \\ 1 \rightarrow p = 1/2 \end{cases}$$

Para una variable aleatoria de Bernoulli, tenemos que su función de probabilidad es

$$F(x) = \begin{cases} Q & \text{si } x = 0 \\ P & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

Este tipo de distribución fue desarrollada por Jakob Bernoulli (Suiza, 1654 – 1705), es la principal distribución de probabilidad discreta para variables dicotómicas, es decir, que sólo pueden tomar dos posibles resultados.

Es una distribución de probabilidad ampliamente utilizada de una variable aleatoria, esta describe varios procesos de interés para los administradores. Describe datos discretos, resultantes de un experimento denominado proceso de Bernoulli en honor al matemático suizo Jacob Bernoulli, quien vivió en el siglo XVII.

En estadística, la distribución binomial es una distribución de probabilidad discreta que cuenta el número de éxitos en una secuencia de n ensayos de Bernoulli independientes entre sí, con una probabilidad fija p de ocurrencia del éxito entre los ensayos. Un experimento de Bernoulli se caracteriza por ser dicotómico, esto es, solo dos resultados son posibles. A uno de estos se denomina éxito y tiene una probabilidad de ocurrencia p y al otro, fracaso, con una probabilidad $q = 1 - p$.

La distribución de probabilidad binomial es uno de los modelos matemáticos (expresión matemática para representar una variable) que se utiliza cuando la variable aleatoria discreta es el número de éxitos en una muestra compuesta por n observaciones.

En la distribución Binomial el anterior experimento se repite n veces, de forma independiente, y se trata de calcular la probabilidad de un determinado número de éxitos. Para $n = 1$, la binomial se convierte, de hecho, en una distribución Bernoulli.

Algunos ejemplos típicos de una distribución binomial son: al nacer un bebe puede ser hembra o varón, un equipo de baloncesto puede ganar o perder, en un examen con preguntas cerradas dicotómicas puede ser verdadero o falso, un tratamiento médico, como por ejemplo la vacuna para la gripe A, puede ser efectivo o inefectivo, entre otras

Para representar una variable aleatoria x , que sigue una distribución binomial de parámetros n y p , se escribe: $X \sim B(n, p)$

Propiedades:

- 1) Cada observación se clasifica en una de dos categorías, mutuamente excluyentes (los eventos no pueden ocurrir de manera simultánea. Ejemplo: una persona no puede ser de ambos sexos) y colectivamente exhaustivos (uno de los eventos

debe ocurrir, ejemplo: al lanzar una moneda, sino ocurre cruz, entonces ocurre cara). A estas categorías se les denomina éxito y fracaso.

- 2) La probabilidad de que una observación se clasifique como éxito (p), es constante de una observación a otra, de la misma forma, la probabilidad de que una observación se clasifique como fracaso (q), es constante en todas las observaciones.
- 3) La variable aleatoria binomial tiene un rango de 0 a n.

ECUACIÓN:

$$P(x=k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} p^k \cdot q^{n-k} \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = {}_n C_k \text{ Se determina en la calculadora científica}$$

$$P(x=k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Depende del ejercicio se puede utilizar cualquier ecuación.

X: representa el número de éxitos obtenidos en cada prueba del experimento

K: número de aciertos o éxitos deseados

n: número de experimentos o ensayos efectuados

p: probabilidad de éxito, como por ejemplo que salga “cara” al lanzar una moneda

q: probabilidad de fracaso, también conocida como $1 - p$

Parámetros para la Distribución:

Valor esperado, esperanza matemática o media es:

$$\text{Valor esperado: } \mu = n \cdot p$$

$$\text{Varianza: } \sigma^2 = n \cdot p \cdot q$$

$$\text{Desviación típica es: } \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$$

Con el siguiente ejemplo veremos que la distribución binomial es fácil de entender y es importante en nuestra vida cotidiana imaginemos una escuela primaria donde los alumnos llegan tarde a menudo, 5 alumnos están en el jardín de niños. La directora lleva tiempo estudiando el problema, habiendo llegado a la conclusión de que hay una probabilidad de 0,4 de que un alumno llegue tarde y de que los alumnos lleguen independientemente uno de otro.

¿Cómo trazamos una distribución binomial de probabilidad que ilustre las probabilidades de que 0, 1, 2, 3, 4 ó 5 estudiantes lleguen tarde simultáneamente?

SOLUCIÓN:

Datos:

$$n = 5$$

$$p = 0,4$$

$$q = 1 - p = 1 - 0,4 = 0,6$$

$$P(x = 0,1,2,3,4,5) = ?$$

Aplicando la ecuación 1, se tiene:

$$P(X=0) = {}_5C_0 \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^{5-0} = 0,07776 \times 100 = \mathbf{7,776\%}$$

$$P(X=1) = {}_5C_1 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^{5-1} = 0,2592 \times 100 = \mathbf{25,92\%}$$

$$P(X=2) = {}_5C_2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,6^{5-2} = 0,3456 \times 100 = \mathbf{34,56\%}$$

$$P(X=3) = {}_5C_3 \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^{5-3} = 0,2304 \times 100 = \mathbf{23,04\%}$$

$$P(X=4) = {}_5C_4 \cdot 0,4^4 \cdot 0,6^{5-4} = 0,0768 \times 100 = \mathbf{7,68\%}$$

$$P(X=5) = {}_5C_5 \cdot 0,4^5 \cdot 0,6^{5-5} = 0,01024 \times 100 = \mathbf{1,024\%}$$

Otro ejemplo para demostrar el cálculo de la distribución binomial, sería el siguiente, con el propósito de verificar si se aceptan los lotes de piezas que se reciben en una determinada fábrica, se lleva a cabo un plan de control consistente en seleccionar 10 artículos al azar de cada lote y determinar el número de piezas defectuosas. Un lote rechaza si se encuentran dos o más piezas defectuosas.

¿Cuál es la probabilidad de aceptar lotes con un 5% de piezas defectuosas?

SOLUCIÓN:

Sea el suceso

A = ser pieza defectuosa n = 10 artículos

P = 5%/100 = 0,05 es la proporción de piezas defectuosas

q = 1 – 0,05 = 0,95

x = número de piezas defectuosas en el lote

P (aceptar lotes de piezas defectuosas) = P(X < 2)

Aplicando la ecuación 1

$$\begin{aligned} P(X < 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) \\ &= {}_{10}C_0 \cdot 0,05^0 \cdot 0,95^{10-0} + {}_{10}C_1 \cdot 0,05^1 \cdot 0,95^{10-1} \\ &= 0,5987 + 0,3151 \\ &= 0,9138 \cdot 100 \\ P(X < 2) &= 91,38\% \end{aligned}$$

Interpretación: el 91,38% es la probabilidad de aceptar lotes de piezas defectuosas.

EJERCICIOS PROPUESTOS DE DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

- 1) La última novela de un autor ha tenido un gran éxito, hasta el punto de que el 80% de los lectores ya la han leído. Un grupo de 4 amigos son aficionados a la lectura, Determine:
 - a. ¿Cuál es la probabilidad de que en el grupo hayan leído la novela 2 personas?
 - b. ¿Y cómo máximo 2?

- 2) Un laboratorio afirma que una droga causa efectos secundarios en una proporción de 3 de cada 100 pacientes. Para contrastar esta afirmación, otro laboratorio elige al azar a 5 pacientes a los que aplica la droga.

¿Cuál es la probabilidad de los siguientes sucesos?

- a. Ningún paciente tenga efectos secundarios
- b. Al menos 2 tengan efectos secundarios

- 3) Se sabe que el 30% de las piezas que fabrica una máquina son defectuosas, determine:

- a. La probabilidad de que una muestra de 4 piezas tomadas al azar todas son defectuosas
- b. La probabilidad de que en un grupo de 5 piezas elegidas al azar haya 2 buenas
- c.Cuál es la probabilidad de elegir una muestra de 6 piezas, al menos la mitad sean buenas
- d. La probabilidad de que una muestra aleatoria de 4 piezas haya más de 2 defectuosas

DISTRIBUCIÓN POISSON

Distribución Poisson, es una distribución muy usada en medicina y biología, se deriva del proceso de Poisson en honor al matemático francés Simeón Dennis Poisson (1781 – 1840). Se aplica para variables aleatorias discretas.

Los experimentos que resultan en valores numéricos de una variable aleatoria X , quien representa el número de resultados durante el intervalo de tiempo dado o una región específica, frecuentemente se llaman experimentos de Poisson. El intervalo de tiempo dado puede ser de cualquier duración de tiempo, por ejemplo, un minuto, un día, una semana, un mes o inclusive un año.

De aquí que un experimento de Poisson puede generar observaciones para la variable aleatoria X , que representa el número de algún evento en un lapso de tiempo

dato, por ejemplo: número de llamadas telefónicas, número de vehículos que pasan por un peaje, número de defectos de una pieza, etc.

Un experimento de Poisson tiene las siguientes propiedades:

- El número de resultados que ocurren en un intervalo de tiempo o región específico es independiente del número que ocurre en cualquier otro intervalo de tiempo.
- La probabilidad de que un resultado muy sencillo ocurra en un intervalo de tiempo muy corto o en una región muy pequeña es proporcional a la longitud del intervalo de tiempo o al tamaño de la región.
- La probabilidad de que más de un resultado ocurra en un intervalo de tiempo tan corto o en esa región tan pequeña es despreciable.
- El número promedio de veces que ocurre un éxito por cada unidad de tiempo o de espacio es constante.

Hay que hacer notar que en esta distribución el número de éxitos que ocurren por unidad de tiempo, área o producto es totalmente al azar y que cada intervalo de tiempo es independiente de otro intervalo dado, así como cada área es independiente de otra área dada y cada producto es independiente de otro producto dado. La fórmula a emplear es la siguiente:

$$P(X) = \frac{e^{-\lambda} * \lambda^K}{K!}$$

- P(X):** Es la probabilidad
- K:** Número medio de ocurrencia/unidad
- X:** Variable aleatoria
- λ:** Promedio
- !:** Factorial de un número

EJEMPLO:

1. Si un banco recibe en promedio 6 cheques sin fondo por día, ¿cuáles son las probabilidades de que reciban,
 - a) 4 cheques sin fondo en un día dado.
 - b) 10 cheques sin fondo en cualquiera de 2 días consecutivos?

SOLUCIÓN:

a) Datos

X = 4, es la variable que nos define el número de cheques sin fondo que llegan al banco en un día cualquiera, 1,2,3,4

λ = 6 cheques sin fondo/día

e = 2,718 (constante)

Utilizando la fórmula anterior tenemos:

$$P(X = 4, \lambda = 6) = \frac{(6^4) \times (2,718^{-6})}{4!} = \frac{1296 \times 0,00248}{24} = 0,13392$$

a) **X** = 10 número de cheques sin fondo que llegan al banco en 2 días consecutivos

λ = 6 x 2 = 12, cheques sin fondo en promedio que llegan al banco en 2 días
Consecutivos

e = 2,718

$$P(X= 10, \lambda= 12) = \frac{(12^{10}) \times (2,718^{-12})}{10!} = 0,104953$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

- 1) Un 10 % de las herramientas producidas por una fábrica son defectuosos, hallar la probabilidad de que, en una muestra de 10 herramientas tomadas al azar, exactamente sean defectuosas.
- 2) De los estudiantes que asisten a un liceo, el 5% posee gran aptitud para las artes plásticas, se elige una muestra de 100 alumnos al azar, ¿Cuál es la probabilidad 1,2 y 3 con referida aptitud?
- 3) En una localidad son albinos 2 de cada mil personas, se elige al azar una muestra de 100 y se desea saber la probabilidad de que sean albinos a) 3 b) entre 1 y 4 c) ninguno
- 4) Si el 2% de los libros encuadernados en cierto taller tiene encuadernación defectuosa, para obtener la probabilidad de que 5 de 400 libros encuadernados en este taller tengan encuadernaciones defectuosas usamos la distribución de Poisson.
- 5) La probabilidad de tener un accidente de tráfico es de 0,02 cada vez que se viaja, si se realizan 300 viajes, ¿cuál es la probabilidad de tener 3 accidentes?
- 6) La probabilidad de que un niño nazca pelirrojo es de 0,012. ¿Cuál es la probabilidad de que entre 800 recién nacidos haya 5 pelirrojos?
- 7) El número de pulsos que llegan a un contador GEIGER se presentan en promedio de 6 pulsos por minuto. Hallar la probabilidad de que en 15 minutos se reciban exactamente 20 pulsos.
- 8) En la inspección de hojalata producida por un proceso electrolítico continuo, se identifican 0,2 imperfecciones en promedio por minuto. Determine la probabilidad de:
 - a) una imperfección en 3 minutos.
 - b) 2 imperfecciones en 5 minutos c) una imperfección en 15 minutos.
- 9) Supongamos que el número de imperfecciones en un alambre delgado de cobre sigue una distribución de Poisson, con una media de 2,3 imperfecciones

por milímetro.

- a) Determine la probabilidad de 2 imperfecciones en un milímetro de alambre.
- b) Determine la probabilidad de 10 imperfecciones en 5 milímetros de alambre.
- c) Determine la probabilidad de una imperfección en 2 milímetros de alambre.

DISTRIBUCIÓN NORMAL

En estadística y probabilidad se llama distribución Normal, distribución de Gauss o, distribución gaussiana, a una de las distribuciones de probabilidad de variable continua, que con más frecuencia aparece en fenómenos reales. La gráfica de su función de densidad tiene una forma acampanada y es simétrica respecto de un determinado parámetro. Esta curva se conoce como campana de Gauss.

La importancia de esta distribución radica en que permite modernizar numerosos, fenómenos naturales, sociales y psicológicos, el uso del modelo normal puede justificarse asumiendo que cada observación se obtiene como la suma de unas pocas causas independientes.

La distribución normal también aparece en muchas áreas de la propia estadística, ya que muchos test estadísticos están basados en una supuesta normalidad. En probabilidad la distribución normal aparece como el límite de varias distribuciones de probabilidades continuas y discretas.

La distribución normal estándar, o tipificada o reducida, es aquella que tiene por media el valor cero, es decir $\mu = 0$, y por desviación típica la unidad, es decir $\sigma = 1$.

En resumen, la importancia de la distribución se debe principalmente a que hay muchas variables asociadas a fenómenos naturales que sigue el modelo de la normal, como, por ejemplo:

- ✓ Caracteres morfológicos de individuos (personas, animales, plantas, etc.,) de una especie, como tallas, pesos, envergaduras, diámetros, perímetros.
- ✓ Caracteres fisiológicos, por ejemplo: efecto de una misma dosis de un fármaco, o de una misma cantidad de abono.

- ✓ Caracteres sociológicos, por ejemplo: consumo de cierto producto por un mismo grupo de individuo, puntuaciones de un examen.
- ✓ Caracteres psicológicos, por ejemplo: cociente intelectual, grado de adaptación a un medio.
- ✓ Errores cometidos al medir ciertas magnitudes.
- ✓ Valores estadísticos muestrales, por ejemplo: la media.
- ✓ Otras distribuciones como la de Poisson son aproximaciones normales. En general cualquier característica que se obtenga como suma de muchos factores.

PROPIEDADES DE LA DISTRIBUCIÓN NORMAL:

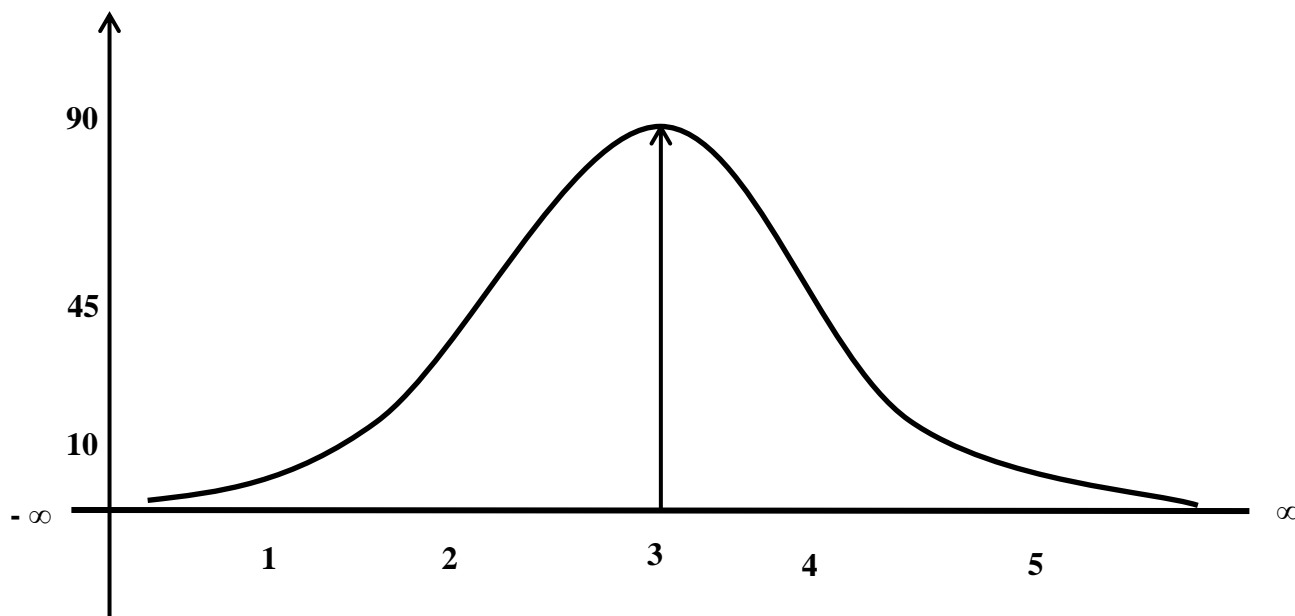
1. La curva tiene forma de campana.
2. Es **simétrica** con respecto al eje y, ya que tiene una única moda, que coincide con su media y mediana.
3. La curva normal es asintótica, con respecto al eje x. Por ello, cualquier valor entre menos infinito y más infinito es teóricamente posible.
4. Para este tipo de variable existe una probabilidad de un 50% de observar un dato mayor que la media, y un 50% de observar un dato menor.
5. La distancia entre la línea trazada en la media y el punto de inflexión de la curva es igual a una desviación típica representado por el signo sigma (σ), cuando mayor sea sigma, más aplanada será la curva de la densidad.

Se deduce que no existe una única distribución normal, sino una familia de distribuciones con una forma común diferenciadas por los valores de su media y varianza, cuya fórmula es la siguiente:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

- Z** : Es la variable estándar o tipificada
- X** : Variable aleatoria continua
- μ** : Media, media de la población, promedio
- σ** : Desviación de la población

Representación Gráfica:



EJEMPLO:

Supongamos que se sabe la cantidad promedio de cervezas, que 20 alumnos del 3^{er} semestre de Administración Industrial del IUTEPI se toman los días viernes, es de 45 latas de cerveza con una desviación estándar de 8 latas de cervezas.

Determine: a) ¿La probabilidad de que tomen entre 35 a 47 latas de cerveza?

b) ¿Podemos saber cuántos alumnos han tomado más de 51 latas de cervezas?

SOLUCIÓN A:

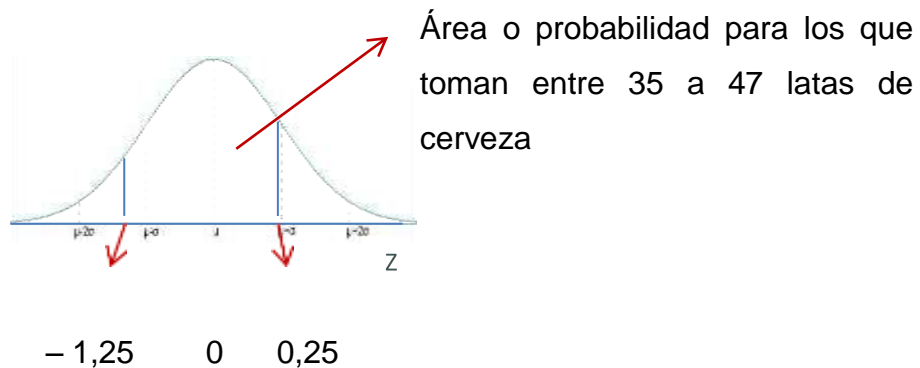
Datos

- N** = 20 alumnos
- μ** = 45 latas de cervezas
- σ** = 8 latas de cervezas
- Z** = desconocida
- X_1** = 35 y **X_2** = 45

Sustituyendo los datos, calculamos Z:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$
$$Z_1 = \frac{35 - 45}{1,25} \rightarrow 8$$
$$Z_2 = \frac{47 - 45}{8} \rightarrow 0,25$$

Representación Gráfica:



Se ubican los dos valores de Z en la tabla de distribución normal, para este ejemplo se tomó la siguiente tabla como referencia: ESTAD II\TABLA DISTRIBUCIÓN NORMAL TIPIFICADA.docx

Donde se obtienen los valores de las Probabilidades, es decir:

Para $Z = -1,25$ su $P = 0,8944 * 100 = 89,44\%$

Para $Z = 0,25$ su $P = 0,5987 * 100 = 59,87\%$

Por lo tanto,

$$P(-1,25 \leq Z \leq 0,25) = P(Z \leq 0,25) - P(Z \leq -1,25) = 89,44\% - 59,87\% = 29,75\%$$

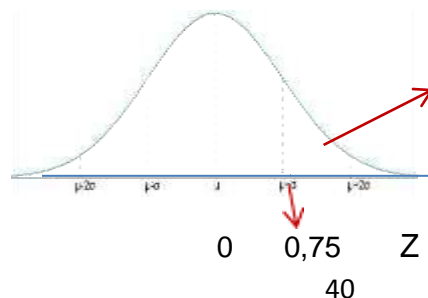
SOLUCIÓN B:

- N** = 20 alumnos
- μ** = 45 latas de cervezas
- σ** = 8 latas de cervezas
- Z** = desconocida
- X_1** = 35 y **X_2** = 45

Sustituyendo los datos, calculamos Z

$$Z = \frac{51 - 45}{8} = 0,75$$

Representación Gráfica:



Probabilidad, para los que toman más de 51 latas de cerveza

$$P(Z > 0,75) = 1 - P(Z \leq 0,75) = 1 - 0,7734 = 0,2266 * 100 P(Z > 0,75) = \underline{22,66\%}$$

Ahora calculamos la cantidad de alumnos que se toman más de 51 latas de cervezas,

$$n = N * P / 100 = 20 * 22,66\% / 100 n = \underline{4,532 n \approx 5 \text{ Alumnos}}$$

Podemos concluir que 5 alumnos se toman más de 51 latas de cervezas.

UNIDAD IV DISTRIBUCIÓN DE MUESTREO

TIPOS DE DISTRIBUCIÓN DE MUESTREO:

LA DISTRIBUCIÓN DE CHI CUADRADO, χ^2

El estadístico “chi” cuadrado χ^2 , desarrollado por Karl Pearson (1857 – 1936, matemático inglés, creador también de los momentos y de la curva y desviación normales), mide el grado de DESVIACIÓN entre las frecuencias observadas, con respecto a las respectivas frecuencias teóricas de MAS DE DOS GRUPOS.

Sirve así, para definir la magnitud de las discrepancias entre las observaciones REALES y las HIPOTÉTICAS. De allí su enorme importancia en el análisis estadístico, aplicado a los estudios biológicos, sociológicos y todos aquellos fenómenos, donde los datos se presenten en la forma de FRECUENCIAS, al extremo de indicarnos si alguna cierta discrepancia observada, con respecto a los valores hipotéticos, se deben al azar o a una FALSA HIPÓTESIS.

La prueba de χ^2 es indispensable en el contraste de más de dos grupos, en el estudio de sus frecuencias observadas, "O", y las respectivas frecuencias esperadas, "E"

En una muestra cualquiera, el valor χ^2 (Chi es una letra griega, muy parecida a nuestra X) viene dado por la suma de los cocientes de dividir los cuadrados de las discrepancias de las diferencias observadas, entre las frecuencias hipotéticas, es decir:

$$\chi^2 = \sum \left[\frac{(E - O)^2}{E} \right]$$

Dónde: **E** = Frecuencia teórica o estimada de la población

O = Frecuencia observada, real o de la muestra

NOTAS:

- a) El binomio $(E - O)^2$ se puede escribir igualmente $(O - E)^2$; ya que, al elevarse al cuadrado, siempre resultará positivo. En verdad, lo que interesa es el valor absoluto de los desvíos.
- b) Algunos autores representan las frecuencias esperadas o teóricas por "F" y las observadas o muestrales, por "f".

χ^2 es un estadístico NO PARAMÉTRICO, porque NO sigue una distribución normal, sino una distribución LIBRE.

Se utiliza para el estudio comparado de frecuencias absolutas, relativas o porcentuales. Se supone aplicable a las funciones discretas; pero también se puede aplicar a las funciones continuas, agrupando los datos en categorías.

Consiste en hacer comparaciones entre las frecuencias experimentales observadas y las frecuencias teóricas establecidas.

En el caso de contar con varias observaciones, las podemos clasificar y agrupar, desde una, hasta cualquier número de clases, "n". Luego determinamos las frecuencias observadas, "O", que ocurren en cada clase de la muestra. Después calculamos las

frecuencias, “E”, que debemos esperar, en la hipótesis de que nuestros experimentos y sus finalidades, puedan explicar y justificar las variaciones de las observaciones.

Ejemplo Ilustrativo

Supongamos que una revista deportiva especializada hubiera levantado un censo de la afición beisbolera en Venezuela, y publicado los siguientes resultados:

- 1) Magallanes **35 %** de la fanaticada
 - 2) Caracas **25 %**
 - 3) La Guaira **20 %**
 - 4) Otros equipos **20 %**
- TOTAL **100 %**

Supongamos que efectuamos un muestreo, entre **400** aficionados, escogidos al azar, y obtenemos los siguientes resultados:

| FRECUENCIAS OBSERVADAS “O” (Aficionados) | | |
|---|---------------|-----|
| 1) | Magallanes | 125 |
| 2) | Caracas | 110 |
| 3) | La Guaira | 90 |
| 4) | Otros equipos | 75 |
| | Total | 400 |

De acuerdo a la publicación original de la revista, si nuestra muestra fuera verdaderamente REPRESENTATIVA de la fanaticada debemos haber obtenido las siguientes:

| FRECUENCIAS TEÓRICAS “E” (Aficionados) | | |
|--|----------------------------|-----|
| 1) | Magallanes (400) (0,35) | 140 |
| 2) | Caracas (400) (0,25) | 100 |
| 3) | La Guaira (400) (0,20) | 80 |
| 4) | Otros equipos (400) (0,20) | 80 |
| | Total | 400 |

El grado de DISPARIDAD entre estas dos distribuciones, vendrá dado por el cuadrado de “chi”; obtenible, mediante la fórmula descrita. Para mayor facilidad, tabulemos primero los datos requeridos por dicha fórmula, así:

| CLASES | E | O | E - O | (E - O) ² | (E - O) ² / E |
|---------------|-----|-----|-------|-------------------------------|--------------------------|
| Magallanes | 140 | 125 | 15 | 225 | 1,6071 |
| Caracas | 100 | 110 | -10 | 100 | 1,0000 |
| La Guaira | 80 | 90 | -10 | 100 | 1,2500 |
| Otros equipos | 80 | 75 | 5 | 25 | 0,3125 |
| | 400 | 400 | 0 | X² = 4,1696 | |

TEORÍA DE LA PEQUEÑA MUESTRA.

Conceptos y generalidades.

Hasta aquí hemos considerado que para aquellas muestras de más de 30 datos o elementos es decir cuando n es mayor que 30 ofrecen una distribución normal ajustándose más a ella cuanto mayor sea el número de elementos n de dicha muestra.

Como la desviación típica de la muestra no es otra cosa que una estimación de la desviación típica del universo o población estará siempre afectada de un cierto error el cual se hace mayor cuanto menor sea el tamaño de la referida muestra.

En aquellos casos en los cuales la muestra contenga menos de 30 elementos, n menos de 30, la aproximación de la inducción estadística será cada vez menor cuanto menor sea n lo cual hace inoperante las aseveraciones hechas en cuanto a las características de la distribución normal y hace preciso toda una serie de nuevas consideraciones que vienen a constituir una teoría particular aplicable solamente a las muestras pequeñas, aunque con más razón también son aplicables a todo tipo de muestras.

DISTRIBUCIÓN T- STUDENT

En estadística y probabilidad, la distribución t de student es una distribución de probabilidad que surge del problema de estimar la media de una población normalmente distribuida cuando el tamaño de la muestra es pequeño, es la base para la determinación de las diferencias entre dos medias muestrales y para la construcción del intervalo de confianza para la diferencia entre las medias de dos poblaciones.

La distribución surge, en la mayoría de los estudios estadísticos prácticos, cuando la desviación típica de una población se desconoce y debe ser estimada a partir de los datos de una muestra, aparece de manera natural al realizar la prueba de student para la determinación de las diferencias entre dos medias muestrales y para la construcción del intervalo de confianza para la diferencia entre las medias de dos poblaciones cuando se desconoce la desviación típica de una población y ésta debe ser estimada a partir de dos datos de una muestra.

Por lo que sigue una distribución Normal de media 0 y varianza 1, sin embargo, dado que la desviación estándar no siempre es conocida de antemano, William S. Gosset estudió un cociente relacionado.

$$T = \frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n / \sqrt{n}}$$

La Distribución de "STUDENT", t

Se llama así y también distribución t a una distribución de probabilidades descubierta e investigada a principios del siglo por William s. Gosset quién publicó sus trabajos de investigación al respecto en 1908 con el título de probable error of mean (error probable de la media aritmética), bajo el seudónimo de student, palabra inglesa que significa estudiante debido a que sus patronos no le permitieron publicarlos firmados con su verdadero nombre.

En parte el siguiente ejemplo ilustra objetivamente lo descubrimiento de student vamos a suponer que de entre los miles profesores de la USB se toma una muestra verdaderamente representativa de tales de solo cuatro con mira a estimar la edad promedio de dicho profesorado con los siguientes resultados:

$X_1 = 36$ años. $X_2 = 45$ años

$X_3 = 40$ años. $X_4 = 47$ años

La media Aritmética: $\bar{X} = \frac{\sum X}{n} = \frac{36+40+45+47}{4} = \frac{168}{4} = 42$ años

Es decir, que la media aritmética de esta pequeña muestra resulta ser de 42 años, y la desviaciones, “**d**”, de los datos con respecto a ella, serían: **-6; -2; 3 y 5.**

Las investigaciones de “Student” demostraron que las desviaciones típicas del universo NO eran, como el caso de la distribución normal:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n}} = \sqrt{\frac{36+4+9+25}{4}} = \sqrt{\frac{74}{4}} = \sqrt{18,50} = 4,3011626333\dots$$

Sino esta otra:

$$\sigma t = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{74}{4-1}} = \sqrt{24,666\dots} = 4,966554807\dots$$

Significativamente MAYOR, y guardando siempre una RELACIÓN igual a la raíz cuadrada del cociente de “n”, dividido entre “n – 1”, es decir:

$$\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

“Student” también observó, que las desviaciones reducidas de esta forma NO seguían la “Ley de distribución normal”; sino que, al ser representadas en un plano cartesiano, daban origen a una curva MÁS ACHATADA, o “platicúrtica”, cuanto MENOR hubiera sido el número de elementos, “n”, de la pequeña muestra.

Así logró construir una “tabla de valores intercuartiles” de esta distribución, de la cual mostramos un fragmento más adelante.

Ejemplo ilustrativo:

Veamos, mediante un ejercicio, la aplicación práctica de estos principios, al control de calidad, tan en uso hoy día en la vida real y actividades industriales venezolanas.

Supongamos una empresa avícola cuya producción de huevos vende clasificada en 3 calidades, en atención al peso. Tomamos de las 1.000 docenas de la producción de un día, 10 cajas de a docenas, enteramente al azar, y pesamos los huevos individualmente; observando entre ellos las siguientes discrepancias por el defecto, con respecto a los pesos medios establecidos:

| Caja N° | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|
| Defecto | 0 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 7 | 8 | 10 |

Siendo las desviaciones, con respecto a la media: - 4; - 4; - 3; - 2; - 1; 0; 1; 3; 4 y 6. Ya que la media sería = $40 / 10 = 4$.

Veamos qué conclusiones llegamos, al respecto al total de la producción del día. La desviación estándar, de acuerdo a la fórmula sería:

$$\sigma t = \sqrt{\frac{16 + 16 + 9 + 4 + 1 + 0 + 1 + 9 + 16 + 36}{10 - 1}} = \sqrt{\frac{108}{9}} = \sqrt{12} = 3,464101615$$

La desviación típica, con respecto a las medias de las 10 cajas del muestreo vendrá dada por:

$$\frac{3,464101615}{\sqrt{10}} = \frac{3,464101615}{3,162277666} = \mathbf{1,095445115}$$

INTERPRETACIÓN:

Necesitaremos de una tabla, como la siguiente, para conocer el grado de CONFIANZA, que nos merecen estos valores, obtenidos mediante el cálculo:

| ϑ | $(3\sigma)T_{995}$ | $(2\sigma)T_{95}$ | T_{90} | T_{80} |
|-------------|--------------------|-------------------|----------|----------|
| 1 | 63,7 | 3,3 | 3,1 | 1,38 |
| 2 | 9,9 | 2,9 | 1,9 | 1,01 |
| 3 | 5,8 | 2,4 | 1,6 | 0,98 |
| 4 | 4,6 | 2,1 | 1,5 | 0,94 |
| 5 | 4,0 | 2,0 | 1,5 | 0,92 |
| 6 | 3,7 | 1,9 | 1,4 | 0,91 |
| 7 | 3,5 | 1,9 | 1,4 | 0,90 |
| 8 | 3,4 | 1,9 | 1,40 | 0,89 |
| 9 | 3,3 | 1,8 | 1,38 | 0,88 |
| 10 | 3,2 | 1,0 | 1,37 | 0,88 |
| • | • | • | • | • |
| • | • | • | • | • |

Los grados de libertad ϑ .

En las fórmulas precedentes, hemos utilizado “n-1”, con lugar de “n”; debido al concepto de “Grado de libertad”, los cuales pueden definirse como:

- número de elementos que se pueden elegir libremente.
- número de elementos con posibilidades de variación en un conjunto.
- número de variables con plena libertad de variación.
- número de variables independiente en un conjunto muestral.
- número de observaciones independientes en un conjunto muestral.
- tamaño n de la muestra menos el número k de parámetros que deben hallarse por estima.

Esta última definición nos permite representar los grados de libertad mediante la expresión: $V = n - k$

Características:

- 1) Al igual que la distribución normal, es una distribución continua.
- 2) La distribución t tiene una media de cero, es simétrica respecto a la media, y se extiende hasta el infinito en ambas direcciones.
- 3) Tiene forma acampanada y simétrica.
- 4) No hay una distribución t, sino una familia de distribuciones t, todas con la misma media cero, pero con su respectiva desviación estándar diferente de acuerdo con el tamaño de la muestra n.
- 5) La distribución t – student, es más ancha y más plana en el centro que la distribución normal estándar como resultado de ello se tiene una mayor variabilidad en las medias de muestra calculadas a partir de muestras más pequeñas. Sin embargo, a medida que aumenta el tamaño de la muestra, la distribución t se aproxima a la distribución normal estándar.

En el siguiente video se le da un ejercicio de la distribución:

<https://www.youtube.com/watch?v=vNnakZ5oJTc>

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. Los puntajes de un grupo de estudiantes se comportan normal, con promedio de 50, sin embargo, Se tomó una muestra de 9 estudiantes encontrando una desviación de 6 y un promedio de 52. ¿Cuál es la probabilidad de que el promedio sea de 50?
2. Las puntuaciones en un test que mide la variable de creatividad de los adolescentes, siguen una distribución normal de media 11,5; en un centro escolar se ha implantado un programa de estimulación de creatividad tomando una muestra de 30 alumnos, la media muestral es de 12,47 y la desviación típica de 5,22. Determine: a) t_{α} , si el nivel de significación es del 95% b) t_c
3. Un fabricante de focos afirma que su producto dura en promedio 500 horas de trabajo, para conservar este promedio, el fabricante toma una muestra de 25 focos cada mes, y arroja un promedio de 505,36 horas, una desviación de 12,07 y un nivel de confianza del 90% determine el t_{α} y el t_c

LA DISTRIBUCIÓN “F” DE FISHER

La distribución de frecuencias “F”, llamada así en honor a su autor, R.A. Fisher, a principios de siglo, es la razón geométrica entre dos varianzas poblacionales ESTIMADAS, es decir:

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$$

En la cual: σ_1^2 = Varianza de la primera muestra

σ_2^2 = Varianza de la segunda muestra

Más adelante veremos por qué se utilizará siempre como numerador la varianza estimada, que resulte con mayor valor y el cociente mayor que la unidad.

También puede definirse la distribución “F”, como el cociente de dividir las razones geométricas de dos “chi-cuadradas” y sus respectivos grados de libertad, o sea:

$$F = \frac{\frac{X_2}{\vartheta_1}}{\frac{X_2}{\vartheta_2}} = \frac{X_1^2}{\vartheta_1} = \frac{X_2^2}{\vartheta_2} \quad \text{Fórmula 4.6b}$$

Cuando las varianzas que se contrastan sean iguales, desde luego que “F” resultará igual a la unidad. Las pequeñas diferencias, que se puedan observar en los cálculos de “F” podrán, o no, atribuirse al azar. Para ello habrá que tomar en consideración la distribución del estadístico “F”.

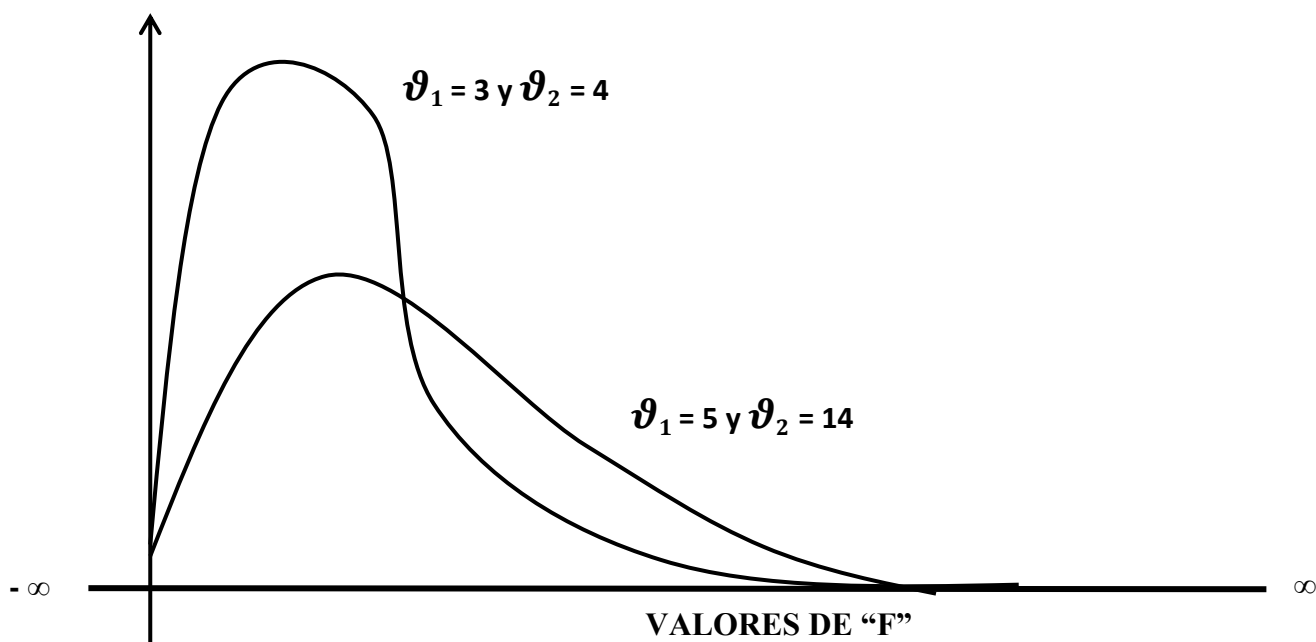
Este estadístico puede ser útil en la comprobación de dos tipos de hipótesis, a saber:

- a) Homogeneidad de dos varianzas, estimadas según muestreo; que será el caso que estudiaremos en este texto.
- b) Homogeneidad de tres, o más, medias aritméticas poblacionales, estimadas también de acuerdo a muestras. Esta problemática es sumamente compleja y extensa; siendo más propia de estudios más avanzados de Estadística, en lo atinente al “Análisis de la varianza”: Toda una disciplina nueva de análisis estadístico.

PROPIEDADES Y CARACTERÍSTICAS DE “F”

El estadístico “F” ostenta las siguientes propiedades y características, que lo hacen indispensable en campos específicos de la investigación:

- 1) Puede tomar valores desde cero, hasta más infinito.
- 2) Nunca resultará NEGATIVO, debido a que resulta del cociente de dos cuadrados, y todo cuadrado es positivo.
- 3) La curva de la distribución de “F” es siempre ASIMÉTRICA hacia la derecha y toma su forma, de acuerdo a los grados de libertad en juego; como sucede con chi-cuadrada.
- 4) En la medida que aumenten los grados de libertad considerados, la curva de la distribución “F” tiende a la simetría; tal puede verse en la siguiente ilustración:



FORMAS TÍPICAS DE LA CURVA DE DISTRIBUCIÓN DEL ESTADÍSTICO “F”.

Dónde: ν_1 = Grados de libertad del numerador en la fórmula 4.6b

Dónde: ν_2 = Grados de libertad del denominador en la fórmula 4.6b

- 5) Guarda estrecha relación con la distribución “Z”. Esta

$$F = e^{2Z} \quad \text{Fórmula 4.6.1b.}$$

Donde $e = 2,7182\ 8182\ 8459 \dots$ Número irracional, base de los logaritmos naturales o neperianos.

- 6) También guarda relación con la distribución de “Student”, en el sentido de que t^2 tiene una distribución de frecuencias igual a la de “F”, con UNO y $n - 1$ grados de libertad. Esto es fácilmente verificable, al comparar las tablas respectivas.

Ejemplo ilustrativo:

Consideremos los precios de la cebolla en muestreos realizados en Caracas y Barquisimeto, para averiguar si los precios promedios de la misma difieren significativamente entre una ciudad y otra.

A continuación mostramos, en forma tabular, los resultados de dichos muestreos; así como también los cálculos requeridos para la aplicación de las fórmulas estudiadas:

| Barquisimeto = X_1 | d_1 | d_1^2 | Caracas = X_2 | d_2 | d_2^2 |
|--------------------------------------|-------|-----------------|--------------------------------------|-------|-----------------|
| 8,25 | 0,70 | 0,49 | 8,50 | 0,55 | 0,3025 |
| 7,25 | -0,30 | 0,09 | 7,50 | -0,45 | 0,2025 |
| 7,50 | -0,05 | 0,0025 | 7,75 | -0,20 | 0,04 |
| 8,00 | 0,45 | 0,2025 | 8,25 | 0,30 | 0,09 |
| 6,75 | -0,80 | 0,64 | 7,60 | -0,35 | 0,1225 |
| | | | 8,10 | 0,15 | 0,0225 |
| $\sum = 37,75$ | | $\sum = 1,4250$ | $\sum = 47,70$ | | $\sum = 0,7800$ |
| $\bar{X}_1 = \frac{37,75}{5} = 7,55$ | | | $\bar{X}_2 = \frac{47,70}{6} = 7,95$ | | |
| $\vartheta_1 = 5 - 1 = 4$ | | | $\vartheta_2 = 6 - 1 = 5$ | | |

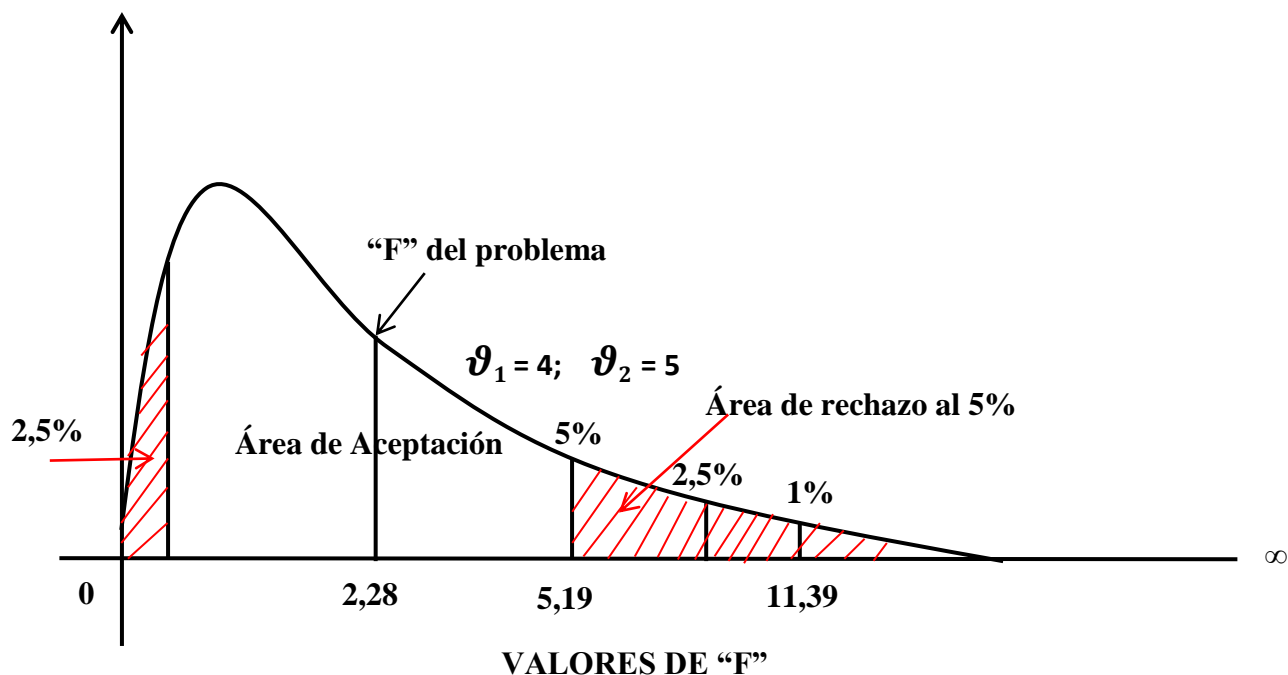
$$\sigma_1^2 = \frac{\sum d_1^2}{\vartheta_1} = \frac{1,415}{4} = \boxed{0,35625}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{\sum d_2^2}{\vartheta_2} = \frac{0,78}{5} = \boxed{0,156}$$

Para el cálculo de “F” se utilizará como numerador, en la fórmula 4.6b., la varianza estimada de mayor valor; para que el estadístico “F” resulte mayor que la unidad, que es como está dado en las tablas.

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{0,35625}{0,156} = 2,282653846 \approx \boxed{2,28}$$

Considerando un nivel de significación del 5%, tomaremos áreas del 2,5% para cada cola de la prueba, como sigue:



Decisión:

Como el valor de “F” cae dentro del área de aceptación, SE ACEPTA la hipótesis nula, que supone la HOMOGENEIDAD entre las dos muestras, es decir, que éstas pertenecen a una misma población; o sea, que la diferencia entre los precios medios de la cebolla en Barquisimeto y en Caracas NO ES SIGNIFICATIVO, y se explica fácilmente por el azar o errores de muestreo.

No hace falta conocer el valor límite de la “F” para el 2,5%; puesto que sobradamente el valor calculado de 2,28 cae a la izquierda, incluso, del valor del 5%, que es 5,19.

UNIDAD V ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS

Es un proceso fundamental en estadística que consiste en utilizar datos muestrales para inferir o aproximar los valores de los parámetros desconocidos de una población. Estos parámetros pueden ser, por ejemplo: la media, la varianza, la proporción, entre otros.

Existen dos tipos principales para la estimación de parámetros: la estimación puntual y la estimación por intervalos.

ESTIMACIÓN PUNTUAL

En la estimación puntual, se utiliza un único valor (llamado **estimador**) para aproximar el valor del parámetro poblacional desconocido. Este estimador se calcula a partir de los datos muestrales.

ESTIMACIÓN POR INTERVALOS

En la estimación por intervalos, el lugar de proporcionar un único valor, se construye un intervalo de confianza, contiene el valor del parámetro poblacional.

En este objetivo se trata el problema de la estimación de parámetros. Para ello, comenzamos recordando algunos conceptos básicos de la inferencia estadística que ya fueron introducidos en el tema anterior, y que serán necesarios para la construcción y el estudio de los estimadores:

Población: conjunto homogéneo de individuos sobre los que se estudian características observables con el objetivo de extraer alguna conclusión. Por abuso de notación, en ocasiones nos referimos a la distribución que sigue la variable de interés en vez de al conjunto de individuos. Así, se dice que estamos ante una población Normal indicando que la variable que nos interesa sigue una distribución normal.

Parámetro: característica de la población, como la media y la varianza (o desviación típica) en la distribución Normal o la probabilidad de éxito en la Binomial son

parámetros. Si conocemos su valor (o si somos capaces de aproximarlos con suficiente precisión) podremos responder a cualquier pregunta sobre la distribución.

Estadístico: cualquier función de la muestra. Por ejemplo, la media o la varianza muestrales son estadísticos.

Estimadores: son estadísticos independientes de los parámetros de la población, y que se utilizan para aproximarlos. Si θ es el parámetro de interés, el estimador se denotará por $\hat{\theta}$. En el caso de una población Normal, podemos considerar la media muestral como estimador de la media poblacional (es decir, $\bar{X} = \mu$) y la varianza muestral como estimador de la varianza poblacional ($s^2 = \sigma^2$). Para una distribución Bi (m, p), donde m denota el número de pruebas de Bernoulli, la proporción p se puede estimar a partir de la proporción poblacional (que denotaremos por p). Por tanto, \bar{X} , s^2 y p son estimadores puntuales de μ , σ^2 (en distribución Normal) y p (en distribución Binomial), respectivamente.

Método de muestreo: procedimiento para seleccionar una muestra. Si en una población queremos obtener una muestra de un cierto tamaño n (siendo n menor que el tamaño de la población), la manera de obtener esta muestra no es única. Los estimadores siempre suministran dispersión aleatoria. Como sabemos del monográfico sobre muestreo, el conjunto de todas las muestras de un mismo diseño que provienen de una misma población suministra valores diferentes. Esta circunstancia indica que existe una variación aleatoria con la que hay que vivir porque es inevitable.

Es posible que el estimador escogido tenga sesgo, es decir, que no solo esté alrededor de un punto, sino que el punto sobre el que varía no es el valor poblacional, verdadero u objetivo de nuestro interés. Esto si es evitable. Así que los estimadores que utilizamos intentamos que sean insesgados, es decir, que carezcan de sesgo.

El recurso que utilizamos para ello es el valor esperado, es decir la media aritmética de la distribución muestral del estimador. El valor esperado es, como dice la

expresión, el valor que esperamos. Cabe elegir un estimador tal que el valor esperado coincida con el parámetro. Esto ocurre si utilizamos la media aritmética de la muestra como estimador de la media aritmética de la población, pues $E(X) = \mu$.

También ocurre con las proporciones, pues $E(p) = \pi$. Pero no ocurre así con la varianza (y, por tanto, tampoco con la desviación tipo). En el muestreo aleatorio simple donde las poblaciones son de gran tamaño, es la cuasi varianza el estadístico escogido como estimador de la varianza poblacional, es decir, la cuasi varianza es un estimador insesgado de la varianza poblacional.

Por ejemplo, podemos tener interés en conocer cuántas personas votarán al partido HH en las próximas elecciones o cuántos cigarrillos o cuantos cigarrillos van a consumirse en el mes de abril. Para responder, utilizamos un recurso indirecto que parte de una estimación previa, bien sea de una media aritmética o de una proporción.

EJEMPLO:

Supongamos que la población que nos interesa cuenta con un millón de habitantes, tomando una muestra de 200 personas, de los que 38 dicen que votarán por el partido HH, esto significa que: $38 / 200 * 100 = 19\%$.

Una estimación puntual establece que el 19% de la población votará a HH, como hay un millón de habitantes, entonces, podemos determinar:

$$1.000.000 * 19/100 = 190.000 \text{ personas.}$$

Supongamos también que se fuman 50 cigarrillos por término medio cada mes. Si ese es el valor de la media aritmética de la muestra, la estimación puntual afirmará que en la población se fumarán 50 cigarrillos por persona durante el mes de abril, por término medio.

Como hay un millón de habitantes, para el mes de abril habrán consumido 50 millones de cigarrillos, así pues, en la estimación de totales no realizamos un camino alternativo específico, sino que ampliamos la estimación realizada previamente, sea de una proporción o de una media.

ESTIMACIÓN POR INTERVALOS PARA LA MEDIA Y LA PROPORCIÓN

Intervalo de confianza: Es aquel intervalo que, con cierto nivel de confianza, contiene al parámetro que se está estimando. Se llama intervalo de confianza a un par o varios pares de números entre los cuales se estima que estará cierto valor desconocido con una determinada probabilidad de acierto. Formalmente, estos números determinan un intervalo, que se calcula a partir de datos de una muestra, y el valor desconocido es un parámetro poblacional.

Nivel de confianza: Es la probabilidad de éxito, es el intervalo calculado que contiene el verdadero valor del parámetro $(1 - \alpha)$. En estas circunstancias, α es el llamado error aleatorio o nivel de significación, esto es, una medida de las posibilidades de fallar en la estimación mediante tal intervalo.

El nivel de confianza y la amplitud del intervalo varían conjuntamente, de forma que un intervalo más amplio tendrá más probabilidad de acierto (mayor nivel de confianza), mientras que, para un intervalo más pequeño, que ofrece una estimación más precisa, aumenta su probabilidad de error.

Intervalo de confianza para la media de una población: Dado una población con media μ y desviación típica σ , se pueden demostrar que la media de todas las medias muestrales coincide con la media poblacional.

Pero, además, si el tamaño de las muestras es lo suficientemente grande, o la distribución poblacional es normal, la distribución de medias muestrales es, prácticamente, una distribución normal (o gaussiana) con media μ y una desviación típica dada por la siguiente expresión:

Desviación típica es:

$$\sigma_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

En la distribución normal de medias se puede calcular el intervalo de confianza donde se encontrará la media poblacional si solo se conoce una media muestral (\bar{X}), con una confianza determinada, habitualmente se manejan valores de confianza del 95% y del 99%.

Fórmula para determinar el Intervalo de confianza para la media:

$$\bar{x} \pm Z\alpha/2 * \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

EJEMPLO:

Para una muestra de 81 habitantes de cierta población se obtuvo una estatura media de 167 cm, por estudios anteriores se sabe que la desviación típica de la altura de la población es de 8 cm, construya un intervalo de confianza para la estatura media de la población al 95%.

SOLUCIÓN:

Datos:

$$\begin{aligned} n &= 81 \\ \bar{x} &= 167 \text{ cm} \\ \sigma &= 8 \text{ cm} \\ 1 - \alpha &= 95\% \text{ (Utilizando la tabla de distribución normal, } Z = 1,96) \end{aligned}$$

Empleando la fórmula anterior se tiene lo siguiente;

$$167 \pm 1,96 * 8/\sqrt{81} \rightarrow 167 \pm 1,74 \begin{cases} \nearrow 167 + 1,74 = 168,74 \\ \searrow 167 - 1,74 = 165,26 \end{cases}$$

El intervalo de confianza (IC), queda de la siguiente manera, IC: $165,26 \leq \mu \leq 168,74$
 Estimación de parámetros para la proporción:

Construiremos intervalos de confianza para la proporción p en la distribución Binomial y para la media μ en la distribución Normal. Los estimadores que hemos introducido para la proporción y la media (\hat{p} y \bar{X} , respectivamente) son simétricos y podemos calcular o aproximar su error típico.

Consideremos \hat{p} , proporción muestral, como estimador de p , podemos construir un intervalo de confianza de nivel (cobertura) $(1 - \alpha)$ para p . En este caso, el error típico se aproxima por $\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})/n}$ y, dado que \hat{p} tiene una distribución Normal, consideramos los cuartiles de una $N(0, 1)$. En concreto, para los intervalos de confianza usuales.

Fórmula para calcular intervalo de confianza para la proporción:

$$\hat{p} \pm z_{1 - \alpha/2} \sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p}) / n}$$

Ejemplo:

Una máquina fabrica piezas de precisión y en una caja de 200 piezas, resultan 7 piezas defectuosas, a un nivel de confianza del 99%, ¿Entre que valores se puede esperar que esté la verdadera proporción de piezas defectuosas por la máquina?

SOLUCIÓN:

Datos:

- $n = 200$ piezas (7 piezas defectuosas)
- \hat{p} = probabilidad de piezas defectuosas
- \hat{q} = probabilidad de piezas buenas
- $1 - \alpha = 99\%$ (Por la tabla de la distribución normal, $Z_{99\%} = 2,58$)
- $\hat{p} = 7/200 = 0,035$

$$\hat{q} = 1 - \hat{p} = 1 - 0,035 = 0,965$$

Aplicando la fórmula se tiene:

$$= 0,069 \quad 0,035 \pm 2,58 * \sqrt{(0,035 * 0,965/200)} = 0,035 \pm 0,034$$

$0,035 + 0,034 = 0,069$

$0,035 - 0,034 = 0,001$

$$\text{IC: } 0,001 \leq \hat{p} \leq 0,069$$

UNIDAD VI PRUEBA DE HIPÓTESIS

CONTRASTE DE HIPÓTESIS, ESTADÍSTICAS, HIPÓTESIS NULA, ALTERNA

Los métodos de contraste de hipótesis son modelos utilizados en inferencia estadística cuyo objetivo es comprobar si una estimación se adapta a los valores poblacionales. El objetivo de los métodos de contraste de hipótesis es comprobar si una estimación se adapta a la realidad de forma fiable.

Los supuestos se denominan hipótesis paramétricas. Es decir, se establece un criterio de decisión. Si con esa condición se acepta la hipótesis de referencia, entonces podemos afirmar con cierta probabilidad que la estimación puede ser muy cercana al supuesto valor real.

Prueba de Hipótesis: Es un procedimiento estadístico por medio del cual se toma una muestra de una población y con los datos de la muestra se trata de estimar si un parámetro es igual o no a uno preestablecido.

Es decir, se formulan hipótesis y se verifica si se puede rechazar o aceptar dicha hipótesis. En todo contraste de hipótesis existen dos supuestos. La Hipótesis nula (H_0), que recoge la idea de que un valor tiene un valor predeterminado. Si se rechaza la hipótesis nula (H_0), entonces se acepta la Hipótesis alternativa (H_1).

Para profundizar los conocimientos sobre el contraste de Hipótesis revisar el siguiente link:
https://es.wikipedia.org/wiki/Contraste_de_hip%C3%B3tesis

TIPO DE HIPÓTESIS

HIPÓTESIS NULA (H_0)

Inicialmente la hipótesis estadística no tiene que ajustarse netamente a la lógica deductiva, al extremo de que es usual que se formule una hipótesis descabellada, con el deliberado propósito de, más tarde, desvirtuar su realidad al verificar que es falsa o hipótesis nula, H_0 ; con lo cual se logra reforzar algunas otras hipótesis alternas H_1 , H_2 , entre otras, diferentes.

La hipótesis nula es la que se quiere verificar o someter a prueba. Cuando resulta rechazada, se supone que se aceptan otra hipótesis alterna propuesta de antemano.

Error de Muestreo

Conviene antes de seguir adelante, que el estudiante se forme una idea clara y precisa de la diferencia que existe entre el concepto de desviación estándar y el de error estándar. Para facilitar las cosas, vamos a dejar de lado la terminología clásica y utilicemos mejor un lenguaje sencillo y la ilustración de un ejemplo práctico:

Desviación estándar, es una medida que nos dice que tanto se alejan del promedio los elementos que conforman la muestra estadística. Por ejemplo: Cuando decimos que, en los exámenes finales, de todos los primeros años, la nota promedio fue de 14 puntos, con una desviación estándar de 5 puntos; esto quiere decir que dichos estudiantes obtuvieron una nota de 14 ± 5 puntos, es decir, unas calificaciones que oscilan entre 9 y los 19 puntos.

Este sería el puntaje para toda la población que integra todos los cursos de primer año.

Error Estándar, en cambio, nos indica la variación de las medias aritméticas (o proporciones) de un conjunto de muestras, de un mismo tamaño tomadas del mismo universo.

Por ejemplo: si tomamos una serie de muestra de 40 estudiantes de los mismos primeros años considerados, notaremos una variación en sus notas con respecto al mismo promedio.

El error estándar nos permite medir el error de muestreo, otro concepto que hay que considerar.

Error de muestreo es aquel originado por el hecho de que cada uno de los elementos, que forman la población, son diferentes entre sí y, por lo tanto, también resultarán diferentes las muestras del mismo tamaño, que de dicha población se tomen; lo cual da origen a que los estadísticos, que se obtengan, resultarán con pequeñas diferencias, con respecto a los promedios de la misma población.

Los errores de muestreo no deben confundirse con los errores humanos, por cansancio, por inexperiencia, por insuficiencia o defecto de los equipos, entre otros; los cuales resultan imponderables e incorregibles, una vez cometidos. Afortunadamente, como suelen cometerse, tanto en el sentido positivo, como en el negativo, tienen la tendencia a compensarse por sí mismo y, ni siquiera el mismo investigador llega a enterarse de su existencia.

Errores de Tipo I y Tipo II

Al someterse a pruebas una hipótesis estadística, podríamos incurrir en dos tipos de errores perfectamente bien tipificados que son:

Tipo I: Cuando una hipótesis, que habíamos descartado, creyéndola falsa, resulte verdadera.

Tipo II: Cuando una hipótesis aceptada como buena, resulta que es falsa.

En forma resumida y esquemáticamente las diferentes alternativas a que nos conducirán la escogencia o aceptación de la hipótesis nula o la alternativa, así como los riesgos de cometer error de **Tipo I** o error **Tipo II** la podemos representar de la manera siguiente:

| HIPÓTESIS | | |
|--------------|---------------------|----------------------|
| ALTERNATIVAS | VERDADERA | FALSA |
| Aceptar | Acierto | Error Tipo II |
| Rechazar | Error Tipo I | Acierto |

La probabilidad de cometer un error de **tipo I** se expresa por alfa (α), y la de cometer error de **tipo II** por beta (β).

A los valores de alfa y beta se le llama niveles de significación de los cuales volveremos a hablar más adelante.

El investigador podrá y deberá escoger de antemano el nivel de significancia alfa (α), pero no así el de beta (β).

Los niveles de alfa (α) más comúnmente utilizados son los del 1% y el 5%, o sea, los de 0,01 y 0,05, en valores unitarios.

Se comete error de **tipo I**, cuando se descarta la hipótesis nula, siendo correcta; es decir, cuando aceptamos la hipótesis alternativa, siendo la hipótesis nula la verdadera. Posteriormente veremos que estos dos tipos de errores son completamente excluyentes entre sí, lo que origina que en la medida que nos cuidemos de no cometer uno cualquiera de ellos, nos arriesgamos más a cometer el error del otro tipo.

El equilibrio ideal sería el de la reducción de alfa y de beta a sus valores mínimos posibles, lo cual, desafortunadamente, no es tan fácil en la realidad.

Procuremos ilustrar esta situación mediante un pequeño ejemplo: Consideremos el caso de una empresa que elabora alimentos para diferentes empresas de aviación, en el aeropuerto internacional Simón Bolívar y que, entre uno de sus platos figura "pechugas a la cantimplora" y que, además, por su propia conveniencia, las solicite a su proveedor con específicas normas de calidad en cuanto a peso, contenido graso, apariencia, entre otros.

Desde luego que no va a asignar a un empleado para que pese y revise la calidad de cada una de los miles de pechugas que recibe, en cada oportunidad; sino que efectuará un muestreo y de acuerdo al mismo, aceptará o rechazará cada lote; arribando a la siguiente situación en cada caso:

- Alfa (α), rechaza el lote, siendo bueno = error de **tipo I**.
- Beta (β), aceptar el lote, siendo malo = error de **tipo II**.
- Lambda (λ), aceptar el lote, siendo bueno = no cometer error
- Omega (Ω), rechazar el lote, siendo malo= no comete error.

En caso de que la decisión conduzca a la situación alfa, la empresa no sufrirá menoscabo, a no ser las protestas de su proveedor y/o eventuales demora en recibir su materia prima.

Pero, si la decisión que se tome conlleva a la situación beta, entonces sí sufrirá consecuencias pecuniarias y en su prestigio, puesto que el producto que ofrecerá al público será de inferior calidad.

Interpretación de los errores.

De acuerdo a cada caso en particular un tipo de error puede ser más significativo e influyente que el otro, pero como tales errores son excluyentes uno con respecto al otro, el esfuerzo que se haga para reducir las posibilidades de uno tenderá a facilitar la ocurrencia en el otro.

La mejor alternativa, en todo caso, será la de tratar de ampliar el tamaño de la muestra, siempre y cuando sea posible.

El resultado de una prueba estadística se considera significativo, si hay sólo una posibilidad en cien, de que el hecho sea una coincidencia.

El Nivel Significación.

Es el grado de probabilidad máxima de riesgo admisible en la hipótesis. Se suele establecer antes de efectuar la prueba y representar unitaria o porcentualmente.

Por ejemplo: si queremos tener un tanto por ciento de riesgo no mayor del 5% de cometer error **tipo I**, estableceremos un "nivel de significación" de alfa igual al 5%; con lo cual obtendremos un grado de certeza o de acierto en nuestra hipótesis, igual a un 95%, o sea, de un 0,95 unitario.

Dicho de otro modo, en este caso tendremos una probabilidad de error en nuestra hipótesis de cinco en cada 100 casos. En general, los niveles de significación más utilizados son los del 5% y del 1%.

Los niveles de significación son los linderos entre lo probable y lo improbable, es decir, entre aceptar, o no, la hipótesis nula, y su fijación dependerá del caso en particular y del criterio del investigador.

A continuación, mostramos, en forma tabular, los valores críticos de "Z", correspondiente a los niveles de significación más comúnmente utilizados, para pruebas de hipótesis de una y de dos colas, que de inmediato estudiaremos:

| NIVELES DE SIGNIFICACIÓN | VALORES CRÍTICOS DE Z PARA | | |
|--------------------------|----------------------------|---------|------------|
| | UNA COLA A LA | | DOS COLAS |
| | IZQUIERDA | DERECHA | |
| 10% = 0,10 | - 1,28 | 1,28 | +y – 1,645 |
| 5% = 0,05 | - 1,645 | 1,645 | +y – 1,96 |
| 1% = 0,01 | - 2,33 | 2,33 | +y – 2,58 |
| 0,5% = 0,005 | - 2,58 | 2,58 | +y – 2,81 |
| 0,2% = 0,002 | - 2,88 | 2,88 | +y – 3,08 |

Cálculo del Nivel de Significancia en la Distribución Normal.

El procedimiento general por la obtención de nivel de significancia de una hipótesis mediante la “estandarización de la variable”, utilizando la fórmula usual, estudiada ampliamente y ejercitada con profusión en el citado texto de Estadística II.

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

\bar{X} = valor promedio de la muestra

μ = valor promedio de la población= np

σ = desviación estándar= \sqrt{npq}

p = probabilidad de éxito

q= probabilidad de fracaso

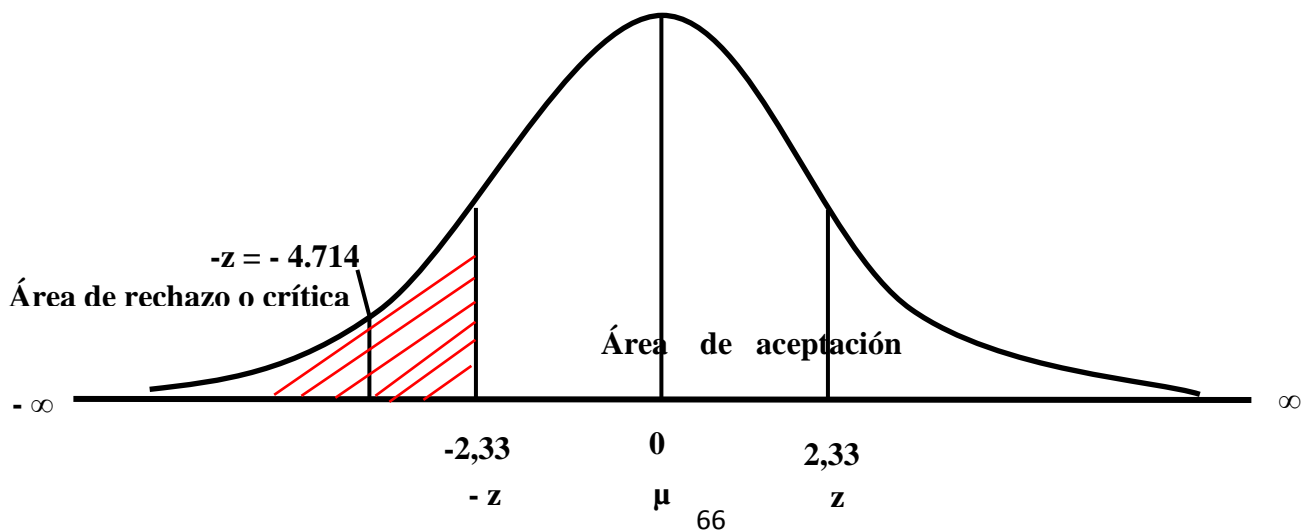
n = número de elementos de la muestra

Ejemplo ilustrativo.

Vamos a suponer que queremos lanzar al mercado una nueva droga anticonceptiva, de uso delicado; por lo cual la ley exige un grado de tolerancia en las personas no menor del 90%.

Luego de probar la citada medicina en una muestra de 200 señoras voluntarias, constatamos que, de ellas solamente 160 la toleraron perfectamente bien.

La droga cumplirá con los requisitos legales, cuando "p" resulte igual, o menor, que 0,99; asumiendo un nivel de significación del 1%. Es decir, gráficamente representado:



“PRUEBA DE UNA COLA”

En la tabla 3.5 a, de los valores críticos de "Z", vemos que, para un “Nivel significación” del **1%**, para pruebas de una sola cola, a "Z" corresponde un valor de **-2,33** por simetría de la curva normal.

La prueba será de una sola cola, cuando el límite de aceptación de la hipótesis sea una cifra, o algún valor menor, o una cifra, y alguna cantidad mayor. O sea, un valor como máximo; o algún valor como mínimo.

Aplicando ahora las fórmulas anteriores, tenemos, para una hipótesis nula de,

$$H_0 = p > 0,90$$

$$H_1 = p < 0,90$$

$$\bar{x} = np = (200)(0,90) = 180$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{(200)(0,90)(0,10)} = \sqrt{18} = 4,2426$$

Ahora, al normalizar el valor de 160, nos resulta:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma}$$

$$Z = \frac{160 - 180}{4,2426} = \frac{-20}{4,2426} = -4,714$$

Es decir, un valor menor que el de $Z = -2,33$; establecido en la tabla 3.5, lo cual es **INDICACIÓN** de que la hipótesis resulta **DESECHADA** y la droga **NO CUMPLE** con los mínimos legales de tolerancia.

La hipótesis nula resultará **RECHAZADA** siempre que su variable tipificada o estandarizada, caiga dentro del área crítica o de rechazo, como se ilustra en la figura 3.5.1.1^a.

Cuando se desee un grado de confianza del 95%, la estancia estandarización de la variable de la muestra ha de tener un valor comprendido entre -1,96 y 1,96; ya que el área comprendida entre estos dos valores es igual al 0.95, tal cual como vemos en la siguiente ilustración:

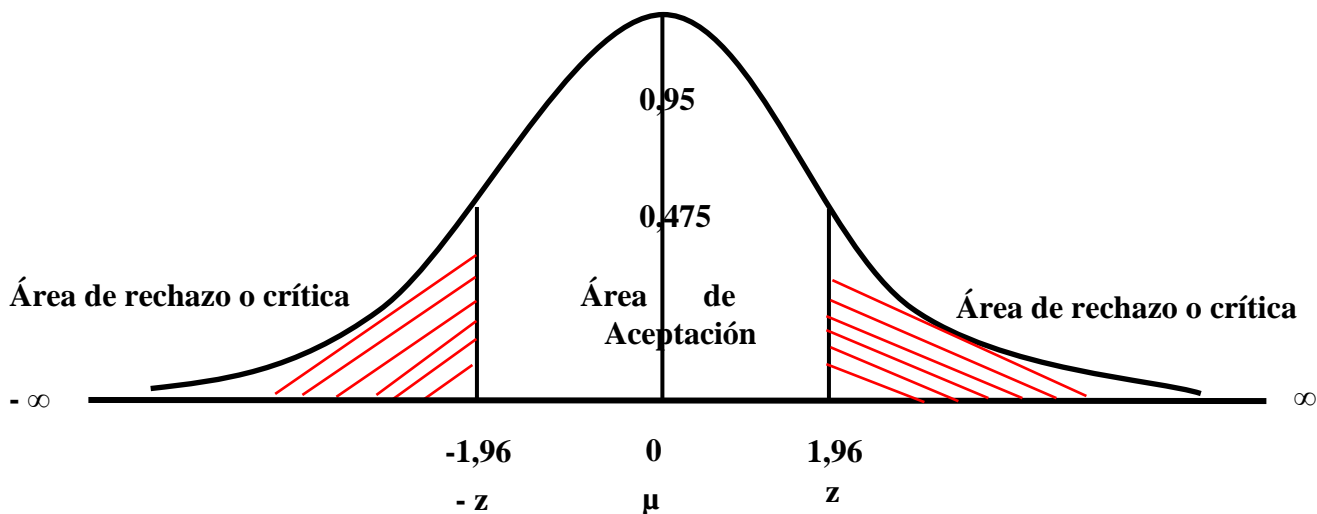


Figura: 3.5.1.1b

“PRUEBA DE DOS COLAS”

En tal caso, la hipótesis de estudio, o "Hipótesis nula, H_0 " habrá de descartarse cuando, al estandarizar la variable de la muestra, se obtengan valores que se salgan de los márgenes citados de -1,96 y 1,96; o sea, del **ÁREA DE ACEPTACIÓN**.

Es decir, cuando: $-1,96 > Z > 1,96$ o, dicho de otro modo: cuando el valor de "Z" caiga dentro del **ÁREA CRÍTICA** o de **RECHAZO**.

Ejemplo: el rendimiento medio diario por máquina es de 100 kg en cierta fábrica, con una desviación estándar de 18 kg de producto elaborado. Luego de la adopción de un nuevo procedimiento de fabricación, se toma una muestra de 81 máquinas y se nota que la

producción media resulta de 105 kg por día.

Se quiere saber si este incremento de la productividad se debe al azar o al nuevo procedimiento de elaboración, considerando un nivel de significancia del 1%. Aquí tenemos:

$$H_0: X = 100$$

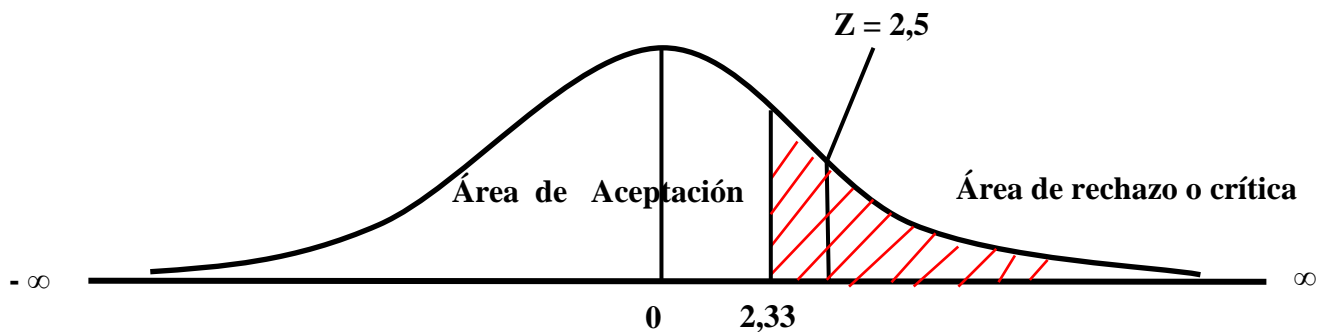
$$H_1: X > 100$$

Desviación típica es:

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{18}{\sqrt{81}} = \frac{18}{9} = 2$$

$$Z = \frac{X - \bar{X}}{\sigma_{\bar{X}}} = \frac{105 - 100}{2} = 2,5$$

Lo que conduce a una situación, que gráficamente puede representarse así:



EXPLICACIONES:

- El valor $Z = 2,33$ lo obtenemos de la tabla 3.5a de sus valores críticos y es el que corresponde al nivel de significancia del 1%, para pruebas de una sola cola a la derecha.
- se adopta una prueba de una sola cola, porque la hipótesis alternativa, H_1 , tiene un valor **ÚNICAMENTE** mayor que el de la hipótesis nula.

- c) la tabla 2.2.1a, de las áreas de probabilidades, nos proporciona el área correspondiente bajo la curva normal, entre el cero y $z = 2,33$; con un valor de 0,4938. Pero, el área crítica que se señala sombreada en el dibujo precedente, sería su complemento para igualar el área de 5,000 que queda a la derecha del cero. Así que dicha área de rechazo sería $5,000 - 0,4938 = 0,0062$.

Esta explicación no es rigurosamente necesaria, puesto que, para el caso, no es indispensable el cómputo porcentual del área crítica. Se explica para que el estudiante pueda asociar ideas con la distribución normal y tenga una visión más amplia a la problemática involucrada.

- d) la hipótesis nula queda **DESCARTADA** y, automáticamente aceptada la hipótesis alterna, de que la media es superior a 100 kg; porque el valor tipificado de la media muestral cayó dentro del **ÁREA CRÍTICA O DE RECHAZO**, lo que quiere decir que sí hay una diferencia significativa entre las medias antigua y la nueva, y ello se debe naturalmente, al nuevo procedimiento de fabricación.

Ejemplo:

El crecimiento de una planta, al mes de sembrada, suele ser de 90 cm, con una aproximación más o menos 24 cm. Luego de probar un nuevo abono, se toma una muestra de 16 plantas y se nota una altura media de 99 cm. ¿Se deberá este incremento al nuevo abono; considerando un nivel de significación del 5%?

En este caso:

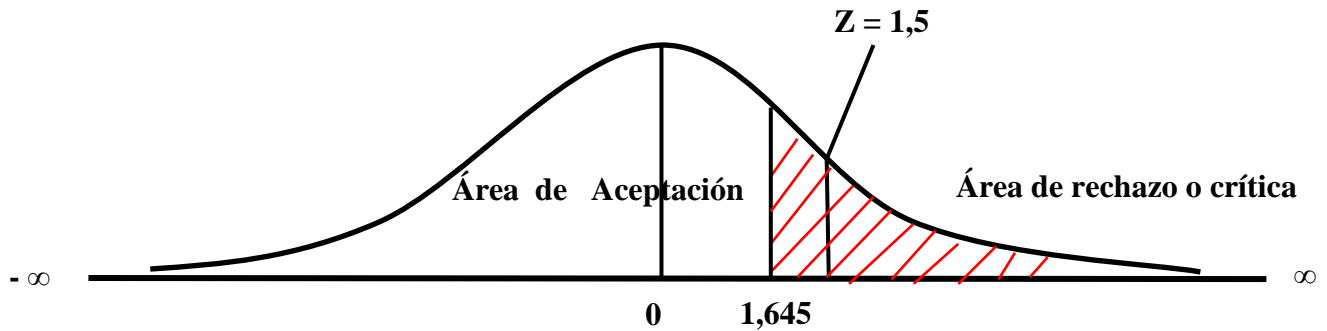
$$\begin{aligned} H_0: & \bar{X} = 90 \\ H_1: & X_1 > 90 \end{aligned}$$

Desviación típica es:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{24}{\sqrt{16}} = \frac{24}{4} = 6$$

$$Z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{99 - 90}{6} = 1,5$$

La situación, representada gráficamente, como debe hacerlo siempre el estudiante, sería la siguiente:



Esto quiere decir, que la hipótesis nula **SE ACEPTA** como buena, o sea, que la media aritmética correcta de la población sigue siendo $\bar{x} = 90$ cm y que, la diferencia observada en la muestra puede ser explicada fácilmente por el azar.

RECURSOS INTERACTIVOS

TEMA NO. 01: TEORÍA DE LAS PROBABILIDADES

VÍDEO NO. 01: Teoría de las Probabilidades.

<https://youtu.be/0lxZMaoeUno>

VÍDEO NO. 02: Experimentos Aleatorios

<https://youtu.be/FTIS83G7aC8>

VÍDEO NO. 03: Regla de la Suma.

<https://youtu.be/yPXreAHcfJg>

VÍDEO NO. 04: Regla del Complemento.

<https://youtu.be/xZeHDwrPG9U>

TEMA NO. 02: DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

VÍDEO NO. 01: Variables Aleatorias Discretas y continuas.

https://www.youtube.com/watch?v=_wonmKS4Blk&list=PL3KGq8pH1bFRXWIf8UiELhHHd0DoTw9Qh&index=1

VÍDEO NO. 02: Variables Aleatorias Discretas y Continuas.

<https://www.youtube.com/watch?v=4d5rKHdzS10&list=PL3KGq8pH1bFRXWIf8UiELhHHd0DoTw9Qh&index=2>

VÍDEO NO. 03: Función de Probabilidad.

<https://www.youtube.com/watch?v=7mF89j-rCoE&list=PL3KGq8pH1bFRXWIf8UiELhHHd0DoTw9Qh&index=3>

VÍDEO NO. 04: Media o Valor Esperado.

<https://www.youtube.com/watch?v=-v3st4h0HdE&list=PL3KGq8pH1bFRXWIf8UiELhHHd0DoTw9Qh&index=7>

VÍDEO NO. 05: Varianza y Desviación.

<https://www.youtube.com/watch?v=oB48B-WUwJk&list=PL3KGq8pH1bFRXWIf8UiELhHHd0DoTw9Qh&index=8>

TEMA NO. 3: MODELOS PROBABILÍSTICOS

VÍDEO NO. 01: Distribución de Bernoulli.

<https://youtube.com/watch?v=olGbPzIGJ4M&si=EnSlkaIECMiOmarE>

VÍDEO NO. 02: Distribución Binomial.

<https://youtube.com/watch?v=-XxZGvNCIkg&si=EnSlkaIECMiOmarE>

VÍDEO NO. 03: Distribución Binomial.

<https://www.youtube.com/watch?v=HJgJGYDXojk&list=PL3KGq8pH1bFTotSIEStmW6zkYj7m3RQHC&index=81>

VÍDEO NO. 04: Distribución de Binomial.

<https://www.youtube.com/watch?v=8z2UOjOliHA&list=PL3KGq8pH1bFTotSIEStmW6zkYj7m3RQHC&index=83>

VÍDEO NO. 05: Distribución de Poisson.

<https://www.youtube.com/watch?v=PMX75m4-s9A&list=PL3KGq8pH1bFTotSIEStmW6zkYj7m3RQHC&index=95>

VÍDEO NO. 06: Distribución de Poisson.

<https://www.youtube.com/watch?v=x9jF11I5x-g&list=PL3KGq8pH1bFTotSIEStmW6zkYj7m3RQHC&index=96>

TEMA NO. 04: DISTRIBUCIÓN NORMAL

VÍDEO NO. 01: Distribución Normal.

https://www.youtube.com/watch?v=T7_ktqfVseU&list=PL3KGq8pH1bFTotSIEStmW6zkYj7m3RQHC&index=90

REFERENCIA BIBLIOGRÁFICA

Valera R. *Manual de Estadística Básica*. 4ta

Dura Peiró, J. M. y López Cuñat, J.M. (1992) *Fundamentos de Estadística. Estadística Descriptiva y Modelos Probabilísticos para la Inferencia*. Madrid: Ariel Editorial

Martin Pliego, F. y Ruiz – Maya, L. (1995) *Estadística I: Probabilidad*. Madrid: AC.

Montiel, A.M., Rius, F. y Baron, F.J. (1997) *Elementos Básicos de Estadística Económica y Empresarial*.

Madrid: Prentice Hall