

ELECTRÓNICA DIGITAL

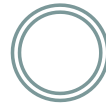


NOCIONES DE ÁLGEBRA BOOLEANA

MAPA DE KARNAUGH

FUNCIÓN CANÓNICA SIMPLIFICADA

MAPA DE KARNAUGH



La forma canónica de una función lógica puede resultar extensa, con una gran cantidad de términos, lo cual complica el análisis y procesamiento de dicha expresión. Una herramienta gráfica que se usa para representar funciones booleanas de forma simplificada se conoce como **mapa de Karnaugh**, el cual es una representación bidimensional de la tabla de la verdad de la función a simplificar, ya que posee un cuadro por cada fila de la tabla de la verdad. El mapa de Karnaugh es un procedimiento alternativo a la simplificación de funciones booleanas mediante axiomas y teoremas del álgebra booleana, que aprovecha la capacidad del cerebro para trabajar mejor con patrones gráficos que con ecuaciones y expresiones analíticas.

MAPA DE KARNAUGH: Es un diagrama utilizado para la simplificación de funciones booleanas en forma canónica, permitiendo obtener la forma canónica mínima de una función booleana, es decir, la función canónica con el mínimo número de términos. Se puede utilizar para funciones de hasta seis variables, pero se usa fundamentalmente para simplificar funciones de hasta cuatro variables.

CONSTRUCCIÓN DEL MAPA DE KARNAUGH DE UNA FUNCIÓN BOOLEANA



Dada la tabla de la verdad de una función booleana de n variables:

1. Se dividen las n variables de entrada en dos grupos, en el mismo orden de la tabla de la verdad. El primer grupo será de n_1 variables y el segundo grupo será de n_2 variables. Si n es par, n_1 será igual a n_2 , es decir, $n_1 = n_2 = n/2$, y si n es impar, n_1 será menor que n_2 por uno, es decir, n_1 tendrá una variable menos que n_2 , o lo que es lo mismo $n_1 = n_2 - 1$. Ej.:

a) Variables de entrada: **A, B, C, D**

$n = 4$ (par)

$n_1 = n_2 = n/2 = 2$

Grupo 1: A, B

Grupo 2: C, D

b) Variables de entrada: **A, B, C**

$n = 3$ (impar)

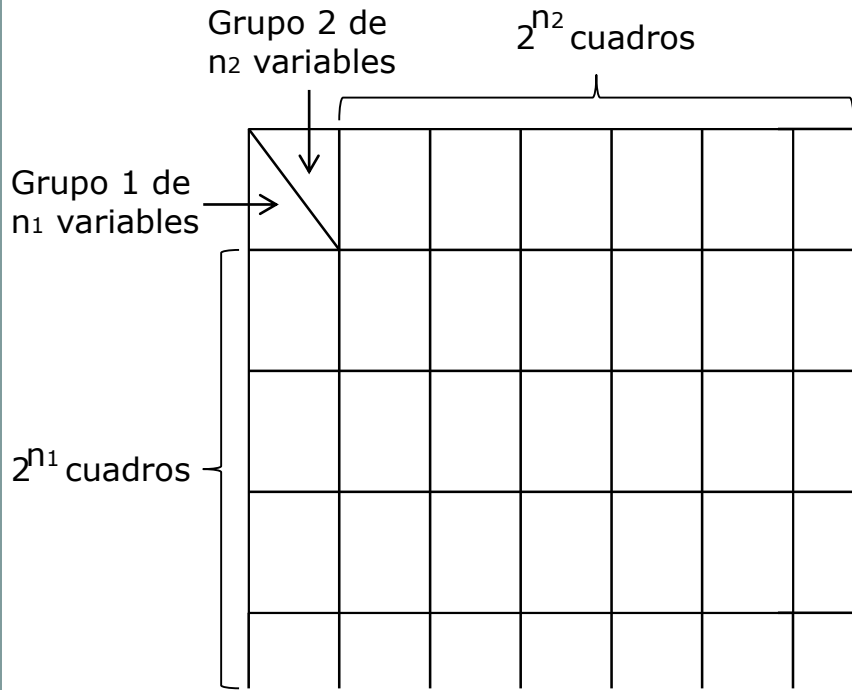
$n_1 = 1, n_2 = 2$

Grupo 1: A

Grupo 2: B, C

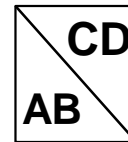
2. Se dibuja una tabla que tenga las características de la tabla mostrada a continuación y se escriben las variables en el cuadro de la esquina superior izquierda como se muestra:

CONSTRUCCIÓN DEL MAPA DE KARNAUGH DE UNA FUNCIÓN BOOLEANA (cont.)

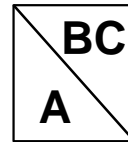


Colocación de las variables en el cuadro de la esquina superior izquierda para las tablas (a) y (b) del punto anterior:

a) Tabla (a) variables: **A, B, C, D**



b) Tabla (b) variables: **A, B, C**



- Se escriben en la primera columna (izquierda) todas las combinaciones de valores del primer grupo de variables, de arriba hacia abajo, y en la primera fila (superior) todas las combinaciones de valores del segundo grupo de variables, de izquierda a derecha, considerando en ambos casos que de un cuadro al siguiente solo puede cambiar de valor una sola variable. Ej.:

CONSTRUCCIÓN DEL MAPA DE KARNAUGH DE UNA FUNCIÓN BOOLEANA (cont.)



a) Variables de entrada: **A, B, C, D**

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

b) Variables de entrada: **A, B, C**

BC \ A	00	01	11	10
0				
1				

- Se llenan los cuadros restantes con los valores de la variable de salida correspondientes a cada combinación de valores de las variables de entrada en la tabla de la verdad.

CONSTRUCCIÓN DEL MAPA DE KARNAUGH DE UNA FUNCIÓN BOOLEANA (cont.)



a) Variables de entrada: **A, B, C, D**

b) Variables de entrada: **A, B, C**

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01		1		
11				
10				

Valor de la variable de salida correspondiente a la combinación **0101** de la tabla de la verdad

BC \ A	00	01	11	10
0				
1			0	

Valor de la variable de salida correspondiente a la combinación **111** de la tabla de la verdad

CONSTRUCCIÓN DEL MAPA DE KARNAUGH DE UNA FUNCIÓN BOOLEANA (cont.)



a) Variables de entrada: **A, B, C, D**

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

b) Variables de entrada: **A, B, C**

BC \ A	00	01	11	10
0	1	0	0	1
1	1	1	0	0

Valores de la variable de salida correspondientes a todas las combinaciones de las variables de entrada de la tabla de la verdad

CONSTRUCCIÓN DEL MAPA DE KARNAUGH DE UNA FUNCIÓN BOOLEANA (cont.)



5. Se agrupan los unos (**1's**) cumpliendo las siguientes condiciones:
- ✓ Los grupos deben ser lo más grandes posibles.
 - ✓ Debe haber la menor cantidad de grupos posible.
 - ✓ La cantidad de unos (**1's**) en un grupo debe ser igual a 2^n , con $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, es decir, los grupos pueden tener **1, 2, 4, 8, 16, ...** unos (**1's**), y no puede haber grupos con **3, 5, 6, 7, 9, ...** unos (**1's**).
 - ✓ Se deben agrupar los unos (**1's**) adyacentes.
 - ✓ Los unos (**1's**) de los extremos izquierdo y derecho de la misma fila son adyacentes, y los unos (**1's**) de los extremos superior e inferior de la misma columna son adyacentes.
 - ✓ No debe quedar ningún uno (**1**) fuera de un grupo.
 - ✓ Puede haber solapamiento de grupos.
 - ✓ Los grupos pueden formarse en horizontal y/o vertical, nunca en diagonal.

CONSTRUCCIÓN DEL MAPA DE KARNAUGH DE UNA FUNCIÓN BOOLEANA (cont.)



6. Para la agrupación de los unos (**1's**) no existe un procedimiento normalizado, lo importante es que se cumplan las condiciones del punto anterior para asegurar una agrupación óptima y por tanto una expresión mínima de la función booleana, es decir, una expresión con el mínimo número de términos. Sin embargo se sugiere el siguiente procedimiento:
 - a. Localizar los unos (**1's**) aislados, es decir, que no sean adyacentes a otros unos (**1's**), y encerrarlos en un círculo. Cada uno (**1**) aislado forma un grupo.
 - b. Localizar los unos (**1's**) que sean adyacentes solamente a otro uno (**1**) y agruparlos. Cada par de unos (**1's**) adyacentes forman un grupo.
 - c. Agrupar cualquier octeto de unos (**1's**) adyacentes, incluso si contiene unos que ya han sido agrupados.
 - d. Agrupar cualquier cuarteto de unos adyacentes que contengan uno o más términos que no hayan sido agrupados.

CONSTRUCCIÓN DEL MAPA DE KARNAUGH DE UNA FUNCIÓN BOOLEANA (cont.)



- e. Agrupar cualquier par de unos (**1's**) para incluir los que hasta ahora no hayan sido agrupados.

A continuación se presenta un ejemplo de un mapa de Karnaugh completo:

CD \ AB	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	1	0
11	0	1	1	0
10	1	0	0	1

Una vez aplicado el procedimiento y cumpliendo las condiciones explicadas anteriormente, se obtiene el mapa de Karnaugh mostrado a la izquierda, en el cual se observan tres grupos de unos (**1's**), uno de cuatro términos y dos de dos términos,.

FORMA CANÓNICA SIMPLIFICADA O MÍNIMA DE UNA FUNCIÓN BOOLEANA



La función booleana obtenida a partir del mapa de Karnaugh es la **expresión o función booleana simplificada o mínima**, la cual es la suma lógica (unión) de los productos lógicos (intersecciones) de las variables de entrada que mantienen su valor (en cero o en uno) en cada elemento uno (**1**) de un grupo. En cada producto lógico se coloca la variable en forma directa si esta mantiene su valor en uno (**1**), o negada si esta mantiene su valor en cero (**0**). Se puede seguir el siguiente procedimiento:

1. Se escriben en forma horizontal las variables de entrada en el mismo orden de la tabla de la verdad y se traza una línea horizontal debajo de ellas.
2. Se escriben debajo de cada variable en forma vertical las combinaciones de ceros y unos correspondientes a cada elemento (**1**) de un grupo y se coloca una línea horizontal de separación debajo.
3. Se repite el paso 2 por cada grupo.
4. Por cada grupo, se eliminan las columnas en las cuales la variable cambia su valor de cero a uno o viceversa cuando bajamos verticalmente.

FORMA CANÓNICA SIMPLIFICADA O MÍNIMA DE UNA FUNCIÓN BOOLEANA (cont.)



5. Para cada grupo, se multiplican las variables cuya columna no fue eliminada, colocando la variable en forma directa si su columna esta formada por unos (**1's**), o en forma negada si su columna está formada por ceros (**0's**)
6. La suma lógica (unión) de cada producto lógico (intersección) del paso anterior es la expresión booleana mínima de la función lógica. Ej.:

Siguiendo el procedimiento anterior sobre el mapa de Karnaugh del ejemplo, construimos la tabla mostrada a la derecha, de la cual se obtiene la expresión simplificada de la función booleana que se muestra a continuación:

A	B	C	D
0	0	0	1
0	1	0	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0

$$F = \bar{A}.\bar{C}.D + B.D + A.\bar{B}.\bar{D}$$