

INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES



**CARRERA: ANÁLISIS DE SISTEMAS.
SEMESTRE: QUINTO.**

A MODO DE PROLOGO

La Investigación de Operaciones, que designaremos en ocasiones como (IO) tiene por objeto modelar las condiciones de los procesos y organizaciones mediante herramientas estadísticas, matemáticas, algorítmicas y computacional; para optimizarlo con el fin de tomar la decisión mas factible que lleve a cumplir la meta fijada.

Se puede señalar que la investigación de operaciones aplica métodos científicos para obtener solución al planteamiento de un problema o meta que se desea alcanzar y para ello crea modelos sobre el cual aplica diferentes técnicas, utilizando el razonamiento matemático, programación lineal, algoritmos, la lógica, y los programas computacionales que optimizan los procesos productivos de bienes y servicios

**SIMÓN NATIVIDAD DÍAZ ESPÍN
LICENCIADO EN EDUCACIÓN
MENCIÓN MATEMÁTICAS**



ÍNDICE

Introducción	06
Unidad 1 - Investigación de operaciones	10
investigación de Operaciones Busca.	11
Breve reseña histórica.	13
Cronología de su desarrollo	14
Conceptos de la Investigación de operaciones	16
Metodología	18
El modelo matemático	19
Tipos de modelos	20
Características de los modelos	20
Aplicaciones de la investigación de operaciones	21
Especificar el uso de los recursos	22
Sustitución de maquinarias o equipos	23
El Inventario	23
Etapas de los proyectos	23
Procesos	24
Papel que desarrolla el inventario	24
Naturaleza de la investigación de operaciones	25
Enfoque de modelado en la Investigación de Operaciones.	26
La programación lineal en la resolución de problemas	27
La función objetivo	27
Tipos de preguntas	27
Las variables de decisión	28
Las restricciones	28
Ejemplo de la aplicación de programación lineal	29
Problema 1.	29
1 ^{er} paso - La Formulación del Problema}.	30

2 ^{do} paso: Determinar las variables de decisión	30
3 ^{er} Paso: Hallar las restricciones del problema	30
4 ^{to} Paso: Determinar la función objetivo	30
5 ^{to} Paso: Resolver el problema por algún método manual o usando herramientas de computación	31
Problema 2	31
Auto evaluación	32
Unidad 2 - Programación Lineal (P.L.)	34
El método gráfico. Solución de problemas de programación lineal	35
Temas tratados utilizando este método manual.	35
Ejercicio 1	36
Ejercicio 2	39
Ejercicio 3	42
Auto evaluación.	43
Método simplex	44
Tipo de Optimización	45
Condiciones del modelo	45
Característica de las Variables de Holgura	45
Optimalidad	46
Factibilidad	46
Cálculos de gauss – Jordán.	47
Pasos en el método simplex	47
Ejemplo 1	48
Ejemplo 2	51
Ejemplo 3	54
Auto evaluación	60
Método Dual	62
Algoritmo Dual-Simplex para un modelo de maximización	62

El algoritmo para resolver un modelo de maximización	63
Ejercicio 1.	64
Ejercicio 2	67
Ejercicio 3	72
Auto evaluación.	76
La programación dinámica.	79
Formulación	81
Procedimiento	82
Características	84
Ejercicio 1	84
Auto evaluación.	87
Unidad 3 – Teoría de cola	88
Desarrollo en el tiempo	89
Estudio de la formación de colas	89
Objetivos	90
Elementos Presente en la teoría de colas.	91
Notación de Kendall	92
Ejemplos	93
Medidas de rendimiento	94
Teorema de Little	95
Algunos modelos clásicos	96
Sistema M/M/1	96
Sistema M/M/c	96
Las limitaciones del acercamiento matemático	96
Ejemplo 1	97
Ejemplo 2	98
Auto evaluación	100
Unidad 4 - Modelo de transporte en Investigación de Operaciones	103
Los algoritmos de transporte.	103

El método de la esquina Noroeste	106
El método del costo mínimo o de los mínimos costos	107
El método de aproximación de Vogel	108
El método de los flujos mutuamente preferibles	108
El método de cost preprocessing	108
Ejercicios explicativos de modelo de transporte	108
Ejemplo 1	109
Solución de partida – El método del rincón noroeste	110
El algoritmo de stepping – Stone	112
Ejemplo 2	114
Ejemplo 3	118
Degeneración	120
Auto evaluación	121
Asignaciones	124
Método húngaro	125
Ejemplo 1	126
Ejemplo 2	127
Auto evaluación	130
Referencia Bibliográficas	133

INTRODUCCIÓN

La investigación de operaciones es una valiosa herramienta de análisis matemático abocada a apoyar y aportar conocimientos para la toma de decisiones sobre el uso de recursos asociados con una determinada actividad a realizar. Mediante el material desarrollado del presente curso de Investigación de Operaciones, se busca explicar de forma sencilla diferentes herramientas utilizadas en el campo científicos, para obtener solución al planteamiento de un problema determinado o la meta que se desea lograr; para ello se crean modelos sobre los cuales es aplicada diferentes técnicas como la programación lineal, algoritmos computacional y análisis de decisiones, con el fin de obtener el resultado favorable que se busca.

Iniciaremos con un repaso de alguno concepto básico generales del área, que se deben tener presente para dar sustento a tratamiento a procesos genéricos involucrados, se inicia la introducción a la programación lineal como herramienta de la investigación de operaciones, se explicara de forma general utilizando ejemplos sencillos.

Al desarrollar cada tema, se explicara un conjunto de recursos, con el fin de favorecer la comprensión de cada uno de los contenidos, como guías y ejercicios resueltos a manera de lecturas complementarias o como preparación para obtener habilidad que permita poder enfrentar los ejercicios de repaso.

La Investigación de Operaciones, que ocasionalmente designaremos como (IO) tiene por objeto modelar las condiciones de los procesos y organizaciones mediante herramientas estadísticas, matemáticas, algorítmicas y computacionales; para optimizarlo con el fin de tomar la decisión más factible que lleve a cumplir la meta fijada.

Como podemos observar, un problema que enfrenta la investigación de operaciones, es explicar la forma de obtener una solución al planteamiento de cierta actividad descrita mediante una función objetivo que es la relación matemática entre las variables de decisión, restricciones, parámetros y la magnitud objetivo. La valoración de la efectividad en función de las variables. Determina lo que se va optimizar (Maximizar o Minimizar).

La aplicación de la investigación de operaciones abarca diferentes áreas, tales como procesos manufactureros, planificación de transporte, construcción, diseño de sistemas de telecomunicaciones, planeación y gestión financiera, gestión de sistemas de salud, entre muchas otras

Podemos señalar que la finalidad de aplicar la investigación de operaciones es evaluar mediante el uso del método más apropiado para obtener la solución óptima a una situación planteada.

Para el desarrollo de este importante curso, se analizarán varios métodos, como so el grafico, simplex, dual, la teoría de cola, los modelos de transporte y las asignaciones; con sus ejemplos explicativos.

El método gráfico usado solo cuando se presentan 2 variables de decisión. Consiste en trazar las ecuaciones de las restricciones en un eje de coordenadas X_1 , X_2 para tratar de identificar el área de soluciones factibles donde cumplen con todas las restricciones. Se buscará el valor mínimo o máximo del problema.

El método simplex es iterativo y analítico usado para obtener solución de problemas de programación lineal, con él podemos resolver problemas más complejos que por el método gráfico con una mayor cantidad de restricción en el número de variable. Permite mejorar la solución a cada paso.

El método dual simplex es un algoritmo iterativo que iniciando en una solución básica factible pero no óptima, genera soluciones básicas factibles cada vez mejores hasta encontrar la solución óptima

La teoría de colas es el estudio matemático de las colas, filas o líneas de espera dentro de un sistema. Estudia términos como el tiempo de espera, tipos atención en las colas, forma de atención por las capacidades presentes en el sistema para no colapsar.

La resolución de un modelo de transporte se realiza mediante un procedimiento de la programación lineal, pero su estructura nos permite la creación de múltiples alternativas para llegar a dicha solución. Aplicados en la economía actual.

El modelo de asignación es un tipo especial de problema de programación lineal en el que los asignados son recursos que se destinan a la realización de tareas.

Unidad 1

Investigación de operaciones

Iniciamos este proyecto, con una serie de interrogantes

1. ¿La investigación de operaciones que significa?
2. En lo académico, ¿cuál es su importancia para la carrera?
3. Dentro del campo laboral, ¿cuál es su uso y aplicación?
4. El lenguaje técnico que se emplea, ¿que nos indica los términos optimización, variables, factibilidad, restricciones?
5. ¿Dónde se aplican los conocimientos y destrezas que adquirimos de ella?
6. Para cualquier empresa o actividades económicas, su aplicación, ¿Permite aumentar la producción, su calidad, mejoraría el trato a los clientes, o aumentaría las ventas como también los beneficios económicos para los accionistas?

Se ha señalado; grandes cambios conllevan aumento en las nuevas etapas para ejecutar una actividad y la necesidad de mano de obra especializada para ejecutar las nuevas responsabilidades administrativas en las organizaciones. Pero, dichos avances originaron nuevos problemas que aún se mantienen en muchas industrias o empresas. La necesidad de buscar solución a los nuevos problemas dio origen a la Investigación de Operaciones.

Mediante la Investigación de Operaciones se busca obtener la solución mejor factible y óptima, que permita resolver dicho problema empleando los limitados recursos con que se cuenta (restricciones); mediante el uso de modelos y algoritmos, además de otras herramientas que permitan tomar una decisión al resolver el problema planteado.

la Investigación de Operaciones debe cumplir con una serie de etapas o fases. Como son:

- a. Definición del problema.
- b. Construir un modelo.
- c. Obtener la solución a dicho modelo.
- d. Validar los resultados.
- e. Ejecutar los resultados obtenidos.

La investigación de Operaciones Busca.

“El propósito de la Investigación de Operaciones consiste en preparar al profesional para decidir entre diferentes medios o métodos disponibles para realizar todo objetivo que se proponga, de modo que se alcance un resultado en relación a un cierto criterio de optimización, haciéndose imprescindible un sustento metodológico para la toma de decisiones, el cual puede hallarse en los procedimientos propios de la investigación de operaciones”.

Para cumplir este propósito, se debe

- a) Definir el problema.
- b) Buscar y evaluar alternativa.
- c) Seleccionar posibles alternativas.
- d) Seleccionar el plan de acción a seguir.
- e) Explicar el porqué de la acción tomada.
- f) Ejecutar el plan.
- g) Constantemente supervisar y evaluar la ejecución del plan seleccionado.

Situaciones como las antes señaladas son las que nos planteamos resolver con la investigación de operaciones.

Podemos señalar a modo de ejemplo que

1. Se desea comprar un medio de transporte y la cantidad de dinero disponible es limitada, para realizar la adquisición se presenta las opciones, comprarla nueva, usadas o deteriorada (reconstruirla).
Para cada caso se presentan restricciones modelo, condición de la compra, repuestos en el mercado
2. Un agricultor realiza la siembra de tres árboles frutales, aguacate, naranja y café. Sus restricciones son valor de las semillas, abonos, plaguicidas, maquinarias, tipo de terreno, tiempo de la cosecha, transporte al proveedor, precio de venta, el agricultor puede presentar opciones como mínimos costo para la siembra o máximos beneficio en la venta.
3. Una fabrica de Calzado, elabora tres modelo, elegancia, casual y deportivo, para ello presenta varias restricciones, Costos de los materiales , valor de la mano de obra , costo de las maquinarias y herramientas, se pueden preguntar a qué precios de vender para tener una ganancia legar cubriendo los costos mínimos,
4. Una industria de química que trabaja con productos tóxicos que pueden contaminar el medio ambiente, para cuidar de ello se tienen tres opciones. Compra filtros de calidad para las salidas de los gases (chimeneas), uso de materiales de protección de su personal, tratamiento especial a los desechos antes de verter al medio.
5. Una empresa procesadora de comida animal para consumo humano desea lanzar al mercado un nuevo producto, económico, nutritivo, llamativo al consumidor pero que sus costos de inversión sean mínimos.

6. Una Distribuidora de comidas, posee 4 empresas que le proveen los productos ubicados en diferentes lugares en el territorio nacional y será saber cuáles serían los costos de transportar estos productos al lugar de venta a fin de minimizar sus costos.

Podemos seguir nombrando ejemplo de diferentes tipos donde se necesita aplicar la Investigación de Operaciones.

Breve reseña histórica

Durante la segunda guerra mundial, Gran Bretaña, formó un equipo interdisciplinarios de científicos para estudiaran los problemas tácticos y estratégicos presentes en la defensa aérea y terrestre de su territorio. *El objetivo primordial era indicar el uso más eficiente de sus limitados recursos militares.* El nombre se deriva de esta acción ya que se estaba realizando una “Investigar Operaciones” (militares).

Desde sus orígenes este nuevo estudio para la *toma de decisiones* se ha caracterizado por el uso del conocimiento científico, con el fin de *determinar de forma óptima los limitados recursos que se posee para su ejecución*

La “*programación lineal u optimización lineal*” (**LP**), es el estudio matemático de Sistemas de ecuaciones lineales, o sistemas de inecuaciones lineales que busca maximizar o minimizar (optimizar) una función Lineal (Objeto), en la que las variables vinculadas de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones.

El problema de la resolución de un sistema lineal de inecuaciones tiene su origen en Joseph Fourier, luego fue perfeccionado mediante el método de eliminación de Fourier-Motzkin. El método *simplex* para resolver problemas de Investigación de operaciones lineales desarrollado por George B. Dantzig (1947), fue el primer procedimiento matemática

ampliamente aceptada. Los conceptos como *programación lineal*, *programación dinámica*, *teoría de colas* y *teoría de inventario* fueron herramientas que se desarrollaron en la década de los 50.

Con el crecimiento industrial posterior a la segunda guerra, los estudios en las estructuras empresariales empezaron a darse cuenta que estas organizaciones presentaban problemas de asignación por la escasez de recursos, básicamente eran los mismos problemas pero en un contexto diferente. De esta manera, la investigación de operaciones empezó a filtrarse más allá de las aplicaciones militares y han invadido industrias, hospitales, instituciones financieras, bibliotecas, planeaciones urbanas, sistemas de transporte y hasta estudios de investigación criminal.

El desarrollo de la investigación de operaciones presentó un gran impulso con el desarrollo y aplicación de las computadoras la cual permitió realizar gran cantidad de cálculos y resolver problemas más complejos estudiados con el crecimiento de los procesos industriales y empresariales ya conlleva asignar los limitados recursos disponibles a sus diversas actividades de tal manera que la efectividad de la empresa está comprometida. En la actualidad las empresas se tienen como parte principal para su desarrollo el uso racional de los materiales, los recursos económicos, el costo de las nuevas tecnologías y el pago de su capital humano para la obtención del producto terminado que se plantea.

Cronología de su desarrollo

Programación Matemática – Quesnay (economista) (1759).

Anticipa la programación lineal – Fourier, Joseph (1826).

Resuelve ecuaciones lineales por eliminación "*gaussiana*" – Gauss Carl (1826).

Precursor de modelos lineales – Walras, Jordán (1874).

Precursor de modelos lineales – Minkowsky (1896).
Precursor modelos dinámicos probabilísticos – Markov (1890).
Concibe un método para resolver sistemas de inecuaciones, modelos lineales – Farkas, Gyula (1902).
Primer desarrollo de modelos de inventarios (1902).
Primeros estudios de líneas de espera – Erlang (1910)
Métodos de asignación (analíticos) – Koning y Egervary (1920) .
Teoría de juegos y de preferencias – Von Neumann (1937).
Problemas de distribución – Kantorovich (1939).
Logística estratégica para vencer al enemigo – 2da guerra (1939).
Logística en la distribución de recursos de los aliados – (Rand Corporation – Fuerza aérea norteamericana) – Finales 2da guerra (1945).
Publica del trabajo algoritmo Método simplex – Dantzig, George (1947).
Desarrolló la teoría de la dualidad – Von Neumann, John (1947).
Se sabe que también formuló la teoría en forma independiente – Kantorovich , Leonid.
Precursores, inicio a la Programación Lineal (1950-60).
Programación dinámica – Bellman.
Programación No Lineal – Kuhn y Tucker.
Programación Entera – Gomory.
Redes de optimización – Ford y Fulkerson.
Simulación – Markowitz.
Inventarios – Arrow, Karloin, Scarf, Whitin.
Análisis de Decisiones – Rafia.
Procesos Markovianos de Decisión – Howard.
Orientación a sistemas, generalización de la Investigación – Churchman, Ackoff, Arnoff.

Introduce el método del *punto interior* para resolver problemas de programación lineal – Karmarkar, Narendra.

En resumen podemos señalar que los fundadores de la técnica son Dantzig, George, quien publicó el “algoritmo Simplex”, en 1947, Von Neumann, John, que desarrolló la teoría de la dualidad en el mismo año, y Kantorovich, Leonid, un matemático de origen ruso, que utiliza técnicas similares en la economía antes de Dantzig y ganó el premio Nobel en economía en 1975.

En 1979, otro matemático ruso, Khachiyan, Leonid, diseñó el llamado “algoritmo del Elipsoide”, a través del cual demostró que el problema de la programación lineal es resoluble de manera eficiente, es decir, en tiempo polinomial. Más tarde, en 1984, Karmarkar, Narendra, matemático de origen Indio, introduce un nuevo método del punto interior para resolver problemas de programación lineal, lo que constituiría un enorme avance en los principios teóricos y prácticos en el área.

Conceptos de Investigación de operaciones

“La investigación de operaciones puede definirse como un método de aplicación matemático que nos permite obtener valores de las variables que intervienen para tomar decisiones dentro de las actividades de un empresa”. Ósea, se aplica a problemas donde se reflejan las actividades que se realiza o desarrolla en una determinada empresa.

El tipo de actividad que realiza la empresa no interviene, se utiliza en cualquier negocios, no importando el campo o actividad, como la economía, las industrias, el gobierno y por supuesto la milicia.

En esta técnica o herramienta podemos señalar características principales:

- Conocer sobre Teoría de Sistemas,
- El trabajo en variados temas dentro de la empresa.
- El uso del método científico como fin para la toma de decisiones.

Podemos señalar que la Investigación de Operaciones: Aplica las teorías, herramientas y métodos cuantitativos para plantear, modelar y resolver problemas propios de las operaciones de una organización, utilizando el razonamiento matemático, la lógica, y los programas computacionales que optimizan los procesos productivos de bienes y servicios, enmarcados en procesos de toma de decisiones óptimas en sistemas determinísticos y probabilistas que se originan en la vida real.

La Optimización se interpreta como obtener la mejor solución (solución óptima) del problema planteado. Decir optimización del sistema es maximización o minimización de los resultados, según sea la solución buscada.

Programación lineal es modelados matemática, con el fin usar de forma eficiente los recursos limitados que posee la empresa para realizar determinada actividades conocidas, con el objetivo de satisfacer las metas deseadas (por ejemplo minimizar costos o maximizar beneficios). El termino programación no debe ser interpretado como programación de computadoras, sino como etapas de una planificación. La palabra lineal nos indica que todas las variable que en el proceso se usan son lineales (primer grado).

En conclusión,

“La programación lineal consiste en planificar actividades que conlleven a obtener un resultado óptimo”.

La programación lineal es usada para obtener solución de problemas de uso de personal, mezcla de materiales, distribución y transporte de materia prima o productos terminados o inversión de capitales.

Por otra parte. *La programación dinámica* se utiliza en áreas de planificar los gastos de publicidad, distribución del esfuerzo de ventas y programación de la producción.

La teoría de colas (líneas de espera) ha tenido aplicación en los problemas referentes al tráfico, el servicio de mantenimiento de máquinas sujetas a descomposturas, la programación del tráfico aéreo, diseño de presas, la programación de la producción y la operación de hospitales.

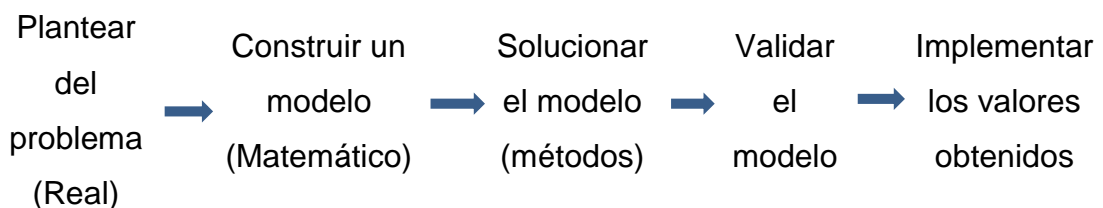
Otras técnicas como la teoría del inventario, los procesos markovianos de decisión, la teoría de juegos y la simulación, también han tenido éxito.

Metodología

Para la investigación de operaciones usamos el método científico; inicialmente se observa el proceso y planteamos el problema, luego, construimos un modelo matemático, donde se refleja el problema real. El paso siguiente es establece la hipótesis donde el modelo se refleje de forma precisa la situación real, cuya soluciones, sean válidas para el problema real, finalmente se verifica mediante una experimentación.

Todo proceso de investigación de operaciones se basa en 5 fases:

1. Plantear del problema
2. Construir un modelo.
3. Solucionar el modelo
4. Validar el modelo
5. Implementar los valores obtenidos



Adicionalmente en la investigación de operaciones intenta hallar la solución mejor u óptima.

El modelo matemático:

1. **Variables de decisión y parámetros**. Las variables de decisión son las incógnitas que deben determinarse con la solución del modelo. Los parámetros representan las variables controlables.
2. **Restricciones**: para tomar en cuenta las limitaciones físicas del sistema, el modelo debe incluir restricciones que limitan las variables de decisión a sus valores factibles (o permisibles). Esto se representa usualmente en la forma de funciones matemáticas restrictivas.
3. **Función objetivo**: define la medida de efectividad del sistema como una función matemática de sus variables de decisión.

La función **Z** es la función objeto (modelo matemático planteado para obtener un determinado fin); además las inecuaciones $g_i \leq b_i$ representa la *i*-ésima restricción, donde b_i es un valor conocido en la realización de la operación.

El modelo matemático planteado busca ser optimizado, pero existen un conjunto de restricciones. Según la situación se puede optimizar maximizando el beneficio o minimizando el costo. Estos dos criterios no conducen a la misma solución óptima aun usando las mismas restricciones.

Simplificación de un modelo matemático

Después de construir un modelo matemático, puede ser simplificado, para que sea analíticamente operado. Las simplificaciones más comunes que se presenta:

1. Transformar las variables discretas en continuas

2. Si las funciones no son Lineales, Convertirla en lineales
3. Eliminar algunas de estas restricciones.

Tipos de modelos

En la investigación de operaciones el tipo de modelo más importante es el modelo simbólico o matemático. Para ser usado, debemos considerar que todas las variables que intervienen en el proceso son cuantificables. Lo que llamaremos variables, que están relacionadas con las funciones matemáticas apropiadas para describir el comportamiento del sistema. Por lo tanto usando algebra matemática se obtiene la solución del modelo.

También, se emplean los modelos **heurísticos** y **de simulación**.

Los modelos de simulación son representaciones matemáticas de un sistema o proceso en el que se simulan eventos a lo largo del tiempo o sobre un periodo de él. Estos modelos se basan en datos históricos y parámetros que describen el comportamiento del sistema y permiten proyectar cómo podría evolucionar en el futuro. Esta información se registra en observaciones estadísticas. La falla principal de la simulación es que este análisis esta sujeto al error experimental.

El método heurístico es utilizado como un recurso para la resolución de problemas de cualquier área del conocimiento, basado en el análisis de la situación, diseño de estrategias, aplicación de las mismas y validación de los resultados. Esta solución descansa en las reglas empíricas o intuitivas que, dada una solución actual, permiten la determinación de una solución mejorada. Actualmente los métodos heurísticos son procedimientos de búsqueda.

Características de los modelos

Los modelos se pueden clasificar según su grado de abstracción en:

- ✓ Modelos Abstractos (no físicos)
- ✓ Modelos Concretos (físicos)

Desde el campo matemático se clasifican en:

- ✓ Estáticos
- ✓ Dinámicos
- ✓ Determinísticos
- ✓ Estocásticos

Aplicaciones de la investigación de operaciones

Originalmente la Investigación de Operaciones se aplicó a una gran variedad de problemas tácticos no estratégicos; estos tipos de problemas cumplen con las siguientes condiciones:

- 1.- La solución se modifica o anula fácilmente, ósea tiene efecto de corta duración,
- 2.- La solución afecta poco a la organización.
- 3.- Los resultados obtenidos no dependen de los medios seleccionados, propósito, fines, metas u objetivos a largo plazo.

Una empresa u organización planifica sus metas y objetivos, este es un problema más estratégico que táctico. Por ejemplo, minimizar los costos del transporte, esto es conveniente, luego el problema es más táctico que estratégico.

La aplicación de la Investigación de operaciones en variedad de problemas tácticos, ha conllevado a agruparlos según los modelos y procedimientos (técnicas) según los tipos de resolución en:

- Asignación de escasos recursos
- Ordenamiento

- Secuenciación y coordinación de tareas
- Líneas de espera
- Mantenimiento y reemplazo de equipos
- Inventarios
- Costos y tiempos
- Gestión de proyectos.

La toma de decisión se estudia bajo condiciones **deterministas, aleatorias, de incertidumbre, o de competencia (adversas).**

Los sistemas determinísticos son aquellos que se representa explícitamente de forma matemática, luego sus valores futuros son predecibles perfectamente. Una señal estocástica es aquella donde su valor futuro no puede ser predecir de forma exacta. Su interpretación se basa en el principio de manera certera es conocido todo (conocer los niveles de producción).

Cuando se realizan estudios de forma aleatorias, de incertidumbre o de competencia (pronósticos, participación de la competencia), la incertidumbre es vinculada al análisis de los fenómenos que poseen una tendencia específica.

Especificar el uso de los recursos

La Investigación de operaciones se originó al tratar de optimizar los recursos para solucionar una serie de problemas a la defensa militar del país, la asignación de tareas, de asignación de recursos, la distribución planificada de tareas por etapas, con el objetivo principal de optimizar los recursos económicos.

La Programación Lineal es la herramienta que se emplean para ello, Los métodos de distribución, la Programación Dinámica, también son

usadas. Se debe inicial realizando un inventario básico, de cada tipo, cuyo uso conlleve obtener el máximo beneficio. Por lo general se conoce de la empresa su máxima capacidad y se desea conocer las ganancias que se produce cada elemento a producir.

Sustitución de maquinarias o equipos.

Por lo general la mayoría de las empresas sustituyen sus equipos luego de un tiempo de uso o realizan actualizaciones para que la tecnología dinamice el desarrollo de las actividades que realizan. Se estos reemplazos luego de la vida útil de dichos equipos o cuando su funcionamiento no cubre las planificaciones proyectadas., también cuando se presentan fallas en las líneas de producción, instalaciones que amerita su reparación, se siguen políticas de mantenimiento y/o reemplazo de equipos.

El Inventario

Esta actividad presente en toda empresa, es realizada por un departamento que evalúa todas las etapas de de la empresa, en especial los almacenes de productos terminado, materia prima o recursos. Estos estudios se realizan a través de modelos de líneas de espera en la mayoría de los casos.

Etapas de los proyectos

Las actividades a realizar para ejecutar un proyecto se ejecutan mediante varios tipos de modelos como la modelación por grafo, donde determinamos los tiempos y retrasos posibles de proyecto. (Conocido como "cuellos de botellas").

Procesos

Una empresa para cumplir sus procesos de desarrollo debe separar sus funciones administrativas con la finalidad de obtener la planificación deseada, estas se separa dentro de ella como gerencias, departamento; podemos señalar las funciones y sus objetivos según sea el caso planificado de la forma siguiente:

Función	Objetivo a lograr
Desarrollo y Producción	Minimizar los costos o Maximizar la producción.
Ventas	Minimizar los costos de ventas o Maximizar las Ventas..
Recursos Financieros	Minimizar el capital que los socios deben aportar
Recursos Humanos	Minimizar los de mano de obra necesaria para maximizar la producción.

Papel que desarrolla el inventario

Las empresas, negocios o fabricas busca como fin primordial general mayores beneficio empleando para ello mínimos las inversiones o costos, para lograrlo se busca tener una mayor eficiencia y un tiempo breve en su ejecución, por ello las mayoría se desarrolla solo un especifico producto o rama de producción, ya que esto evita la pérdida de tiempo al cambiar de equipo, personal o materia prima para un nuevo rublo, artículo o producto a desarrollar. Esto permite que el inventario de sus recursos, solo sea lo necesario para los que está desarrollando.

Con respectos a las ventas, se necesite tener un gran inventario, a fin de realizar los máximo posible y suministra a los clientes la mayor cantidad y variedad de presentación posible.

Los recursos financieros como base para la ejecución de la producción, busca que sea lo mínimo necesario para logra alcanzar la

planificación planteada. Es recomendable que los inventario disminuyan o aumente según la variación de las salidas de productos de la empresa.

Los Recursos Humanos tienen la competencia de mantener la producción lo más constante posible, además de mantener su personal calificado, ya que el despedir trae consecuencias en la moral del personal, la pérdida de personal calificado, aumento de costos para la formación de nuevo personal si se requiere.

La dirección de esta etapa de la empresa es desarrollar políticas que optimase el desarrollo de la compañía.

La empresa o sus directivos están encargados de tomar decisiones para el progreso de las inversiones, empleando los métodos que más convenga. La Investigación de Operaciones presta las herramientas, para esa ayuda científica en apoyo a las decisiones que se debe tomar. En especialmente cuando se buscan soluciones “óptimas” a problemas que se originan en las organizaciones y servicios en general.

La Programación Lineal es una técnica científica en el planteamiento que hace uso de modelos matemáticos consistente en sistemas de ecuaciones, para resolver problemas de asignación eficientes de recursos limitados; técnica para optimizar el rendimiento de un sistema. Esta técnica es ampliamente utilizada en el mundo empresarial para resolver problemas de planificación, . Asignación de recursos y toma de decisión

Naturaleza de la investigación de operaciones.

Se aplica de manera extensa en diversas áreas de un proceso, empresa, fabrica, organización, entre otras; en lo relacionado a manufacturación, transporte, construcción, telecomunicaciones, planificación funcionamiento, normas y cuidados de la salud, para todo tipo de persona, civiles o militares. .

Enfoque de modelado en la Investigación de Operaciones.

- ❖ Hace usuales el modelo matemático y la recolección de datos relevantes.
- ❖ Formulación de un modelo matemático que representa el problema.
- ❖ Desarrollo de un procedimiento basado en computadoras para derivar una solución para un problema a partir de modelo.
- ❖ Prueba del modelo y mejoramiento según los resultados obtenidos,
- ❖ Preparación para la aplicación del modelo prescrito por la administración.
- ❖ Implementación.

La “Programación Lineal” emplea un algoritmo mediante el cual se resuelven problemas reales donde se busca reconocer y resolver planteamientos con la cual aumentar la producción usando los recursos limitados y valiosos, para aumentar los beneficios.

El objetivo principal de la **Programación Lineal** es optimizar, ósea, minimizar o maximizar una función lineal de variables reales en presencia de limitaciones lineales (sistemas de inecuaciones lineales).

Los valores obtenidos y el proceso para lograr optimizarlos es un valor cuantitativo en la toma de las decisiones para las situaciones planteadas. Al realizar esto es importante tomar en cuenta variados criterios:

- ❖ Los hechos
- ❖ La experiencia
- ❖ La intuición
- ❖ La autoridad

La programación lineal en la resolución de problemas.

El primer paso para la resolución de un problema de programación lineal consiste en la identificación de los elementos básicos de un modelo matemático, estos son:

- Función Objetivo
- Variables
- Restricciones

Cada uno lo podemos obtener mediante los procedimientos siguientes:

- a) Definir lo que buscamos mediante la función Objetivo.
- b) Definir nuestras variables a utilizar.
- c) Definir las limitaciones o restricciones que se nos presentan
- d) Escribir la expresión matemática, objetivo a lograr (Funcion Objetivo).

La función objetivo

Está relacionado lo que se busca obtener. De plantearse varios objetivos a conseguir, esta deben priorizarse, de la cual la principal es la tomamos como objetivo principal a solucionar, luego ese será el objetivo a alcanzar. A modo de ejemplo, podemos plantear lo siguiente; se desean Maximizar las ganancias en las ventas de tres productos que una empresa realiza, pero la pregunta de mayor rango está vinculada a disminuir los costos de fabricación de esos productos ya que si aumentamos los precios de ventas, esta puede repercutir en la demanda de ellos.

Tipos de preguntas

Función Objetivo a plantear:

¿Qué hacer para reducir los costos de producción? ⇒ Minimizar los costos en la producción.

¿Qué hacer para aumentar las ganancias? ⇒ Maximizar la producción o las ventas; minimizar los costos de producción si alterar la calidad de ellos.

Las variables de decisión

Para captar el comportamiento de la variable de decisión, usemos la semejanza que existe entre objetivos general y objetivos específicos; podemos señalar que el comportamiento existente entre las variables de decisión y la función objetivo, porque son consecuencia de la pregunta fundamental.

Las variables de decisión son en teoría factores controlables del sistema que se está modelando, y como tal, estas pueden tomar diversos valores posibles, de los cuales se precisa conocer su valor óptimo, que contribuya con la consecución del objetivo de la función general del problema.

Las restricciones

Las limitaciones o restricciones en un problema de programación lineal, son todos los elementos que limitan los valores que pueden tomar las variables de decisión. La forma de hallarlas es pensar hipotéticamente a las variables de decisión, por ejemplo, ¿qué sucedería si a un problema de maximización de las ganancias en la producción de juguetes se fabricara una

cantidad infinita de ellos? Lo más seguro es que surgirían otras preguntas, por ejemplo:

- ❖ ¿Qué cantidad de maquinaria podríamos utilizar para aumentar la producción?
- ❖ ¿Qué tipo de materiales nuevos se pueden emplear y sus costos?
- ❖ ¿Es necesario mano de obra calificada para su fabricación?
- ❖ ¿Los juguetes a realizar tendrían aceptación en los consumidores potenciales?
- ❖ ¿Será necesario aumentar el área de almacenaje o inventario, cuanto aumentaría los costos?
- ❖ ¿Es necesario aumentar los recursos económicos a invertir por los socios para este nuevo proyecto?

En conclusión, se observa que el planteamiento origina muchas limitaciones a considerar, en lo económico, infraestructura, materiales humanos y primas, mercadeo, informática entre otras; o sea que los valores de las variables de decisión está vinculada a varias limitaciones.

Ejemplo de la aplicación de programación lineal

Problema 1.

La fábrica de Zapatos "Cantaclaro" decide fabricar dos modelos de calzados de uso diferente Casual y Deportivo; se dispone de 400 Kg de cuero de vaca a, 200 Kg de tela impermeable y 68 Kg de tela sintética. Para obtener un par de calzado Casual se necesita diariamente se necesitan 12 gr de cuero, 15 gr de tela impermeable y 54 gr de tela sintética; para producir un par de calzado Deportivo' por día se necesitan 10 gr cuero, 20 gr tela impermeable y 7 gr de tela sintética.

El Calzado Casual será vendido a 400 \$ el par y el Calzado Deportivo' será vendido a 500 \$ el par. Se busca obtener el máximo ganancias, ¿cuántos pares de calzados de cada tipo se deben fabricar?

Debemos asignar las variable, para ello leemos cuidadosamente el planteamiento y construir una tabla de valores para comprender su su estructura.

1^{er} Paso - "La Formulación del Problema"

Para ello iniciamos con la pregunta central plantada.

¿Cuántos pares de calzados de cada tipo se deben fabricar?

Su formulación será:

“Determinar la cantidad de pares de Calzados diarios de Casual y Deportivos a fabricar teniendo en cuenta la óptima ganancia se genera”.

2^{do} Paso: Determinar las variables de decisión

Según el problema planteado nuestras variables de decisión son:

X_1 : Cantidad de pares de calzados diarios Casuales a fabricar

X_2 : Cantidad de pares de calzados diarios Deportivos a fabricar

3^{er} Paso: Hallar las restricciones del problema

Aquí se determina las funciones que limitan el problema, estas están dadas por capacidad, disponibilidad, proporción, no negatividad entre otras.

De disponibilidad de materia prima:

$$0,012X_1 + 0,01X_2 \leq 400 \text{ Cuero}$$

$$0,015X_1 + 0,02X_2 \leq 200 \text{ Tela impermeable}$$

$$0,054X_1 + 0,007X_2 \leq 68 \text{ Tela simtetica}$$

$$X_1 \geq 0; X_2 \geq 0 \text{ Criterio de no natividad}$$

4^{to} Paso: Determinar la función objetivo

Este paso es muy importante porque nos indica la característica del problema; se busca determinar si se Maximiza o Minimiza. Como buscamos obtener mayor ganancia, se trata de Maximizar.

Función Objetivo

$$Z_{[Maximo]} = 400X_1 + 500X_2$$

5^{to} Paso: Resolver el problema por algún método manual o usando herramientas de computación.

Los métodos manuales pueden ser: Gráficos, Simplex, Simplex Dual. Como en estos tipos de problemas, generalmente se analizan muchas variables, cuya solución manual es muy engorrosa (muchos cálculos), se utiliza la herramienta computacional desarrollados para este fin; podemos nombrar los software WinQSB, TORA, Lingo, Solver de Excel entre otra.

Problema 2

Una empresa dedicada al ramo de la agrícola y un consorcio económico desean realizar inversión para aumentar la producción de cultivo de Maíz, Arroz, soya y Tomate, con el doble propósito:

- a) Crear nuevas fuentes de trabajo en la zona.
- b) Aumentar las producciones a fin de desplazar otras empresas extranjeras. Se realizó un estudio de mercado que arrojo

Producto	Producción promedio anual (kg)	Área mínima a cultivar (m ²)	Precio promedio (\$/Kg)	Costo (\$)	Horas de trabajo promedio (Hs)
Maíz	300	6	1	0.8	72
Arroz	400	8	0,8	0.3	90
Soya	100	4	10	2.00	40
Tomate	250	8	4	0.5	20

1.- El terreno para estos cultivo de 400.000 m²

- 2.- El suministro de agua, es constante y abundante.
3. La inversión financiera es 10 millones, teniendo como objetivo exportar la producción excedente a partir de 2do año.
4. se estima que este desarrollo cree 100 empleos directos y 50 indirectos ininterrumpidamente.

¿Cuántos de cada rublo se deberá sembrar con el objeto de maximizar el valor de la futura exportación anual?

Formulación del problema:

Sean:

X_1 : número de plantas de Maíz a ser sembrados.

X_2 : Cantidad de arroz debe ser sembrado.

X_3 : número de plantas de soya a ser sembrados.

X_4 : número de plantas de tomate a ser sembrados.

Valor promedio medio de la exportación anual:

$$Z = 1800X_1 + 800X_2 + 1000X_3 + 2000X_4$$

Según las siguientes restricciones:

Extensión de tierra: $6X_1 + 8X_2 + 4X_3 + 8X_4 \leq 400.000 \text{ m}^2$

Inversión inicial: $0,8X_1 + 0,3X_2 + 2X_3 + 0,5X_4 \leq 10\,000\,000\$$

Desempleo mínimo: $72X_1 + 90X_2 + 40X_3 + 20X_4 \geq 453.000$ (horas/año)

Número de árboles a sembrar: $X_1 \geq 0, X_2 \geq 0, X_3 \geq 0, X_4 \geq 0$

Obtuvimos un modelo del problema de tipo:

$$Z_{\text{Maximizar}} = 1800X_1 + 800X_2 + 1000X_3 + 2000X_4$$

Sujeto a: Restricciones inversión 10,000,000 \$

Extensión de tierra 400,000 m²

Auto evaluación

- 1.- Realizar un breve resume sobre la "Investigación de Operaciones";
 - a.- Defina.
 - b.- Como y donde nace.

- c.- Modelo.
- d.- Tipos.
- e.- Características.
- f.- Herramientas.

2.- Realizar ejemplos explicativos, donde se analice la importancia y uso de la Investigación de Operaciones.

3.- Señale la tendencias de la Investigación den Operaciones y su aplicación futuras.

4.- Realice un mapa mental sobre la Investigación de Operaciones.

5.- Construya un mapa conceptual sobre la Investigación de Operaciones.

6.- Explique el uso de los sistemas informáticos en la Investigación de Operaciones.

UNIDAD 2

PROGRAMACIÓN LINEAL (P.L.)

La Investigación de Operaciones se utiliza para la toma de decisión, mediante la aplicación sistemática de herramientas matemáticas, busca analizar y resolver problemas. Tuvo sus orígenes en operaciones militares durante la Segunda Guerra Mundial; luego se aplicó en el mundo empresarial, con el desarrollo tecnológico y computacional creció su aplicación en sistemas otras áreas del campo gerencial.

El uso de modelos proporciona ayuda en la acción a tomar para solucionar un problema; emplea análisis cuantitativo. en las empresas, industrias, gobierno, banca, telecomunicaciones entre muchas otras.

Las decisiones que se deben aplicar son esenciales para los encargados del funcionamiento del negocio o departamento bajo su dirección. Al analizar las condiciones buscada y sus limitaciones, se basan en datos suministrados por el problema, desarrollando expresiones matemáticas donde se plantean el vínculo que existe entre ellas (las variables). Posteriormente se emplean, los métodos que permitan obtiene los resultados por los que se toman las decisión a aplicar.

La base para la aplicación de la Investigación de Operaciones son los modelos. Que es una simplificada representación de lo que sucede en la vida real.

El análisis lógico y racional. Se realiza siguiendo las etapas:

- a) Definir el problema.
- b) Desarrollar el modelo.
- c) Señalar las restricciones.
- d) Resolviendo el Modelo.

- e) Comprobar los resultados e Interpretarlos.
- f) Tomar la decisión sobre el problema planteado,

Plantear el problema es esencial, ya que debe señalar la relación entre las variables que se busca optimizar (maximización o minimización). Los modelos matemáticos a analizar, emplean variables y parámetros que se relacionan (Insumos) El modelo debe poseer solución, basado en la realidad, entendible y modificable

El método gráfico. Solución de problemas de programación lineal

El método gráfico puede ser usado en la de problemas que sólo presentan 2 variables de decisión. En estos tipos de problemas, el procedimiento consiste en trazar las ecuaciones de las restricciones en un eje de coordenadas X_1 , X_2 para tratar de identificar el área de soluciones factibles (soluciones que cumplen con todas las restricciones).

La solución óptima del problema se encuentra en uno de los vértices de esta área de soluciones creada, por lo que se buscará en estos datos el valor mínimo o máximo del problema.

Temas tratados utilizando este método manual.

- a) Optimización en la fabricación de dos productos cualesquiera.
- b) Optimización cultivo de dos productos.
- c) Optimización en la venta de dos artículos.
- d) Optimización en la cría de dos animales.
- e) Optimización en la elaboración de dos artículos.
- f) Optimización en los gastos por transporte de trabajadores.

El método gráfico, se tratara de explicar áso a paso la solución planteada en los ejercicios, los cuales pueden ser de maximización o minimización de una función objeto

Ejercicio 1:

Una compañía de contadores que laboras con compañías y personas particulares en llevar sus contabilidades para el pago de los impuestos. Tienen interés en saber cuántas cuenta privada y personales pueden realizar mensualmente para maximizar sus ingresos. Se dispone de 1600 horas de trabajo para las compañías y 640 horas para las privadas. la promedio requiere de 80 horas de trabajo las compañías y 20 horas para los privados, además aporta un ingreso de 600 \$. La contabilidad requiere de 16 horas de trabajo en la compañía y de 10 horas de privado, produce un ingreso de 200 \$. El máximo de contabilidad mensuales disponibles es de 60.

Objetivo: Maximizar el ingreso total.

Variable de decisión:

X_1 = Cantidad de contabilidad en las compañías.

X_2 = Cantidad de Contabilidad privada

Restricciones:

Tiempo disponible de trabajo de trabajo en la compañía

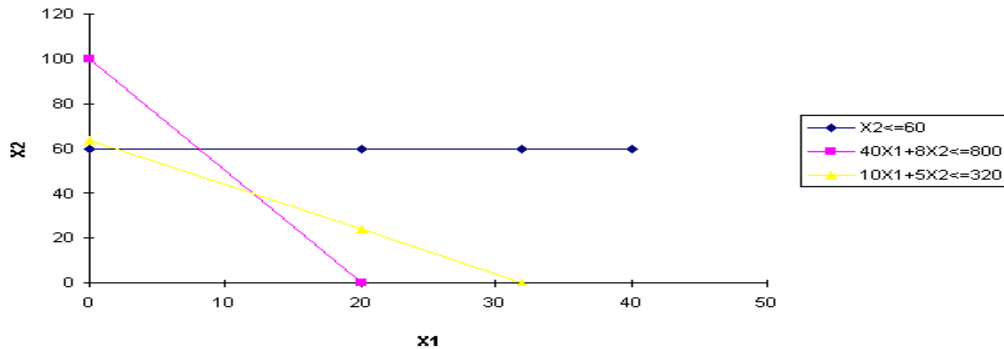
Tiempo disponible de trabajo en lo privado

Número máximo de Contabilidades.

$$Z_{[Maximizar]} = 600X_1 + 200X_2$$

Sujeto a:

$80X_1 + 16X_2 \leq 1.600$	Notemos que los números	$5X_1 + X_2 \leq 100$
$20X_1 + 10X_2 \leq 640$	que aparecen en las dos	$2X_1 + X_2 \leq 64$



Al graficar notamos que las rectas 1 y 2 (originadas por las inecuaciones) se cortan en un punto G, para determinarla empleamos el método de reducción de sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 5X_1 + X_2 = 100 \\ 2X_1 + X_2 = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2 \\ -5 \end{matrix} \begin{cases} 5X_1 + X_2 = 100 \\ 2X_1 + X_2 = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10X_1 + 2X_2 = 200 \\ -10X_1 - 5X_2 = -320 \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro resulta

$$-3X_2 = -120 \Rightarrow X_2 = \frac{120}{3} \Rightarrow X_2 = 40$$

Sustituyendo en la segunda

$$2X_1 + 40 = 64 \Rightarrow 2X_1 = 64 - 40 \Rightarrow 2X_1 = 24$$

$$\Rightarrow X_1 = \frac{24}{2} \Rightarrow X_1 = 12$$

Por lo tanto el punto de corte es G(12, 40)

Además las rectas 1 y 2 se cortan con la recta constante en los puntos

H e I

Punto	X_1	X_2	$5X_1 + X_2 = 100$	$2X_1 + X_2 = 64$
H	8	60	$5X_1 + 60 = 100 \Rightarrow 5X_1 = 40 \Rightarrow X_1 = 8$	
I	32	60	$2X_1 + 60 = 64 \Rightarrow 2X_1 = 4 \Rightarrow X_1 = 2$	

El punto **H(8, 60)** fuera del polígono de solución y el **I(2, 60)** dentro del polígono de solución

La solución óptima siempre se encuentra en uno de los vértices del conjunto de soluciones factibles. Se analizan estos valores en la función

objetivo. El vértice que representa el mejor valor de la función objetivo será la solución óptima.

$$Z_E = Z(0, 60) = 600(0) + 200(60) = 0 + 12.000 = 12.000 \$$$

$$Z_I = Z(2, 60) = 600(2) + 200(60) = 1.200 + 12.000 = 13.200 \$$$

$$Z_G = Z(12, 40) = 600(12) + 200(40) = 7.200 + 8.000 = 15.200 \$$$

$$Z_H = Z(20, 0) = 600(20) + 200(0) = 12.000 + 0 = 12.000 \$$$

$$Z_F = Z(0, 0) = 600(0) + 200(0) = 0 + 0 = 0 \$$$

Solución óptima

$$X_1 = 12 \text{ Contabilidad a compañías}$$

$$X_2 = 40 \text{ Contabilidad a privados}$$

$$Z_{Max} = 15.200 \$$$

Ejemplo 2.

Una tienda tiene que planea vender producto nuevo el próximo mes, la publicidad para el lanzamiento del nuevo producto desea realizarlo por 2 medios de difusión: La televisión y el periódico. Los estudios de mercado han mostrado que:

- a) La publicidad por T.V. Llega al 6 % de las familias de ingresos altos y al 9 % de las familias de ingresos medios por comercial.
- b) La publicidad en el periódico llega al 9 % de las familias de ingresos altos y al 18 % de las familias de ingresos medios por anuncio.

La publicidad en periódico tiene un costo de 1.500 \$. por anuncio y la publicidad por T.V. tiene un costo de 6.000 \$. por comercial. La meta es obtener al menos una presentación como mínimo al 108 % de las familias de ingresos altos y al 180 % de las familias de ingresos medios minimizando los costos de publicidad.

Objetivo: Minimizar los costos de publicidad.

Variable de decisión:

X_1 = Anuncios para las familias de ingreso alto.

X_2 = Anuncios para las familias de ingreso medio

Restricciones: Porcentaje de presentación.

$$Z_{[Minimizar]} = 6.000X_1 + 1.500X_2$$

Sujeto a:

$$\begin{array}{lll} 6X_1 + 9X_2 \leq 108 & \text{Notemos que los números} & 2X_1 + 3X_2 \leq 36 \\ 9X_1 + 18X_2 \leq 180 & \text{que aparecen en las dos} & X_1 + 2X_2 \leq 20 \\ X_1, X_2 \geq 0 & \text{inecuaciones son} & X_1, X_2 \geq 0 \end{array}$$

simplificable, la primera por 3 las dividimos por 9, obteniendo

Trabajando con la 1^{era} restricción se tiene

$$2X_1 + 3X_2 \leq 36 \text{ igualando para graficar } 2X_1 + 3X_2 = 36$$

Recordando que nos interesa la zona debajo de esta recta, damos valor a una de las variables y hallamos por despeje la otra, por comodidad asignamos valores ceros a cada variable en cada caso, por lo tanto:

Punto	X_1	X_2
A	0	12
B	18	0

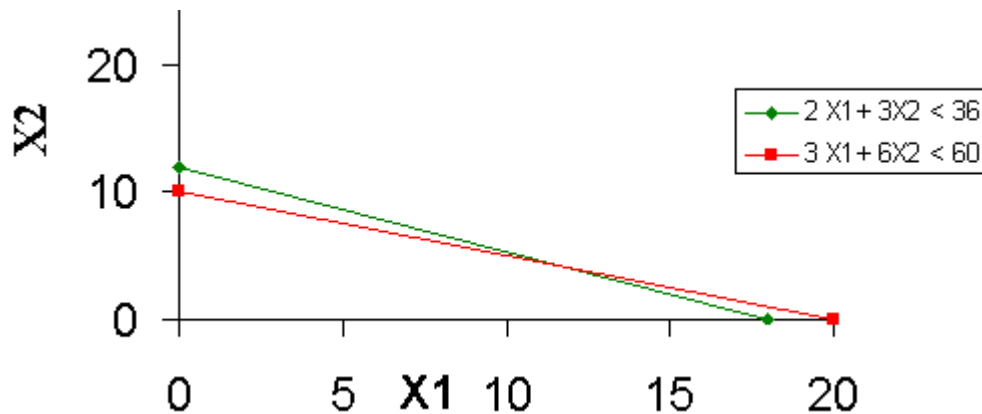
Trabajando con la 2^{da} restricción se tiene

$$X_1 + 2X_2 \leq 20 \text{ igualando para graficar } X_1 + 2X_2 = 20$$

Usando el mismo criterio anterior se tiene

Punto	X_1	X_2
C	0	10
D	20	0

Con estos puntos construimos nuestra grafica



Al graficar notamos que las rectas (originadas por las inecuaciones) se cortan en un punto **E**, para determinarla empleamos el método de reducción de sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 = 36 \\ X_1 + 2X_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2 \\ -3 \end{matrix} \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 = 36 \\ X_1 + 2X_2 = 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4X_1 + 6X_2 = 72 \\ -3X_1 - 6X_2 = -60 \end{cases}$$

Sumando miembro a miembro resulta

$$X_1 = 12$$

Sustituyendo en la segunda

$$12 + 2X_2 = 20 \Rightarrow 2X_2 = 20 - 12 \Rightarrow 2X_2 = 8 \Rightarrow$$

$$X_2 = \frac{8}{2} \Rightarrow X_2 = 4$$

Por lo tanto el punto de corte es $E(12, 4)$

La solución óptima siempre se encuentra en uno de los vértices del conjunto de soluciones factibles. Se analizan estos valores en la función objetivo. El vértice que representa el mejor valor de la función objetivo será la solución óptima.

$$Z_C = Z(0, 10) = 6.000(0) + 1.500(10) = 0 + 15.000 = 15.000 \$$$

$$Z_B = Z(18, 0) = 6.000(18) + 1.500(0) = 108.000 + 0 = 108.000 \$$$

$$Z_E = Z(12, 4) = 6.000(12) + 1.500(4) = 72.000 + 6.000 = 78.000 \$$$

$$Z_F = Z(0, 0) = 6.000(0) + 1.500(0) = 0 + 0 = 0 \$$$

Solución optima

$X_1 = 0$ Comercial por televisión.

$X_2 = 10$ Comerciales en periódicos.

$$Z_{Min} = 15.000 \$$$

Ejemplo 3

Para determinar la cantidad óptima de mesas redondas (X_1) y rectangulares (X_2) que debe fabricar la mueblería Romis SRL, se puede plantear un problema de programación lineal. El objetivo es maximizar la ganancia total, que se obtiene multiplicando las cantidades de mesas por sus correspondientes márgenes de ganancia. La función objetivo es:

$$Z = 8X_1 + 10X_2$$

Las restricciones son las limitaciones de recursos que tiene la empresa, como los tipos de maderas, pintura y las horas de trabajo. Estas se expresan mediante las siguientes inecuaciones:

$$2X_1 + 3X_2 \leq 600 \text{ (restriccion de madera)}$$

$$4X_2 \leq 600 \text{ (restriccion de pintura)}$$

$$2X_1 + X_2 \leq 500 \text{ (restriccion de horas)}$$

Además, se debe cumplir que las cantidades de mesas sean no negativas: $X_1 \geq 0$
 $X_2 \geq 0$

El problema se puede resolver gráficamente, trazando las rectas que corresponden a cada restricción y hallando el área factible, que es la región del plano que satisface todas las restricciones. Luego, se aplican los métodos del vértice o de la recta de nivel para encontrar el punto óptimo, que es el que maximiza la función objetivo. En este caso, el punto óptimo es (150, 100), lo que significa que la mueblería debe fabricar 150 mesas redondas y 100 mesas rectangulares para obtener una ganancia máxima de 2.200 \$.

Auto evaluación.

Empleando el método gráfico, realizar brevemente los siguientes ejercicios, señale los pasos realizados.

1.- Dada la siguiente tabla calcula el máximo beneficio de un empresa que produce 2 bienes A y B sujeto a

.	Bien A	Bien B	Capacidad
Mano de Obra	9	18	180
Materia prima	12	6	96
Materiales	3	6	48
Beneficio	60	72	

2.- Un Agricultor posee 200 hectáreas para cultivar Maíz y Arroz. El costo de la semilla de Maíz es de 8 \$ por hectárea y la semilla de Arroz tiene un coste de 12 \$ por hectárea. El coste total de mano de obra es de 40 \$ y 20 \$ por hectárea respectivamente. El ingreso esperado es de 220 \$ por hectárea de Maíz y 300\$ por hectárea de Arroz. Si no se desea gastar más de 960 \$ en semillas ni más de 3000 \$ en mano de obra. ¿Cuántas hectáreas de cada uno de los cultivos debe plantearse para obtener la máxima ganancia?

3.- Un empresario tiene a su disposición dos actividades de producción lineales, mediante la contribución de tres insumos, fundición, ensamblaje y distribución de 180\$, 80\$ y 140\$ respectivamente. La distribución de los insumos a los productos se resume en la siguiente tabla:

	Producto A	Producto B	Disponibilidad
Función	10	30	180
Producción	10	10	80
Distribución	20	10	140
Beneficio	10	20	

Determinar la combinación a producir que maximice los beneficios.

4.- Un granjero posee 100 hectáreas para cultivar trigo y alpiste. El costo de la semilla de trigo es de 40 \$ por hectárea y la semilla de alpiste tiene un coste de 60 \$ por hectárea. El coste total de mano de obra es de 200 \$ y 100 \$ por hectárea respectivamente. El ingreso esperado es de 1.100 \$ por hectárea de trigo y 1.500 \$ por hectárea de alpiste. Si no se desea gastar más de 4.800 \$ en semillas ni más de 15.000 \$ en mano de obra. ¿Cuántas hectáreas de cada uno de los cultivos debe plantearse para obtener la máxima ganancia?

	Trigo	Alpiste	Disponibilidad
Semillas	40	60	4800
Mano de Obra	200	100	15000
Beneficio	1100	1500	

5.- Establecer las restricciones, funciones y explique cómo calcula el máximo beneficio de un empresa que produce 2 bienes A y B sujeto a los siguientes datos.

	A	B	Capacidad
Mano de Obra	300	600	6000
Materias Primas	400	200	3200
Materiales	100	200	1600
Beneficio	2000	2400	

Método simplex

Es un método iterativo y analítico empleado para obtener solución de problemas de programación lineal, por este método se puede resolver problemas que poseen más complejos que los resueltos por el método gráfico con una mayor cantidad de restricción en el número de variables.

Este método permite mejorar la solución a cada paso. La razón matemática de ello radica en que el método consiste en ir de vértice a vértice para optimizando la función objetivo. Fue desarrollado alrededor de 1947 por el norteamericano George Dantzig con el objetivo de crear un algoritmo capaz de solucionar de problemas militar de m restricciones y n variables

Tipo de Optimización

- **Maximización:** Busca obtener el mayor valor óptimo.
- **Minimización:** Busca obtener el menor valor óptimo.

Condiciones del modelo

- El objetivo es determinar el valor máximo o mínimo de la función objeto
- Todas las restricciones deben ser igualdades.
- Todas las variables X_i deben tener valor positivo o nulo.
- Los términos independientes b_i de las restricciones debe ser no negativo

1^{er} Paso: Es convertir las inecuaciones de las restricciones en igualdad, para ello se le agrega una nueva variable básica denominada Holgura.

Característica de las Variables de Holgura.

- Variable que se agrega a cada restricción con el propósito de convertir la inecuación en igualdades o ecuaciones, requisito del

método. Se representan como H_n , donde n corresponde al número de variable de holgura.

- Estas variables suelen estar representadas por la letra "H", aunque puede ser usado otra letra (S_n , X_n), se suman si la restricción es de signo " \leq " y se restan si la restricción es de signo " \geq "

Optimalidad

- ❖ El método simplex asegura mediante la iteración encontrar una solución más óptimo
- ❖ El criterio de la variable de entrada consiste en:
 - a) Elegir en maximización a la variable que tiene el mayor coeficiente negativo de la ecuación " X_0 " (función objetivo).
 - b) En minimización el criterio a elegir es el más positivo.
- ❖ Según la condición (Maximizar o Minimizar), se llega al óptimo:
 - a) Todos los coeficientes del lado izquierdo de la ecuación " X_0 " son no negativos en maximización.
 - b) Todos los coeficientes del lado izquierdo de la ecuación **X_0** son no positivos en minimización.
- ❖ Un empate entre las variables se rompe arbitrariamente

Factibilidad

- ❖ Este método nos asegura que partiendo de una solución básica factible, únicamente se encontraran soluciones básicas factibles.
- ❖ Por la condición anterior se asocia el criterio de la variable de salida:

- a) Elegir la variable según el cociente más pequeño positivo de los valores actuales de la solución y los coeficientes positivos de las restricciones de la variable que entra.
- b) El criterio para seleccionar la variable de salida es el mismo independientemente si el objetivo es de tipo maximización o minimización.

❖ Un empate se rompe arbitrariamente

Cálculos de gauss – Jordán.

El método de Gauss - Jordán consiste en transformar un sistema de ecuaciones en otro equivalente de forma que este sea escalonado, el método Simplex usa el mismo principio.

❖ Fila Pivote

- a) Reemplazar la variable de salida en la columna básica con la variable de entrada.
- b) Nueva Fila Pivote = Fila Pivote Actual/Elemento pivote

$$F_{ai} \div C_{fp} \rightarrow F_{an}$$

❖ Todas las demás filas, incluyendo Z

- a) Nueva Fila = (Fila Actual) – (Coeficiente de la columna Pivote) x (Nueva fila Pivote)

$$-C_{cp}F_a + F_b \rightarrow F_{bn}$$

Pasos en el método simplex

1. Determinar la solución factible básica inicial
2. Determinar la variable de Entrada utilizando la condición de optimalidad.
3. Seleccionar la variable de salida utilizando la condición de factibilidad.

4. Aplique los pasos de cálculo de Gauss - Jordán para determinar la nueva solución básica. Vaya al paso 1

Ejemplo 1.

Daga ña función objeto:

$$Z_{[MIN]} = -2X_1 - X_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 &\leq 10 \\ X_1 + 2X_2 &\leq 12 \\ X_1 &\leq 9 \\ X_1, X_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Para resolver el problema mediante el método simplex, primero debemos expresar las restricciones en forma estándar, es decir, igualando a cero el lado derecho de las desigualdades. Para ello, introducimos variables de holgura H_1 , H_2 y H_3 que representan la diferencia entre el lado izquierdo y el derecho de cada restricción. Así, el problema queda como:

$$Z_{[MIN]} = -2X_1 - X_2$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + H_1 &= 10 \\ X_1 + 2X_2 + H_2 &= 12 \\ X_1 + H_3 &= 9 \\ X_1, X_2 &\leq 1; H_1, H_2, H_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Luego, construimos la tabla simplex inicial con los coeficientes de las variables en la función objetivo y las restricciones. La tabla tiene tantas filas como restricciones más una fila para la función objetivo, y tantas columnas como variables más una columna para el término independiente. La tabla inicial es:

↓

Básica	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	b
Z	1	-2	-1	0	0	0	0
H ₁	0	1	1	1	0	0	10
H ₂	0	1	2	0	1	0	12
H ₃	0	1	0	0	0	1	9

El objetivo es minimizar **Z**, por lo que buscamos una solución factible que tenga el menor valor posible de **Z**. Para ello, aplicamos el siguiente algoritmo:

- **Paso 1:** Identificar la variable que entra en la base. Se trata de la variable no básica que tiene el coeficiente más negativo en la fila de **Z**. En este caso, es **X** con un coeficiente de **-2**.

- **Paso 2:** Identificar la variable que sale de la base. Se trata de la variable básica que tiene el menor cociente entre el término independiente y el coeficiente de la variable que entra en la base.

$$\text{Razon}_{\min} : \frac{b_i}{c_{cp}} \left\{ \frac{10}{1} = 10; \frac{12}{1} = 12; \frac{9}{1} = 9 \right\}.$$

En este caso, es **H₃** con un cociente de **9/1**.

↓

Básica	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	B
Z	1	-2	-1	0	0	0	0
H ₁	0	1	1	1	0	0	10
H ₂	0	1	2	0	1	0	12
X ₁	0	1	0	0	0	1	9

$$2F_4 + F_1 \rightarrow F_1$$

$$-F_4 + F_2 \rightarrow F_2$$

$$-F_4 + F_3 \rightarrow F_4$$

- **Paso 3:** Realizar operaciones elementales de fila para obtener un uno en la posición del elemento pivote (la intersección entre la columna de la variable que entra y la fila de la variable que sale) y ceros en el resto de la columna. En este caso, dividimos la tercera fila por uno y restamos a la primera fila dos veces la tercera fila. La nueva tabla es:

Básica	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	b
Z	1	0	-1	0	0	2	18
H ₁	0	0	1	1	0	-1	1
H ₂	0	0	2	0	1	-1	3
X ₁	0	1	0	0	0	1	9

- **Paso 4:** Comprobar si se ha alcanzado la solución óptima. Si todos los coeficientes de la fila de **Z** son no negativos, entonces se ha encontrado la solución óptima. En caso contrario, volver al paso 1. En este caso, aún hay coeficientes negativos en la fila de **Z**, por lo que repetimos el algoritmo.

↓

Básica	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	B
Z	1	0	-1	0	0	0	18
X ₂	0	0	1	1	0	-1	1
H ₂	0	0	2	0	1	-1	3
X ₁	0	1	0	0	0	1	9

$F_2 + F_1 \rightarrow F_1$

$-2F_2 + F_3 \rightarrow F_3$

$$\text{Razon}_{\min} : \frac{b_i}{c_{cp}} \left\{ \frac{1}{1} = 1; \frac{3}{1} = 3 \right\}.$$

En este caso, es **H₁** con un cociente de 1/1.

Básica	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	b
Z	1	0	0	1	0	-1	19
X ₂	0	0	1	1	0	-1	1
H ₂	0	0	0	-2	1	1	1
X ₁	0	1	0	0	0	1	9

- **Paso 5:** Repetir los pasos anteriores hasta obtener una tabla óptima. En este caso ya llegamos a la solución óptima que es $X_1 = 9$; $X_2 = 1$; $b = 19$

Ejemplo 2

Este problema tiene cuatro variables y dos restricciones. Para aplicar el método simplex, se introducen dos variables de holgura, H_1 y H_2 , que representan la diferencia entre el lado izquierdo y el lado derecho de cada restricción. Así, el problema equivalente queda:

$$Z_{[MAX]} = 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 6X_4$$

Sujeto a

$$2X_1 + X_2 + X_3 + 8X_4 \leq 6$$

$$X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 \leq 4$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

Para resolver este ejercicio, se puede aplicar el método simplex. El método simplex consiste en transformar el problema original en un problema equivalente que tenga una solución básica factible inicial, y luego ir mejorando esa solución mediante operaciones elementales sobre las filas de una tabla que representa el sistema de restricciones. El proceso termina cuando se alcanza una solución óptima o se detecta que el problema es no acotado o incompatible.

$$Z - 3X_1 - 6X_2 - 5X_3 - 6X_4 = 0$$

Sujeto a

$$2X_1 + X_2 + X_3 + 8X_4 + H_1 = 6$$

$$X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 + H_2 = 4$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4, H_1, H_2 \geq 0$$

La solución básica factible inicial es

$$(X_1, X_2, X_3, X_4, H_1, H_2) = (0, 0, 0, 0, 6, 4),$$

con un valor de $Z = 0$. Se construye la tabla simplex correspondiente:

Básica	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	H ₁	H ₂	B
Z	1	-3	-6	-5	-6	0	0	0
X ₄	0	2	1	1	8	1	0	6
H ₂	0	1	1	2	1	0	1	4

↓

$F_1 \div 8 \rightarrow F_2$

Se observa que hay coeficientes negativos en la fila de **Z**, lo que indica que la solución no es óptima. Se elige la variable que entra a la base, que es aquella que tiene el coeficiente más negativo en la fila de **Z**. En este caso, hay un empate entre **X₃** y **X₄**, así que se puede elegir cualquiera de las dos. Por ejemplo, se elige **X₄**. Luego, se determina la variable que sale de la base, que es aquella que tiene el menor cociente entre el término independiente y el coeficiente de la variable que entra en cada fila.

$$\text{Razon}_{\min} : \frac{b_i}{C_{cp}} \left\{ \frac{6}{8} = 0,75; \frac{4}{1} = 4 \right\}$$

En este caso, el menor cociente se da en la primera fila, con un valor de $6/8 = 0.75$ que es la menor. Por lo tanto, la variable que sale es **H₂**. Se realiza la operación elemental que consiste en dividir la primera fila por el coeficiente 8 de **X₄**

Básica	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	H ₁	H ₂	b
Z	1	-3	-6	-5	-6	0	0	0
X ₄	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
H ₂	0	1	1	2	1	0	1	4

$6F_2 \div F_1 \rightarrow F_1$

$-F_2 \div F_3 \rightarrow F_3$

Se obtiene la siguiente tabla:

Básica	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	H ₁	H ₂	b
Z	1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{21}{4}$	$-\frac{17}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{2}$
X ₄	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
H ₂	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{17}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	1	$\frac{13}{4}$

$\leftarrow F_3 \cdot \frac{3}{4} \rightarrow F_3$

Se repite el proceso hasta que no haya coeficientes negativos en la fila de **Z** o hasta que no se pueda mejorar la solución.

$$\text{Razon}_{\min}: \frac{b_i}{C_{cp}} \left\{ \frac{\frac{3}{4}}{1} = 3; \frac{\frac{13}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{13}{3} = 4,33 \right\}$$

En este caso, se puede seguir mejorando la solución eligiendo como variable que entra a la base a **X₁** y como variable que sale a la base a **H₂**.

Se obtiene la siguiente tabla:

Básica	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	H ₁	H ₂	b	
Z	1	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{21}{4}$	$-\frac{17}{4}$	0	$\frac{3}{4}$	0	$\frac{9}{2}$	$\frac{3}{2}F_3 \div F_1 \rightarrow F_1$
X ₄	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}F_3 \div F_2 \rightarrow F_2$
X ₁	0	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{17}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{13}{3}$	

Finalmente, se llega a una solución óptima eligiendo como variable que entra a la base a **X₂** y como variable que sale a la base a **X₅**. Se obtiene la siguiente tabla:

Básica	Z	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	B
Z	1	0	0	0	0	$-\frac{5}{8}$	2	11
X ₄	0	0	$-\frac{1}{6}$	$-\frac{7}{12}$	-1	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{49}{12}$
X ₁	0	1	$\frac{7}{6}$	$\frac{17}{6}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{13}{3}$

La solución óptima es $(X_1, X_2, X_3, X_4, H_1, H_2) = (0, 0, 0, 0, -\frac{5}{8}, 2)$, con un valor de

$Z = 11$. Esta solución indica que $X_4 = -\frac{49}{12}$ solución infactible por ser negativo y $X_1 = \frac{13}{3}$.

Ejemplo 3

Dada la siguiente función objeto:

$$Z_{[Max]} = 3X_1 + 2X_2$$

Sujeto a:

$$2X_1 + X_2 \leq 18$$

$$2X_1 + 3X_2 \leq 42$$

$$3X_1 + X_2 \leq 24$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

1^{er} Paso: Convertir las desigualdades en igualdades.

Se suma una variable de holgura por cada una de las restricciones por ser del tipo \leq , para convertirlas en igualdades:

$$2X_1 + X_2 + H_1 = 18$$

$$2X_1 + 3X_2 + H_2 = 42$$

$$3X_1 + X_2 + H_3 = 24$$

$$X_1; X_2; H_1; H_2; H_3 \geq 0$$

2^{do} Paso: Igualar la función objetivo a cero

$$Z - 3X_1 - 2X_2 = 0$$

3^{er} Paso: Escribir la tabla inicial simplex

En las columnas aparecerán todas las variables básicas del problema y las variables de holgura. En las filas se observan, para cada restricción las variables de holgura con sus coeficientes de las igualdades obtenidas, y la última fila con los valores resultantes de sustituir el valor de cada variable en la función objetivo, y de operar tal como se explicó en la teoría para obtener el resto de valores de la fila:

Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Sol
Z	1	-3	-2	0	0	0	0
H_1	0	2	1	1	0	0	18
H_2	0	2	3	0	1	0	42
H_3	0	3	1	0	0	1	24

4to Paso: Finalizar.

Cuando en la fila Z no existe ningún valor negativo, se ha alcanzado la solución óptima del problema. En tal caso, se ha llegado al final del algoritmo. En caso contrario, se ejecutan los siguientes pasos.

5to Paso: Variable que entra y sale de la base.

- a) Se determina la variable que entra en la base. Para ello seleccionamos la columna de la fila Z, el menor valor de los negativos. En este caso sería la variable X_1 cuyo coeficiente es (- 3).
- b) En el caso de existiesen dos o más coeficientes iguales que cumplan la condición anterior (caso de empate), entonces se optará por aquella variable que sea básica. La columna de la variable que entra en la base se llama columna pivote.

c) Conocida la variable que entra en la base, podemos determinar cual será la variable que sale. Para ello se divide cada término independiente (Columna Sol) entre el elemento correspondiente de la columna pivote, siempre que el resultado sea mayor que cero, y se escoge el mínimo de ellos.

$$\text{Razon}_{\text{minima}} = \frac{\text{cada término independiente de la columna solución}}{\text{cada elemento correspondiente de la columna pivote}}$$

$$\text{Razon}_{\text{minima}} \geq 0$$

En nuestro caso:

$$\text{Razon}_{\text{minima}}: \left\{ \frac{18}{2} = 9; \frac{42}{2} = 21; \frac{24}{3} = 8 \right\}; \text{escogemon la ultima } F_4$$

El término de la columna pivote que en la división anterior dé lugar al menor cociente positivo, el 3, ya que 8 es el menor cociente, indica la fila de la variable de holgura que sale de la base, (H_3).

Si hubiera algún elemento menor o igual a cero no se realiza dicho cociente, y caso de que todos los elementos de la columna pivote fueran de ésta condición tendríamos una solución no acotada y terminaríamos el problema.

Si al realizar los cocientes antes señalados, resultan dos o más son iguales (caso de empate), se escoge aquella que no sea variable básica (si es posible).

d) En la intersección de la fila pivote y columna pivote tenemos el elemento pivote, en nuestro caso **3**.

6^{to} Paso: Determinar los nuevos coeficientes de la tabla simplex.

Los nuevos coeficientes de la fila pivote, F_4 se obtienen dividiendo todos los coeficientes de la fila entre el elemento pivote, (3), ya que se debe convertir en 1.

Luego usando la reducción gaussiana hacemos ceros los restantes términos de su columna, con lo que obtenemos los nuevos coeficientes de

las otras filas incluyendo los de la función objetivo Z.

↓ **Columna pivote**

Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Sol
Z	1	-3	-2	0	0	0	0
H_1	0	2	1	1	0	0	18
H_2	0	2	3	0	1	0	42
X_1	0	3	1	0	0	1	24

Fila pivote

← $F_4 \div 3 \rightarrow F_4$

Queda

Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Sol
Z	1	-3	-2	0	0	0	0
H_1	0	2	1	1	0	0	18
H_2	0	2	3	0	1	0	42
X_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	8

$3F_4 + F_1 \rightarrow F_1$

$-2F_4 + F_2 \rightarrow F_2$

$-2F_4 + F_3 \rightarrow F_3$

Resulta

Básica	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Sol
Z	1	0	-1	0	0	1	24
H_1	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	2
H_2	0	0	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	26
X_1	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	8

Vemos que no hemos alcanzado la condición final, ya que en los elementos de la última fila, Z, hay uno negativo, (-1). Hay que repetir el proceso:

La nueva variable que entra en la base es (X_2) , por ser la variable que corresponde a la columna donde se encuentra el coeficiente (-1).

↓ **Columna pivote**

Básica	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	Sol
Z	1	0	-1	0	0	1	24
X ₂	0	0	$\frac{1}{3}$	1	0	$-\frac{2}{3}$	2
H ₂	0	0	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	26
X ₁	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	8

← **Fila pivote**

$F_2 \times 3 \rightarrow F_2$

Para calcular la variable que sale, dividimos los términos de la última columna entre los términos correspondientes de la nueva columna pivote:

$$\text{Razon}_{\text{minima}}: \frac{\text{Sol}}{C_{cp}} : \left\{ \frac{2}{\frac{1}{3}} = 6; \frac{26}{\frac{7}{3}} = \frac{78}{7}; = 11,14 \quad \frac{8}{\frac{1}{3}} = 24 \right\}$$

como el menor cociente positivo es 6, tenemos que la variable que sale es r (H₁) fila F₂. El elemento pivote, que ahora hay que hacer 1, es 1/3. Operando de forma análoga a la anterior obtenemos la tabla:

Básica	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	Sol	
Z	1	0	-1	0	0	1	24	$F_2 + F_1 \rightarrow F_1$
X ₂	0	0	1	1	0	-2	6	
H ₂	0	0	$\frac{7}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	26	$-\frac{7}{3}F_2 + F_3 \rightarrow F_3$
X ₁	0	1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	8	$-\frac{1}{3}F_2 + F_4 \rightarrow F_4$

Resulta

Básica	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	Sol
Z	1	0	0	1	0	.1	30
X ₂	0	0	1	1	0	-2	6
H ₂	0	0	0	$-\frac{7}{3}$	1	4	12
X ₁	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	6

Como en los elementos de la fila Z hay uno negativo, -1, significa que no hemos llegado todavía a la solución óptima. Hay que repetir el proceso:

Columna pivote



Básica	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	Sol
Z	1	0	0	1	0	-1	30
X ₂	0	0	1	1	0	-2	6
H ₃	0	0	0	$-\frac{7}{3}$	1	4	12
X ₁	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	6

← Fila pivote
 $F_3 \div 4 \rightarrow F_3$

La variable que entra en la base es(H₃), por ser la variable que corresponde al coeficiente (-1). Para calcular la variable que sale, dividimos los términos de la última columna entre los términos correspondientes de la nueva columna pivote:

$$\text{Razon}_{\text{minima}}: \frac{\text{Sol}}{C_{cp}}: \left\{ \frac{6}{-2} = -3; \frac{12}{4} = 3; \frac{6}{1} = 6 \right\}$$

como el menor cociente positivo es 3, tenemos que la variable que sale es (H₂). Ósea la F₃. El elemento pivote, que ahora hay que hacer 1, es 4. Obtenemos la tabla:

Básica	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	Sol
Z	1	0	0	1	0	-1	30
X ₂	0	0	1	1	0	-2	6
H ₃	0	0	0	$-\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	1	3
X ₁	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	0	1	6

$$F_3 + F_1 \rightarrow F_1$$

$$2F_3 + F_2 \rightarrow F_2$$

$$-F_3 + F_4 \rightarrow F_4$$

Resultando

Básica	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	Sol
Z	1	0	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{4}$	0	33
X ₂	0	0	1	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	0	12
H ₃	0	0	0	$-\frac{7}{12}$	$\frac{1}{4}$	1	3
X ₁	0	1	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	3

Se observa que en la última fila todos los coeficientes son positivos, por lo tanto se cumple la condición de parada, obteniendo la solución óptima.

La solución óptima viene dada por el valor de Z en la columna de los valores solución, en este caso: 33. En la misma columna se puede observar el punto donde se alcanza, observando las filas correspondientes a las variables de decisión que han entrado en la base: $X_1 = 3$ y $X_2 = 12$

Auto evaluación

Empleando el método simplex, realizar brevemente los siguientes ejercicios, señale los pasos realizados.

1. Un empresario tiene a su disposición dos actividades de producción lineales, mediante la contribución de tres insumos, fundición,

ensamblaje y distribución de 180 \$, 80 \$ y 140 \$ respectivamente. La distribución de los insumos a los productos se resume en la siguiente tabla:

	Producto 1	Producto 2	Disponibilidad
Fundición	2	6	36
Ensamblaje	2	2	15
Distribución	4	2	28
Beneficio	4	8	

Determinar la combinación a producir que maximice los beneficios

2. Un granjero posee 200 hectáreas para cultivar maíz y cebolla. El costo de la semilla de maíz es de 40 \$ por hectárea y la semilla de cebolla tiene un coste de 60 \$ por hectárea. El coste total de la mano de obra es de 40 \$ y 20 \$ por hectárea respectivamente. El ingreso esperado es de 220 \$ por hectárea de maíz y 300 \$ por hectárea de cebolla. Si no se desea gastar más de 4800 \$ en semillas ni más de 3000 \$ en mano de obra. ¿Cuántas hectáreas de cada uno de los cultivos debe plantarse para obtener la máxima ganancia?

3. Establecer las restricciones, funciones y explique cómo determinar el máximo beneficio de un empresa que produce 2 bienes X e Y sujeto a los siguientes datos.

	X	Y	CAPACIDAD
Mano de Obra	30	60	600
Materias Primas	8	4	64
Materiales	2	4	32
Beneficio	200	240	

4. Un orfebre fabrica dos tipos de joyas. La unidad de tipo A se hace con 2 g de oro y 3 g de plata y se vende a 50 \$. La de tipo B se vende a 60 \$ y lleva 3 g de oro y 2 g de plata. Si solo se dispone de 1500 g de cada

metal, ¿cuántas joyas ha de fabricar de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

Método Dual

El método simplex es un algoritmo iterativo que iniciando en una solución básica factible pero no óptima, genera soluciones básicas factibles cada vez mejores hasta encontrar la solución óptima (sí esta existe). Observe su lógica se basa en la factibilidad, y busca la optimalidad. Pero existe la posibilidad de usar otro modelo similar iterativo, que a diferencia del simplex, inicia con una solución básica óptima, pero no factible y mantiene la inmejorabilidad mientras busca la factibilidad. Con este procedimiento se llega igualmente a la solución óptima.

El nuevo algoritmo fue desarrollado en 1954 por C. E. Lemke y se conoce con el nombre de **Método Dual-Simplex**. Estudiaremos a continuación su estructura y realizaremos ejemplos de su aplicación.

Algoritmo Dual-Simplex para un modelo de maximización

Iniciamos este algoritmo, expresándolo en formato estándar, como en el método simplex, o sea, agregar las variables de holgura o de exceso necesarias. En las ecuaciones cuyas variables de exceso (originadas de restricciones de tipo \geq), debemos multiplicarlas por **(-1)** en ambos lados, para hacer positivo el coeficiente de la variable de exceso, y formar así un vector unitario que nos permita tomar esta variable de exceso como una variable básica inicial. sin necesidad de agregar una variable artificial en esa restricción.

- a) Mediante esta operación logramos que debajo de las variables básicas aparezca una matriz identidad, que en el método simplex es tomada como base inicial.
- b) Los términos del lado derecho de las ecuaciones multiplicadas por (-1) quedan con signo negativo, lo cual hace que la solución inicial sea infactible.
- c) Debemos destacar que este proceso es muy útil ya que en muchos modelos evita la inclusión de variables artificiales en el momento de transformar un modelo a formato estándar.

El algoritmo para resolver un modelo de maximización:

Paso 1: Hallar una solución básica inicial infactible e inmejorable

Escribir las expresiones iniciales tomando a las variables de holgura y de exceso como variables básicas iniciales

Paso 2: Ver la factibilidad

- ❖ Cuando en todas las variables básicas presente en la función objetos son no negativas, la solución presentada es la óptima.
- ❖ De existir al menos una variable básica negativa, se selecciona como variable de salida.
- ❖ Aquella con el valor más negativo (la designamos como $(X_B)_s$), a. Los empates se pueden romper arbitrariamente.

Paso 3: Prueba de inmejorabilidad

- ❖ Sí en el renglón de la variable básica de salida $(X_B)_s$ todos los coeficientes de reemplazo con las variables no básicas son no negativos, la solución del modelo es óptima ilimitada. Se termina el proceso.

- ❖ Si en el renglón de la variable básica de salida (X_B)s, al menos existe un coeficiente de intercambio negativo, efectúanos los cocientes entre los valores de cada variable no básicas y su correspondiente coeficiente de intercambio negativo. Es decir, siendo (X_B)s la variable de salida se calculan todos los cocientes.

$$\left| \frac{E_j}{(S_j)s} ; \text{para todo } (H_j)s_0 \right|$$

- ❖ Se toma como variable de entrada (Llamémosla X_e) a aquella que corresponda al mínimo de los cocientes del anterior conjunto
- ❖ Si la variable de entrada es X_e el elemento pivote será el elemento (H_e)s
- ❖ El empate se puede romper arbitrariamente.
- ❖ Aplicar la operación de pivoteo para generar la nueva tabla, en la cual aparezca X_e como variable básica en lugar de la variable de salida (X_B)s
- ❖ Repetir el algoritmo a partir del paso 2.

Ejercicio 1.

Dada la siguiente:

Función Objeto (F. O.):

$$Z_{[Min]} = 4X_1 + 12X_2 + 18X_3$$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 + 3X_3 &\geq 3 \\ 2X_2 + 2X_3 &\geq 5 \\ X_1; X_2; X_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solución:

1^{er} Paso: Convertir el problema de minimización en uno de maximización. La función objetivo se multiplica por **(- 1)**

$$Z_{[Max]} = -4X_1 - 12X_2 - 18X_3$$

Las restricciones se multiplican por **(- 1)**

$$\begin{aligned}
 -X_1 - 3X_3 &\leq -3 \\
 -2X_2 - 2X_3 &\leq -5 \\
 X_1; X_2; X_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

2^{do} Paso: Se convierten las inecuaciones en ecuaciones.

F. O. $Z_{[Max]} + 4X_1 + 12X_2 + 18X_3 = 0$

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
 -X_1 - 3X_3 + S_1 &= -3 \\
 -2X_2 - 2X_3 + S_2 &= -5
 \end{aligned}$$

3^{er} Paso: Se determinan las variables básicas y no básicas:

Básicas: H_1 y H_2 y **No Básicas:** X_1 , X_2 y X_3

4^{to} Paso: Elaborar la tabla inicial del Simplex

Variable Básica	Variables						Solución
	Z	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	
Z	1	4	12	18	0	0	0
H₁	0	-1	0	-3	1	0	-3
H₂	0	0	-2	-2	0	1	-5

5^{to} Paso: Determinar la variable que sale (fila pivote)

Es el número más negativo de las soluciones de las restricciones, en nuestro caso la fila H_2

6^{to} Paso: Determinar la variable que entra (columna pivote)

$$Razon_{Mayor} = \frac{\text{Coeficiente de } Z}{\text{Coeficiente de fila pivote}}: \left[\frac{12}{-2} = -6; \frac{18}{-2} = -9; \frac{0}{1} = 0 \right]$$

Razon Mayor en nuestro caso es -6 por tanto X_2

Variable Básica	Variables						Solución
	Z	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	
Z	1	4	12	18	0	0	0
H₁	0	-1	0	-3	1	0	-3
X_2	0	0	-2	-2	0	1	-5
Razón	-	-	-6	-9	-	0	

↑

7^{mo} Paso: Elaborar la nueva tabla del Simplex

$$\text{Nueva fila pivote} = \frac{\text{Fila pivote}}{\text{Elemento pivote}} = \frac{F_3}{-2} \rightarrow F_3$$

Variable Básica	Variables						Solución
	Z	X ₁	X ₂	X ₃	H ₁	H ₂	
Z	1	4	12	18	0	0	0
H ₁	0	-1	0	-3	1	0	-3
X ₂	0	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

$\frac{F_3}{-2} \rightarrow F_3$

Nueva fila =

– Coeficiente de la columna pivote x nueva fila pivote
+ fila anterior

$-12F_3 + F_1 \rightarrow F_1$	$0F_3 + F_2 \rightarrow F_2$
$-12(0) + 1 = 0 + 1 = 1$	$0(0) + (0) = 0 + 0 = 0$
$-12(0) + 4 = 0 + 4 = 4$	$0(0) + (-1) = 0 - 1 = -1$
$-12(1) + 12 = -12 + 12 = 0$	$0(1) + (0) = 0 + 0 = 0$
$-12(1) + 18 = -12 + 18 = 6$	$0(1) + (-3) = 0 - 3 = -3$
$-12(0) + 0 = 0 + 0 = 0$	$0(0) + (1) = 0 + 1 = 1$
$-12\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 = 6 + 0 = 6$	$0\left(-\frac{1}{2}\right) + 0 = 0 + 0 = 0$
$-12\left(\frac{5}{2}\right) + 0 = -30 + 0 = -30$	$0\left(\frac{5}{2}\right) + (-3) = 0 - 3 = -3$

Nueva Tabla del Simplex.

Variable Básica	Variables						Solución
	Z	X ₁	X ₂	X ₃	H ₁	H ₂	
Z	1	4	0	6	0	6	-30
H ₁	0	-1	0	-3	1	0	-3
X ₂	0	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$

Repitiendo el proceso ya que aún hay solución de valor negativo:

Variable Básica	Variables						Solución
	Z	X ₁	X ₂	X ₃	H ₁	H ₂	
Z	1	4	0	6	0	6	-30
X ₃	0	-1	0	-3	1	0	-3
X ₂	0	0	1	1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
Razón	-	-4	-	-2	0	-	

Realizamos nuevamente los pasos del 5 al 7 obteniendo como solución final,

Variable Básica	Variables						Solución
	Z	X ₁	X ₂	X ₃	H ₁	H ₂	
Z	1	$-\frac{1}{3} = -0,33$	0	0	0	6	-36
X ₃	0	$\frac{1}{3} = 0,33$	0	1	$-\frac{1}{3} = 0,33$	0	1
X ₂	0	0	1	0	$\frac{1}{3} = 0,33$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$

NOTA: No hay más iteraciones cuando no existan soluciones con coeficientes negativos.

Respuesta:

El valor mínimo se alcanza para un $X_2 = \frac{3}{2}$ y $X_3 = 1$, para un $Z = 36$

Ejercicio 2

Sea el siguiente Función Objeto:

$$Z_{[\text{Maximizar}]} = -2X_1 - 2X_2 - 3X_3$$

Sujeto a:

$$2X_1 + 4X_2 + 2X_3 \geq 10$$

$$3X_1 - 3X_2 + 9X_3 \leq 12$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

1^{er} Paso: Expresemos el modelo en formato estándar:

$$Z_{[\text{Minimizar}]} = 2X_1 + 2X_2 + 3X_3$$

Sujeto a:

$$2X_1 + 4X_2 + 2X_3 - H_1 = 10$$

$$3X_1 - 3X_2 + 9X_3 + H_2 = 12$$

2^{er} Paso. Multipliquemos por (-1) en ambos lados de las ecuaciones, para formar los vectores unitarios, requeridos para contar con una base inicial unitaria. Pasando todos al primer miembro

$$Z - 2X_1 - 2X_2 - 3X_3 = 0$$

Sujeto a:

$$-2X_1 - 4X_2 - 2X_3 + H_1 = -10$$

$$-3X_1 + 3X_2 - 9X_3 - H_2 = -12$$

3^{er} Paso: Tomando las variables básicas iniciales hacemos lo siguiente:

Variable Básica	Variables						Solución
	Z	X ₁	X ₂	X ₃	H ₁	H ₂	
Z	1	-2	-2	-3	0	0	0
H ₁	0	-2	-4	-2	1	0	-10
H ₂	0	-3	3	-9	0	-1	-12

4^{to} Paso: Determinar la variable que sale (fila pivote).

Es el número más negativo de las soluciones de las restricciones, en nuestro caso la fila **H₂**

5^{to} Paso: Determinar la variable que entra $(S_{ij})_2 < 0$ obtenemos la columna pivote)

$$Razon_{Min} = X_e = \text{Min de } [X_1; X_3] = \frac{\text{Coeficiente de Z}}{\text{Coeficiente de fila pivote}}$$

$$Razon_{Min} = X_e = \left[\frac{-2}{-3} = 0,6; \frac{-3}{-9} = 0,3 \right]$$

Es decir que X_3 es la variable de entrada (entonces $e = 3$) y el elemento pivote es el $(S_e)_s = (S_3)_2 = -9$

La razón menor es 0,3 por tanto la columna pivote es X_3

6^{to} Paso: Construimos la tabla simplex.

Variable Básica	Variables						Solución
	Z	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	
Z	1	-2	-2	-3	0	0	0
H₁	0	-2	-4	-2	1	0	-10
X₃	0	-3	3	-9	0	-1	-12
Razón	-	$\frac{2}{3}$	-	$\frac{1}{3}$	-	0	

↑

7^{mo} Paso: Elaborar la nueva tabla del Simplex:

$$\text{Nueva fila pivote} = \frac{\text{Fila pivote}}{\text{Elemento pivote}} = \frac{F_3}{-9} \rightarrow F_3$$

Variable Básica	Variables						Solución
	Z	X_1	X_2	X_3	H_1	H_2	
Z	1	-2	-2	-3	0	0	0
H₁	0	-2	-4	-2	1	0	-10
X₃	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{3}$

$$3F_3 + F_1 \rightarrow F_1$$

$$2F_3 + F_1 \rightarrow F_1$$

$$F_3 \div (-9) \rightarrow F_3$$

**Nueva fila = -Coeficiente de la columna pivote x nueva fila pivote
+ fila anterior**

$3F_3 + F_1 \rightarrow F_1$	$2F_3 + F_2 \rightarrow F_2$
$3(0) + 1 = 0 + 1 = 1$	$2(0) + (0) = 0 + 0 = 0$
$3(\frac{1}{3}) + (-2) = 1 - 2 = -1$	$2(\frac{1}{3}) + (-2) = \frac{2}{3} - 2 = -\frac{4}{3}$
$3(-\frac{1}{3}) + (-2) = -1 - 2 = -3$	$2(-\frac{1}{3}) + (-4) = -\frac{2}{3} - 4 = -\frac{14}{3}$
$3(1) - 3 = 3 - 3 = 0$	$2(1) + (-2) = 2 - 2 = 0$
$3(0) + 0 = 0 + 0 = 0$	$2(0) + (1) = 0 + 1 = 1$
$3(\frac{1}{9}) + 0 = \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}$	$2(\frac{1}{9}) + 0 = \frac{2}{9} + 0 = \frac{2}{9}$
$3(\frac{4}{3}) + 0 = 4 + 0 = 4$	$2(\frac{4}{3}) + (-10) = \frac{8}{3} - 10 = -\frac{22}{3}$

Nueva Tabla del Simplex.

Variable Básica	Variables						Solución
	Z	X ₁	X ₂	X ₃	H ₁	H ₂	
Z	1	-1	-3	0	0	1/3	4
H₁	0	-4/3	-14/3	0	1	2/9	-22/3
X₃	0	1/3	-1/3	1	0	1/9	4/3

Repitiendo el proceso ya que aún hay solución de valor negativo:

4^{to} Paso: Determinar la variable que sale (fila pivote)

Es el número más negativo de las soluciones de las restricciones, en nuestro caso la fila **H₁**

5^{to} Paso: Determinar la variable que entra (obtenemos la columna pivote)

$$Razon_{Min} = X_e = \text{Min de } [X_1; X_2] = \frac{\text{Coeficiente de Z}}{\text{Coeficiente de fila pivote}}$$

$$Razon_{Min} = \left[\frac{-1}{-4} = 0,75; \frac{-3}{-14/3} = \frac{9}{14} = 0,64; \frac{1/3}{1/9} = 3 \right]$$

El valor mínimo es 0,64, por lo tanto la columna pivote es **X₂**

Variable Básica	Variables						Solución
	Z	X ₁	X ₂	X ₃	H ₁	H ₂	
Z	1	-1	-3	0	0	1/3	4
X₂	0	-4/3	-14/3	0	1	2/9	-22/3
X₃	0	1/3	-1/3	1	0	1/9	4/3
Razón	-	0,75	0,64	-	0	3	

7^{mo} Paso: Convertimos nuestro pivote en 1.

$$\text{Nueva fila pivote} = \frac{\text{Fila pivote}}{\text{Elemento pivote}}$$

Variable Básica	Variables						Solución
	Z	X ₁	X ₂	X ₃	H ₁	H ₂	
Z	1	-1	-3	0	0	1/3	4
X ₂	0	2/7	1	0	-3/14	-1/21	11/7
X ₃	0	1/3	-1/3	1	0	1/9	4/3

$$3F_2 + F_1 \rightarrow F_1$$

$$F_2 \div (-14/3) \rightarrow F_2$$

$$1/3 F_2 + F_3 \rightarrow F_3$$

$3F_2 + F_1 \rightarrow F_1$	$1/3 F_2 + F_3 \rightarrow F_3$
$3(0) + (1) = 0 + 1 = 1$	$1/3(0) + (0) = 0 + 0 = 0$
$3\left(\frac{2}{7}\right) + (-1) = \frac{6}{7} - 1 = -\frac{1}{7}$	$1/3\left(\frac{2}{7}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{21} + \frac{1}{3} = \frac{23}{21}$
$3(1) + (-3) = 3 - 3 = 0$	$1/3(1) + \left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$
$3(0) + (0) = 0 + 0 = 0$	$1/3(0) + (1) = 0 + 1 = 1$
$3\left(-\frac{3}{14}\right) + (0) = -\frac{9}{14} + 0 = -\frac{9}{14}$	$1/3\left(-\frac{3}{14}\right) + (0) = -\frac{1}{14} + 0 = -\frac{1}{14}$
$3\left(-\frac{1}{21}\right) + \left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{7} + \frac{1}{3} = \frac{4}{21}$	$1/3\left(-\frac{1}{21}\right) + \left(\frac{1}{9}\right) = -\frac{1}{63} + \frac{1}{9} = \frac{6}{63} = \frac{2}{21}$
$3\left(\frac{11}{7}\right) + (4) = \frac{33}{7} + 4 = \frac{61}{7}$	$1/3\left(\frac{11}{7}\right) + \left(\frac{4}{3}\right) = \frac{11}{21} + \frac{4}{3} = \frac{39}{21} = \frac{13}{7}$

La tabla nos queda de la forma siguiente

Variable Básica	Variables						Solución
	Z	X ₁	X ₂	X ₃	H ₁	H ₂	
Z	1	-1/7	0	0	0	4/21	61/7
X ₂	0	2/7	1	0	-3/14	-1/21	11/7
X ₃	0	23/21	0	1	0	2/21	13/7

Como se observa, ahora estamos como solución factible.

En definitiva:

$$X_2^* = 11/7; X_3^* = 13/7; Z^* = 61/7$$

Ejercicio 3

Resolver el siguiente modelo usando el método Dual-Simplex

$$Z_{[Minimizar]} = 2X_1 + 2X_2$$

Sujeto a:

$$3X_1 + X_2 \geq 3$$

$$4X_1 + 3X_2 \geq 6$$

$$X_1 + 2X_2 \leq 3$$

$$X_1; X_2 \geq 0$$

Expresando el modelo en formato estándar y ajustándolo para que las variables básicas sean las variables de holgura tenemos:

$$Z_{[Minimizar]} = 2X_1 + 2X_2 \quad \Rightarrow \quad Z - 2X_1 - 2X_2 = 0$$

Sujeto a:

$$-3X_1 - X_2 + 1H_1 = -3$$

$$-4X_1 - 3X_2 + 1H_2 = -6$$

$$X_1 + 2X_2 + 1H_3 = 3$$

Usando el método Dual Simplex obtenemos, sucesivamente tabla:

Básicas	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	Solución
Z	1	-2	-2	0	0	0	0
H ₁	0	-3	-1	1	0	0	-3
H ₂	0	-4	-3	0	1	0	-6
H ₃	0	1	2	0	0	1	3

4^{to} Paso: Determinar la variable que sale (fila pivote)

Es el número más negativo de las soluciones de las restricciones, en nuestro caso la fila **H₂**

5^{to} Paso: Determinar la variable que entra (obtenemos la columna pivote)

$$Razon_{Min} = \text{Min de } [; X_2] = \frac{\text{Coeficiente de } Z}{\text{Coeficiente de fila pivote}}$$

$$Razon_{Min} = \left[\frac{-2}{-4} = 0,5; \frac{-2}{-3} = 0,6 \right]$$

El valor mínimo es 0,5 por lo tanto la columna pivote es X_1 variable

que entra

		Columna pivote							
		Básicas	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Solución
Fila pivote	Z		1	-2	-2	0	0	0	0
	H_1		0	-3	-1	1	0	0	-3
	X_1		0	-4	-3	0	1	0	-6
	H_3		0	1	2	0	0	1	3

$F_3 \sim (-4) \rightarrow F_3$

Se obtiene:

Básicas	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Solución	
Z	1	-2	-2	0	0	0	0	$2F_3 + F_1 \rightarrow F_1$
H_1	0	-3	-1	1	0	0	-3	$3F_3 + F_2 \rightarrow F_2$
X_1	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	
H_3	0	1	2	0	0	1	3	$-F_3 + F_4 \rightarrow F_4$

Se obtiene al realizar las operaciones señaladas

Básicas	Z	X_1	X_2	H_1	H_2	H_3	Solución	
Z	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	3	$2F_3 + F_1 \rightarrow F_1$
H_1	0	0	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	$3F_3 + F_2 \rightarrow F_2$
X_1	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$	
H_3	0	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	$-F_3 + F_4 \rightarrow F_4$

La solución obtenida es factible pero no óptima, ya que en la fila Z hay valores negativos, Ahora aplicamos el método simplex.

El objetivo es minimizar **Z**, por lo que buscamos una solución factible que tenga el menor valor posible de **Z**. Para ello, aplicamos el siguiente algoritmo:

a.- Identificar la variable que entra en la base. Se trata de la variable no básica que tiene el coeficiente más negativo en la fila de **Z**. En este caso, existe 2 columna, escogemos **X₂** con un coeficiente de $-\frac{1}{2}$.

Columna pivote							
Básicas	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	Solución
Z	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	3
H ₁	0	0	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{2}$
X ₁	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$
H ₃	0	0	$\frac{5}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{2}$

Fila Pivote

b.- Identificar la variable que sale de la base. Se trata de la variable básica que tiene el menor cociente entre el término independiente y el coeficiente de la variable que entra en la base.

$$\text{Razon}_{\min} : \frac{b_i}{c_{cp}} \left\{ \frac{3}{\frac{3}{2}} = \frac{6}{5} = 1,2; \frac{3}{\frac{3}{4}} = 2; \frac{3}{\frac{3}{5}} = \frac{6}{5} = 1,2 \right\}.$$

Resultan dos valores iguales Tomamos **H₃** con un cociente de **1,2**.

Básicas	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	Solución
Z	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	3
H ₁	0	0	$\frac{5}{4}$	1	$-\frac{3}{4}$	0	$\frac{3}{2}$
X ₁	0	1	$\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{3}{2}$
X ₃	0	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$

$$\frac{1}{2}F_4 + F_1 \rightarrow F_1$$

$$-\frac{5}{4}F_4 + F_2 \rightarrow F_2$$

$$-\frac{3}{4}F_4 + F_3 \rightarrow F_3$$

$$F_4 \div \frac{5}{4} \rightarrow F_2$$

Se obtiene la siguiente tabla luego de aplicar lo indicado en cada fila

Básicas	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	Solución
Z	1	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{16}{5}$
H ₁	0	0	0	1	-1	0	1
X ₁	0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{7}{10}$
X ₃	0	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}F_4 + F_1 &\rightarrow F_1 \\ -\frac{5}{4}F_4 + F_2 &\rightarrow F_2 \\ -\frac{3}{4}F_4 + F_3 &\rightarrow F_3 \\ F_4 \div \frac{5}{4} &\rightarrow F_4 \end{aligned}$$

El resultado obtenido aun no es la solución buscada ya que existe un valor negativo en la fila Z.

a.- Identificar la variable que entra en la base. Se trata de la variable no básica que tiene el coeficiente más negativo en la fila de **Z**. En este caso, existe 2 columna, escogemos **H₂** con un coeficiente de $-\frac{2}{5}$.

Básicas	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	Solución
Z	1	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{16}{5}$
H ₁	0	0	0	1	-1	0	1
X ₁	0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{7}{10}$
H ₃	0	0	1	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$

Fila Pivote

b.- Identificar la variable que sale de la base. Se trata de la variable básica que tiene el menor cociente entre el término independiente y el coeficiente de la variable que entra en la base.

$$\text{Razon}_{\min} : \frac{b_i}{c_{cp}} \left\{ \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{5}} = 2 \right\}.$$

En este caso un valor ya que los otros valores son negativos, es **H₃**.

Básicas	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	Solución
Z	1	0	0	0	$-\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{16}{5}$
H ₁	0	0	0	1	-1	0	1
X ₁	0	1	0	0	$-\frac{2}{5}$	$-\frac{4}{5}$	$\frac{7}{10}$
H ₂	0	0	5	0	1	4	2

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}F_4 + F_1 &\rightarrow F_1 \\ F_4 + F_2 &\rightarrow F_2 \\ \frac{2}{5}F_4 + F_3 &\rightarrow F_3 \\ F_4 \div \frac{1}{5} &\rightarrow F_4 \end{aligned}$$

Se Obtiene

Básicas	Z	X ₁	X ₂	H ₁	H ₂	H ₃	Solución
Z	1	0	2	0	0	2	4
H ₁	0	0	5	1	0	4	3
X ₁	0	1	2	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{2}$
H ₂	0	0	5	0	1	4	2

La solución óptima es $X_1 = 3$, $X_2 = 6/5$; $Z = 4$

La aplicación del método simple dual es al análisis de sensibilidad. Se usa cuando después de haber obtenido la solución óptima, se desea agregar una nueva restricción al modelo si la nueva restricción no se cumple.

En este caso se obtiene que para los valores óptimos de las variables de decisión, la solución permanece óptima pero se convierte en infactible. Surge entonces la necesidad de aplicar el algoritmo Dual – Simplex para extraer la variable básica que tiene valor infactible. Cuando estudiemos el tema de análisis de sensibilidad analizaremos un caso como el citado

Auto evaluación.

Empleando el método Dual – simplex, realizar brevemente los siguientes ejercicios, señale los pasos realizados

1.- Dado

$$Z_{[\text{Max}]} = 3x + 2y$$

Sujeto a:

$$x + y \leq 20$$

$$x + 2y \leq 25$$

$$x \leq 12$$

$$x, y \geq 0$$

2.- Considerar el modelo lineal en forma estándar

$$Z_{\text{max}} = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4$$

sujeto a

$$2x_1 + x_2 + x_3 + 8x_4 = 6$$

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 4$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

3.- La empresa Zaid SRL se dedica a la fabricación de manteles de mesa. Fabrica dos modelos, el redondo (x_1) y el rectangular (x_2). Cada uno consume 2 y 3 m^2 de tela, respectivamente. Además deben ser cortados y cosidos a mano, tarea que lleva una hora para los manteles rectangulares y dos para los redondos. Por último, a los manteles rectangulares se les deben colocar cuatro esquineros de refuerzo. Semanalmente se pueden conseguir 600 m^2 de tela, 600 esquineros y 500 horas de corte y costura. Los márgenes de ganancia son de 8 \$ para los manteles redondos y 10 \$ para los rectangulares. El objeto de este problema es determinar el número de manteles de cada tipo que han de producirse diariamente para maximizar el beneficio obtenido.

4.- Una panadería para realizar tres tortas especiales (Imperial, Lima y Soberano). La torta Imperial requiere para su elaboración 2 Kgr de

azúcar, 16 huevos y 1,5 Kgr de margarina con un precio de venta de 30 \$. La torta de Lima necesita 1 Kgr de azúcar, 12 huevos y 1 Kgr de margarina con un precio de venta de 20 \$. La torta de Soberano necesita 1,5 Kgr de azúcar, 10 huevos y 1 Kgr de margarina con un precio de venta de 15 \$. En el almacén les quedan 40 Kgr de azúcar, 300 huevos y 25 Kgr de margarina. (a) que combinaciones de especialidades pueden realizarse. (b) Cuantas unidades de cada especialidad an de producirse para obtener el mayor ingreso por venta

5.- Dada la función objeto:

$$Z_{[\text{Max}]} = -5x_1 + 6x_2 + 7x_3$$

Sujeto a:

$$2x_1 + 10x_2 - 6x_3 \geq 30$$

$$5x_1 - 6x_2 + 10x_3 \leq 20$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq \frac{5}{2}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

6.- Dada la función objeto:

$$Z_{[\text{Max}]} = -4x_1 - 12x_2 - 18x_3$$

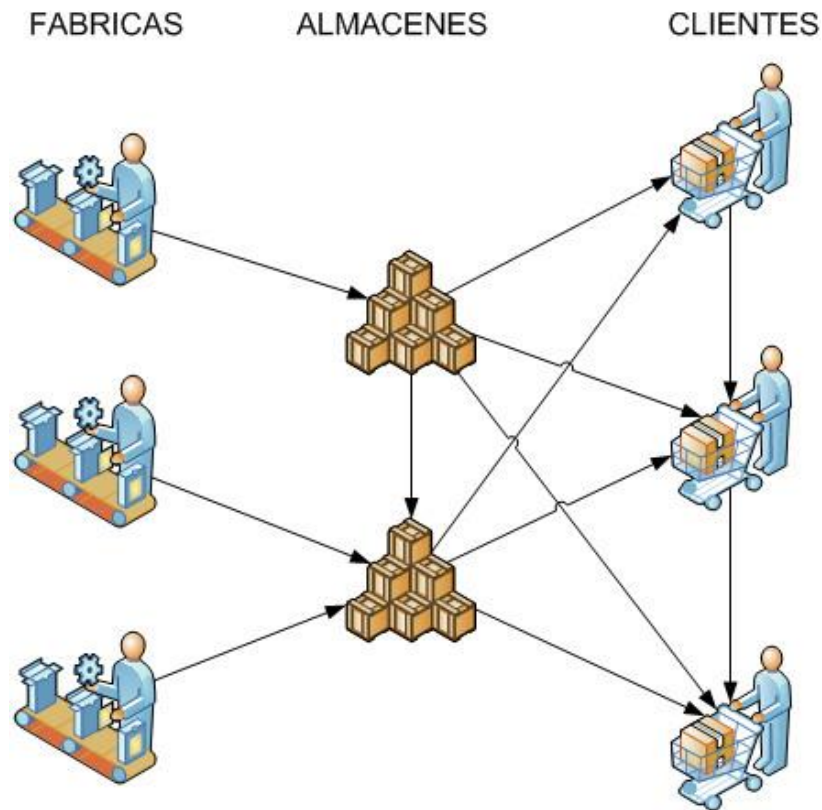
Sujeto a:

$$x_1 + 3x_3 \geq 3$$

$$2x_2 + 2x_3 \geq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

La programación dinámica.



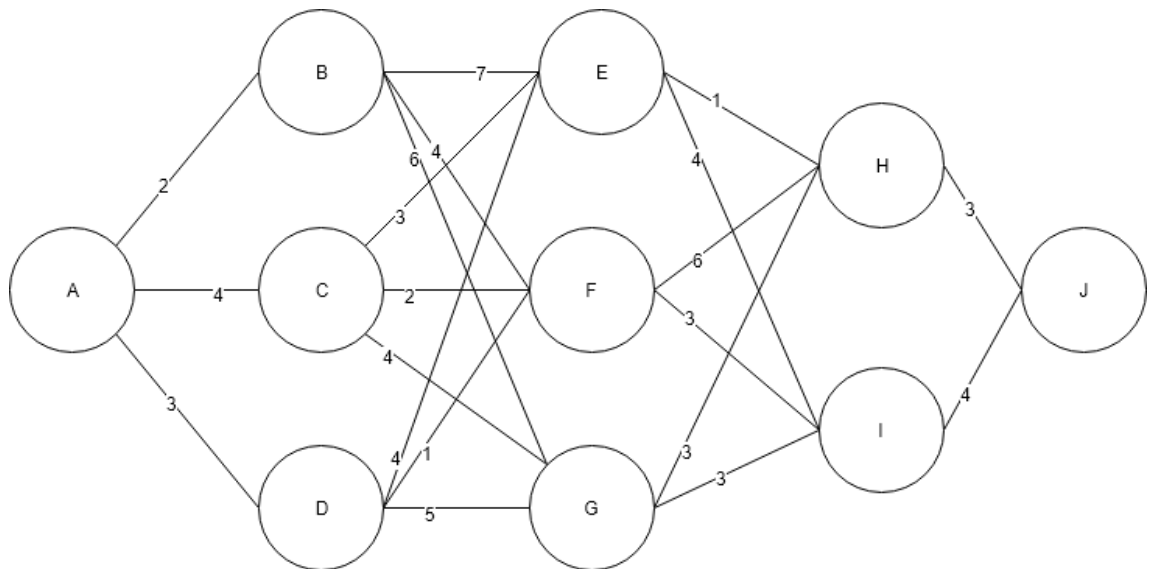
La programación dinámica es una técnica utilizada en la toma de decisiones de problemas complejos, el modelo nos guía por procedimientos sistemáticos con el fin de obtener la combinación óptima para lograr un propósito planificado; este método no posee una formulación estándar ya que las ecuaciones que se plasman son consecuencias de un problema específico.

Esta técnica es utilizada para la minimizar el tiempo de ejecución de un algoritmo usando el principio de optimización.

Las características nacen cuando el profesor Harvey M. Wagner estudio el problema de la diligencia.

“Un estafador de Missouri que decide ir al oeste por la fiebre del oro que nació en California a mediados del siglo XIX. Debe realizar el viaje en

diligencia cruzando territorios peligroso e inhóspito, donde no existe ley, además de otros problemas de ladrones, tribus indígenas, entre otros; en todo el recorrido hay alta probabilidad de ser atacado por esos bandoleros. Se conoce el punto de partida y su destino, pero existe varias rutas posibles a lo largo del camino a seguir, pero debe tomar en cuenta que el viaje es siempre de izquierda a derecha.



Para lograr el viaje se requieren de 4 etapas para ir desde el estado A a su destino en el estado J, este viajero es un hombre prudente, preocupado por su seguridad. Después de pensarlo mucho ideó una forma bastante ingeniosa para determinar la ruta más segura. Se ofrecen pólizas de seguros de vida a los pasajeros. Como el costo de la póliza de cualquier jornada en la diligencia está basado en una evaluación cuidadosa de la seguridad del recorrido, la ruta más segura debe ser aquella cuya póliza represente el menor costo total.

El costo de la póliza estándar del viaje en diligencia, del estado i al estado j se denota como: C_{ij}

Veamos las tablas asociadas a cada uno de estos costos tenemos:

	J
H	3
I	4

Formulación

Dividamos el problema por etapas, que serán evaluadas en la solución más óptima y se agregarán en el análisis de la siguiente etapa hasta encontrar la solución más óptima general,:

Señalemos X_n = El destino inmediato de la etapa n (el n-ésimo viaje que se hará en diligencia), tal que la ruta seleccionada final para este problema será:

$$A \rightarrow X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4, \text{Donde } X_4 = J$$

Sea $f_n(s, x_n)$ el costo total de la mejor política global para enfrentar las etapas restantes, mientras el viajero se encuentra en el estado "S", listo para iniciar la etapa n y elige x_n como destino inmediato. Dados s y n, sea y_n el valor de x_n – no necesariamente único – que minimiza $f_n(s, x_n)$ y $g_n(s)$ el valor mínimo correspondiente de $f_n(s, x_n)$. Entonces:

$$g_n(s) = \min f(s, x_n) = f(s, y_n)$$

Dónde: $f_n(s, x_n)$ = **Costo inmediato (etapa n) +**

costo futuro mínimo (etapas n + 1 en adelante)

Representado de la siguiente forma:

$$C_{sX_n} + g_{n+1}(X_n)$$

Entonces nuestro objetivo es encontrar $g_1(A)$ y su ruta correspondiente, pero para encontrarlo debemos de resolver de forma sucesiva $g_4(s)$, $g_3(s)$, $g_2(s)$ para cada uno de los estados posibles de s y usar $g_2(s)$ para encontrar $g_1(A)$. Entonces es una suerte de ir del fin hacia el inicio obteniendo el costo mínimo (para este caso) en cada una de las etapas.

Procedimiento

Recordemos que hemos de ir de adelante hacia atrás, entonces partimos de la última etapa, en nuestro ejemplo esta es la etapa 4, la cual es la última etapa por recorrer, cuando esto sucede su ruta está perfectamente definida, sea por **H** o por **I** la ruta se dirige hacia **J**:

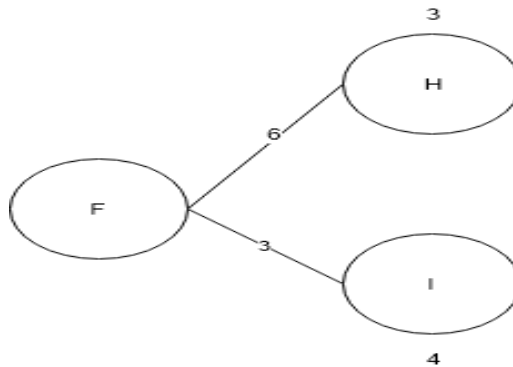
	J
H	3
I	4

Podemos entonces hacer lo siguiente:

$S \setminus X_4$	$C_{SX_n+g_{n+1}}(X_n)$	g_4	X_4
	J		
H	3	3	J
J	4	4	J

para el caso de la etapa 4 no existe un $g(S)$ ya que es la última, podemos considerar entonces que este es cero, así que está solo calculado directamente con el costo que representa ir por cada una de las rutas **H** o **I** hacia **J**.

En la etapa 3 la gráfica nos representa que ahora se deben recorrer 2 etapas, aquí debemos considerar partiendo desde **F** podemos ir a **H** o **I**:



Sabemos por la resolución anterior que el $g_4(H) = 3$ y $g_4(I) = 4$, luego si vamos de $F \rightarrow H$ El costo total $6 + 3 = 9$, como la ruta que estamos realizando es $F \rightarrow H \rightarrow J$; si tomamos la ruta $F \rightarrow I$, el costo total es de $3 + 4 = 7$ que es un costo menor, podemos indicar que $g_3(F) = 7$, lo mismo ocurre con E y G, por lo tanto podemos construir la tabla:

$S \setminus X_3$	$C_{SX_n+g_{n+1}}(X_n)$		g_3	X_3
	H	J		
E	$1 + 3 = 3$	$4 + 4 = 8$	4	H
F	$6 + 3 = 9$	$3 + 4 = 7$	7	I
G	$3 + 3 = 6$	$3 + 4 = 7$	6	H

En cada una de las celdas se representa la operación descrita para F. Al resolver la segunda etapa, realizamos los mismos cálculos donde obtenemos la siguiente tabla:

$S \setminus X_2$	$C_{SX_n+g_{n+1}}(X_n)$			g_2	X_2
	E	F	G		
B	$7 + 4 = 11$	$4 + 7 = 11$	$6 + 6 = 12$	11	E o F
C	$3 + 4 = 7$	$2 + 7 = 9$	$4 + 6 = 10$	7	E
D	$4 + 4 = 8$	$1 + 7 = 8$	$5 + 6 = 11$	8	E o F

Observamos que el destino inmediato de B y D pueden ser E o F ya que minimizan el valor de "g", finalmente revisemos la primera etapa:

$S \setminus X_1$	$C_{SX_n+g_{n+1}}(X_n)$			g_1	X_1
	B	C	D		
A	$2 + 11 = 13$	$4 + 7 = 11$	$3 + 8 = 11$	11	C o D

Con esta última etapa ya podemos obtener la ruta o rutas óptimas en nuestro problema, el cual es:

$$A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J \text{ o } A \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow H \rightarrow J \text{ o } A \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow I \rightarrow J$$

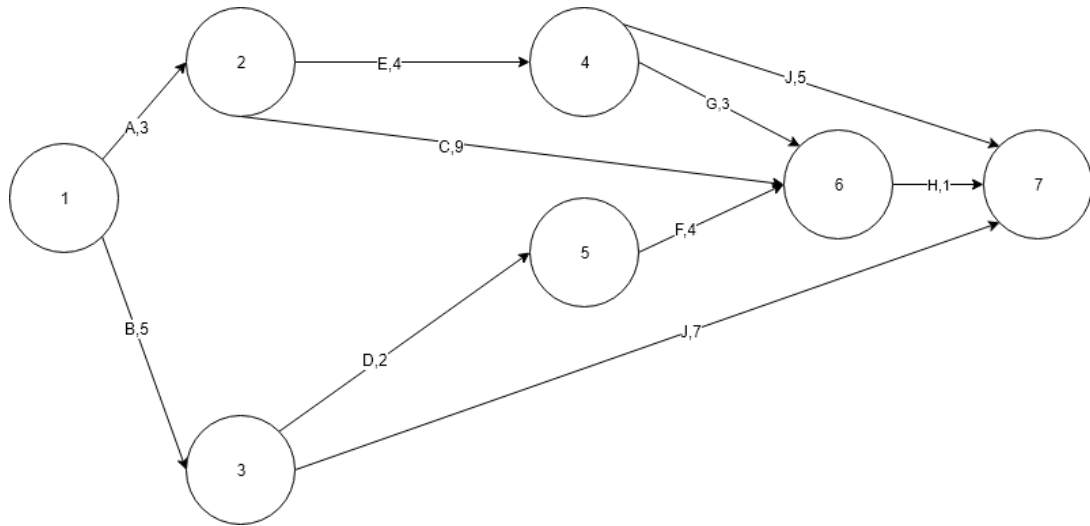
Tenemos estas 3 rutas disponibles donde todas tienen el costo mínimo de 11.

Características

- ❖ El problema se analiza en **etapas**, con particular **decisión**.
- ❖ En Cada etapa hay diversas condiciones a cumplir.
- ❖ La decisión que se adopte en cada etapa tiene consecuencias en toda la ruta, podemos indicar que **“estado es una columna de nodos, cada nodo representa un estado y cada rama una política de decisión”**.
- ❖ La secuencia para resolver un problema mediante la programación dinámica está planificado para hallar un valor óptimo para cada etapa, la cual finalmente optimiza todo el proceso.
- ❖ **La decisión tomada en una etapa óptima solo depende del estado actual y no de cómo se llegó ahí**, esto es la base de optimalidad de la programación dinámica.
- ❖ Existe una relación recursiva en cada etapa n que la identifica, que afecta la siguiente etapa $n+1$. esta recursividad es diferente en cada problema, pero puede usarse dicha notaciones, ya que buscamos hallar un máximo o un mínimo.
- ❖ Al usar la relación recursiva, el procedimiento de solución comienza al final se mueve hacia atrás etapa por etapa hasta encontrar la política óptima en cada etapa hasta la etapa inicial.

Ejercicio 1

Hallar la ruta crítica con programación dinámica:



Solución

Debemos dividir por etapas nuestra red, se sabe que una etapa es un conjunto nodos o estados y los arcos con su valor con las contribuciones directas; podemos notar que existe la particularidad que el estado 3 está conectado tanto al estado final como a un estado intermedio, este estado 3 en consecuencia estará presente en al menos 2 etapas, si hiciéramos un corte podríamos observar que nuestro problema puede segmentarse en 4 etapas, entonces:

La etapa 4 es la última etapa por recorrer, y el único estado siguiente es 7 y no existe un g_5 por lo cual el esfuerzo o tiempo será solo la contribución directa del arco:

$S \setminus X_4$	$C_{SX_n} + g_{n+1}(X_n)$	g_4	X_4
	7		
6	1	1	7
4	5	5	7
3	7	7	7

La etapa 3, ahora son dos etapas que debemos de considerar, en este caso en particular, recuerda tomar en cuenta todos los estados previos que

te permiten llegar a los estados futuros, para ello observemos el estado 4 que si bien se encuentra en un estado final para la etapa también es parte del estado actual ya que conecta con otros estados finales, se puede observar que por ejemplo en el estado 2 que va hacia el estado 6 y 4 la contribución inmediata de ir de 2 a 6 más el $g_4(6)$ máximo que hasta el momento es 1, igualmente ocurre de 2 a 4, de entre ellos dos elegimos el máximo, ¿Por qué el máximo?, pues porque estamos buscando la ruta crítica, la ruta crítica está representada por la ruta más larga que me permita ir de 1 a 7.

$S \setminus X_3$	$C_{SX_n+g_{n+1}}(X_n)$			g_3	X_3
	6	4	3		
1	--	--	$5 + 7 = 12$	12	3
2	$9 + 1 = 10$	$4 + 5 = 9$	--	10	6
4	$3 + 1 = 4$	--	--	4	6
5	$4 + 1 = 5$	--	--	5	6

La etapa 2, correspondería ubicar en los estados finales a 1, 2, 4 y 5, pero no tiene sentido colocar a 1 ya que no existe un estado previo para él, entonces solo colocaremos a 2, 4 y 5, hacemos la misma lógica que ya está sustentada en la relación recursiva que aplica para este caso:

$S \setminus X_2$	$C_{SX_n+g_{n+1}}(X_n)$			g_2	X_2
	2	4	5		
1	$3 + 10 = 13$	--	--	13	2
3	--	--	$2 + 5 = 7$	7	5
2	--	$4 + 4 = 8$	--	8	4

La etapa 1 y última etapa se consideran las 3 etapas anteriores, luego tenemos:

$S \setminus X_1$	$C_{SX_n} + g_{n+1}(X_n)$		g_1	X_1
	3	2		
1	$5 + 7 = 12$	$3 + 8 = 12$	12	3

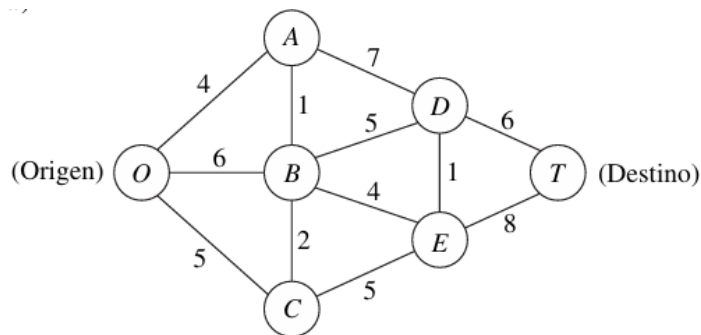
Hecho todo ello, ¿Cómo hallamos la ruta crítica?, debemos de seleccionar todos los valores máximos, si existe un estado (nodo) que se encuentre en más de una etapa debemos de seleccionar en cuál de ellos es el mayor por ejemplo, revisemos la ruta de 1 a 2 y 1 a 3 aparentemente sea de 1 a 3 la ruta más larga; sin embargo, la ruta de 1 a 2 en la etapa 2 es mayor que la ruta de 1 a 3, es por ello que tomamos dicha ruta, luego, en la etapa 2 se obtuvo ese valor del estado 2 ya que provenía del estado 6 y de 6 a 7, entonces nuestra ruta crítica será:

1 → 2 → 6 → 7 La longitud es 13

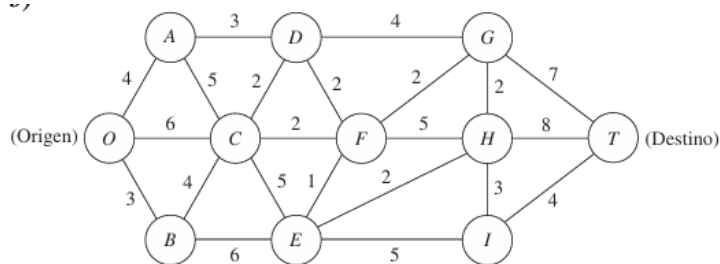
Auto evaluación.

Hallar la ruta crítica con programación dinámica:

1.-

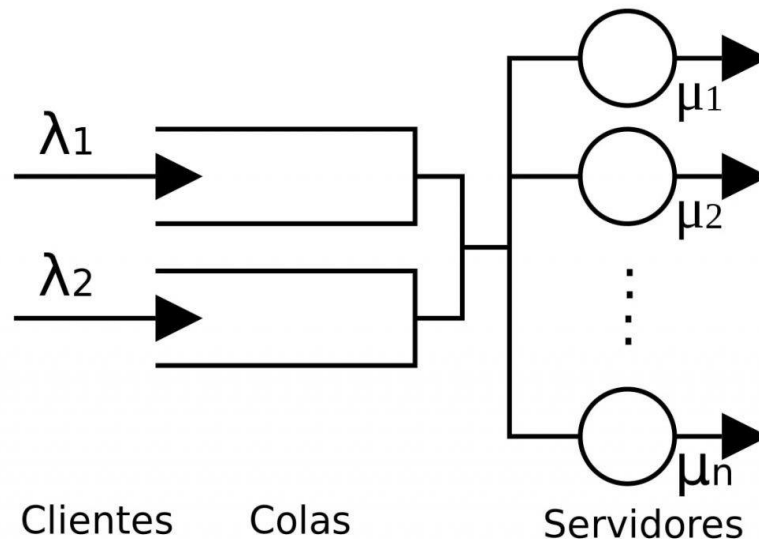


2.-



UNIDAD 3

LA TEORÍA DE COLA.



La **teoría de colas** es el estudio matemático de las colas, filas o líneas de espera dentro de un sistema. Estudia términos como el tiempo de espera, tipos atención en las colas, forma de atención por las capacidades presentes en el sistema para no colapsar.

Desde el punto de vista matemático, la teoría de colas esta incluida en la investigación de operaciones y es parte complementaria en la teoría de sistemas y la teoría de control. Es una teoría aplicada a una variedades de situaciones, entre los que podemos nombrar a manera de ejemplo Fabrica, Empresas (grandes y pequeña), Negocios, Comercio, Telecomunicación, Ingeniería Transporte entre otras.

Esta teoría permite modelar los procesos vinculada a la población (usuarios o clientes) que necesita algunos servicios que es dado por uno o más servidores (recursos). Debemos tener en cuenta que puede haber más

agentes que recursos, puede presentarse alguna espera al llegar un agente al sistema hasta que el servidor pueda atender su demanda, también puede ser negado el acceso del cliente por el sistema por diversas razones como saturación (muchos) de cliente y no tener lugar para esperar. También modela procesos como la llegada de datos a una cola en un sistema computacional, un red de telecomunicación, una línea de producción en una fábrica entre otra

Desarrollo en el tiempo

El matemático danés Agner Krarup Erlang, trabajador de la Copenhagen Telephone Exchange, publicó el primer artículo sobre la teoría de colas en 1909. Estudiaba el problema de dimensionamiento de líneas y centrales de conmutación telefónica. En su honor, la unidad de medida estadística del volumen de tráfico se llama “Erlang”,

En 1959 Leonard Kleinrock, científico estadounidense y pionero en el análisis de redes de ordenadores desarrolló el uso de herramientas de teoría de colas para realizar análisis de redes de conmutación de paquetes.

Estudio de la formación de colas

Cuando una cantidad de cliente necesitan un servicio. Entran al sistema y por tanto a la cola de espera. La selección un cliente de la cola para prestar el servicio solicitado, aplicando algún tipo de regla (disciplina de cola). finalizado el servicio, el cliente sale del sistema de colas.

La cola de espera se forma y aumenta cuando la demanda del servicio es mayor que la capacidad del sistema para atenderlo. Por ejemplo, se sabe que un usuario requiere un minuto para ser atendido, pero se presentan dos usuarios en menos de ese tiempo, este segundo usuario

deberá esperar en cola para ser atendido. Estas diferencias temporales entre demanda y capacidad se presenta porque el proceso de llegadas de usuarios y atención son procesos estocásticos.

Las formaciones de colas se asigna como cliente, se puede presentar cuando existen máquinas dañadas a la espera de ser rehabilitadas. Los clientes puede que esperen, aunque las instalaciones de servicio sean adecuadas, ya que los clientes que llegan primero están siendo atendidos. Además, puede suceder que los usuarios deban esperar en cola porque los medios existentes sean inadecuados para satisfacer la demanda del servicio. Por ejemplo, Los clientes esperan un minuto para ser atendido, pero los clientes llegan con una frecuencia mayor, la cola crecerá indefinidamente.

Objetivos

La teoría de colas busca señalar la forma de como un sistema compuesto por uno o más recursos atienden a una población de clientes. Cuando un cliente llega al sistema y todos los recursos están ocupados, esperará en una cola, salvo que dicha cola esté llena y entonces será rechazado. Se analiza variables tales como el tiempo medio de espera en cola, el tiempo total en el sistema o la probabilidad de ser rechazado.

Existen otras aplicaciones de la teoría de colas son:

- ❖ Determinar el número de recursos necesarios para mantener la probabilidad de rechazo por debajo de un límite.
- ❖ Conocer el nivel óptimo de capacidad del sistema para minimizar un determinado coste.
- ❖ Evaluar las consecuencias de modificar el sistema la prestación o rendimiento.

Elementos Presente en la teoría de colas.

Se pueden identificar los siguientes elementos:

- ❖ **Entrada:** La característica de la entrada es el tamaño o número total de clientes que requieren servicio en un determinado momento. Se supone que el tamaño es infinito o finito.
- ❖ **Cliente:** Usuario de la población potencial que solicita.
- ❖ **Cola:** Espacio donde los usuarios esperan hasta ser atendido por los servidores. Se caracteriza por una *capacidad o tamaño máximo* de la cola, que se puede suponer finita o infinita. Si es finita, es posible que se llene de clientes por lo que nuevos clientes son rechazados.
- ❖ **Disciplina de la cola:** Forma empleada para seleccionar el siguiente miembro que recibirá servicio, una vez que queda un recurso disponible. Por ejemplo, puede ser
 - a) **FIFO** (*first in first out*) primero en entrar, primero en salir, los usuarios se atiende por orden de llegada.
 - b) **LIFO** (*last in first out*) consiste en atender primero al cliente que ha llegado el último.
 - c) **RSS** (*random selection of service*) se selecciona los usuarios de forma aleatoria, según algún procedimiento de prioridad.
 - d) **Processor Sharing:** sirve a los usuarios de forma igualitaria. La capacidad de la red se comparte entre los usuarios y todos experimentan con eficacia el mismo retraso.
- ❖ **Recursos o servidores:** elementos que brindan el servicio a los usuarios. Se relaciona con el tiempo necesario para atender un cliente.

- ❖ **Redes de colas:** Sistema donde existen varias colas y los trabajos fluyen de una a otra. Por ejemplo: las redes de comunicaciones o los sistemas operativos multitarea.

Notación de Kendall

David G. Kendall introdujo una notación de colas **A/S/c** en 1953, en la que **A** señala la distribución del tiempo entre llegada, **S** la distribución del tiempo de servicio y **c** el número de recursos disponibles. Ha sido desde entonces ampliada a **A/S/c/K/N/D** donde **K** es la capacidad total de la cola (es decir, el número máximo de clientes en el sistema en cualquier momento), **N** el número de usuarios que generan peticiones, y **D** es la disciplina de cola.

Para describir la distribución de los tiempos entre llegadas **A** o de servicio **S** se suele emplear alguno de estos valores:

- **M** para "Markoviano" o "sin memoria", lo que indica que los tiempos entre llegadas siguen una distribución exponencial (por lo tanto, el número de llegadas en un intervalo de tiempo sigue una **distribución de Poissón**).
- **D** tiempos entre llegadas deterministas, ósea, el proceso no es aleatorio. .
- **G** una "distribución general" de los tiempos entre llegadas.

Para la disciplina de cola **D** se suele emplear alguno de estos valores:

- ✓ *First Come First Served (FCFS)* o *First In First Out (FIFO)*
- ✓ *Last Come First Served (LCFS)* o *Last In First Out (LIFO)*
- ✓ *Service In Random Order (SIRO)*
- ✓ *Processor Sharing*

La capacidad del sistema **K** puede tomar un valor finito determinado o infinito. Si es finito, el número máximo de usuario permitidos en el sistema

está acotado, por lo que nuevas llegadas son rechazadas. Si es infinito, no se produce rechazo.

Si el tamaño de la población **N** es finito, esto supone que cuantos más usuarios se encuentren en el sistema, menos usuarios estarán generando peticiones. Si por el contrario el tamaño **N** es infinito, la tasa de generación de peticiones se mantendrá constante independientemente del número de usuarios en el sistema.

Los tres primeros parámetros de la notación de Kendall siempre se indican de forma explícita, mientras que si los otros tres no aparecen es porque se suponen unos valores por defecto. Dichos valores son:

- ❖ Para la capacidad **K**, se supone infinita.
- ❖ Para la disciplina de cola **D**, se supone *FCFS*.
- ❖ Para la población **D**, se supone infinita.

Ejemplos

- ❖ **M/M/1/ (∞ /FIFO/ ∞)**: Se trata de una de las colas más sencillas. Las llegadas siguen un proceso de **Poisson**, las peticiones tienen un tiempo de servicio que sigue una variable aleatoria exponencial y únicamente hay un servidor. No se suelen especificar los parámetros **K**, **N** y **D**, lo que supone los siguientes valores por defecto: la capacidad del sistema es infinita, la prioridad es *FCFS*, y la población que genera las peticiones es infinita (lo que implica que la tasa de llegadas es constante).
- ❖ **M/M/n/n**: No hay cola de espera, sino **n** recursos (servidores) y hasta **n** usuarios como máximo; si llega el usuario **n + 1**, es rechazado. Este modelo suele aplicarse para analizar las prestaciones en telefonía convencional. La probabilidad de que un

usuario sea rechazado se calcula con la formula **Erlang-B**. También suele identificarse como **M/M/c/c** o **M/M/k/k**.

- ❖ **M/M/c**: La capacidad del sistema es ilimitada, aunque haya sólo n recursos; en caso de llegar el usuario $n + 1$, éste no será rechazado sino que pasará a una cola de espera. Este modelo puede aplicarse para analizar un **call center** en el que un número fijo de operadores resuelven peticiones, que pueden quedar en espera hasta ser atendidas. La probabilidad de que un usuario no sea atendido directamente sino que tenga que esperar se calcula con la formula **Erlang-C**.

La notación de Kendall no sirve para representar redes de colas:

- ❖ **Colas en paralelo**: tercer sistema, el proceso de llegada se divide en varias colas, típicamente independientes. Se podría corresponder con una estación de servicio donde cada servidor tiene una cola independiente y los usuarios no se mueven entre colas.
- ❖ **Colas en serie** (o sistema en tándem): cuarto sistema. El proceso de salida del primer sistema supone el proceso de entrada para el segundo sistema. Se podría corresponder con tareas en un ordenador que deben ejecutarse en diferentes procesadores.

Medidas de rendimiento

Las medidas de rendimiento (desempeño) de interés dependen del escenario de aplicación. Por ejemplo, en el caso de un servidor de peticiones web, suele ser interesante el tiempo total que tarda una petición en ser atendida, mientras que para diseñar un centro de atención al cliente (call center), una medida fundamental sería el tiempo que espera un cliente

hasta que es atendido, dado que su tiempo de atención es menos importante. Aun así, existe un conjunto de medidas de rendimiento que suelen ser comunes a todos los sistemas:

- **T**: tiempo medio de estancia en el sistema, definido como el tiempo que transcurre desde que una petición llega al sistema (es generada por la población) hasta que ha sido finalmente atendida por un recurso (abandona el sistema).
- **W**: tiempo medio de estancia en la cola, definido como es el tiempo desde que una petición llega al sistema hasta que empieza a ser atendida por uno de los recursos.

Ambos tiempos se relacionan a través del tiempo medio de servicio **S** mediante la expresión $T = W + S$

- **N**: número medio de usuarios en el sistema, media temporal del número de usuarios (o peticiones) que se encuentran en el sistema, ya sea en la cola o siendo atendidos por algún recurso.
- **Q**: número medio de usuarios en la cola, definido como la media del número de usuarios esperando a ser atendido.
- **ρ**: factor de utilización u ocupación de los recursos, definido como la proporción de tiempo que un usuario está atendiendo a usuarios (es decir, no está desocupado).

Dado un sistema con **c** recursos, estas variables están relacionadas mediante la expresión $N = Q + c \rho$

Teorema de Little

Se trata de un resultado fundamental que establece una relación muy sencilla entre dos medidas de rendimiento: el número medio de usuarios **N** y el tiempo medio de estancia en el sistema **T**. Dada una tasa efectiva de

entrada al sistema (esto es, teniendo en cuenta únicamente los usuarios que son atendidos, y no los que son rechazados),

Algunos modelos clásicos

Sistema M/M/1

En este modelo, según la notación de Kendall, la tasa de llegadas y la tasa de servicio siguen una distribución de **Poisson**, sólo hay un servidor y la capacidad del sistema es ilimitada. Si la tasa de llegadas fuese mayor que la tasa de servicio, dado que el sistema tiene una capacidad infinita, el número de usuarios crecería indefinidamente y no podría calcularse medidas de rendimiento.

Sistema M/M/c

En este modelo, al igual que en caso anterior, la tasa de llegadas y la tasa de servicio siguen una distribución de Poisson. Sin embargo, ahora existen c (un número entero positivo) servidores idénticos en paralelo, y cualquiera de ellos puede atender las peticiones en cuando estén disponibles,

Las limitaciones del acercamiento matemático

La teoría de formación de una cola es a menudo demasiado restrictiva matemáticamente para ser capaz de modelar todas las situaciones verdaderas a nivel mundial. Por ejemplo; los modelos matemáticos a menudo asumen el número de clientes, o la capacidad de la cola infinitos, cuando es evidente que deben estar limitados. Los medios alternativos del

análisis de la teoría de colas consisten generalmente en simulaciones de ordenador o en el análisis de datos experimentales.

Ejemplo 1

Un promedio de 10 automóviles por hora llegan a un cajero con un solo servidor que proporciona servicio sin que uno descienda del automóvil. Suponga que el tiempo de servicio promedio por cada cliente es 4 minutos, y que tanto los tiempos entre llegada y los tiempos de servicio son exponenciales. Conteste las preguntas siguientes:

1.- ¿Cuál es la probabilidad de que el cajero este ocioso?

2.- ¿Cuál es el número promedio de automóviles que están en la cola del cajero? (Se considera que un automóvil que está siendo atendido no está en la cola esperando)

3.- ¿Cuál es la cantidad promedio de tiempo que un cliente pasa en el estacionamiento del banco (incluyendo el tiempo en servicio)?

4.- ¿Cuántos clientes atenderá en promedio el cajero por hora?

Solución.

De acuerdo con las premisas, estamos trabajando con un sistema de cola de **M/M/1/GD/∞/∞** para el cual

$\lambda = 10 \text{ automovil/hora}$ y $\mu = 15 \text{ automovil/hora}$. Por lo tanto.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10 \text{ automovil/hora}}{15 \text{ automovil/hora}} = \frac{2}{3} = 0,666$$

1.- por la ecuación:

$$\pi_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} = 0,333$$

Por lo tanto, el cajero estará ocioso un promedio de un tercio ($\frac{1}{3}$) del tiempo.

2.- número promedio L_q se determina con la ecuación

$$L_q = \frac{\rho^2}{1 - \rho} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{4}{3} = 1,33 \text{ clientes}$$

3.- la cantidad promedio de tiempo que un cliente pasa en el estacionamiento W , la estimamos usando la ecuación.

$$w = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{\frac{\rho^2}{1 - \rho}}{\rho} = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\frac{2}{3}}{1 - \frac{2}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = 2 \text{ clientes}$$

Por lo tanto, $w = \frac{2}{10} = \frac{1}{5} h = \frac{60}{5} \text{ min} = 12 \text{ min}$ (W tiene las mismas unidades de λ)

4.- Si el cajero siempre estuviera ocupado, atendiendo un promedio de $\mu = 15$ clientes por hora. Según la pregunta (1), sabemos que el cajero está ocupada solo dos tercios del tiempo. Por lo tanto, durante cada hora, el cajero atenderá un promedio de $\left(\frac{2}{3}\right)(15) = 10$ clientes. Este debe ser el caso ya que en el estado estable, 10 clientes llegan cada hora, de modo que 10 clientes deben dejar cada hora el sistema.

Ejemplo 2

Una bomba de gasolina tiene un solo surtidor diesel. Las llegadas de autobuses que cargan este producto (diesel) muestra una distribución que se aproxima a la de Poisson, mientras que el proceso de carga del combustible muestra una distribución exponencial. El promedio de llegadas a la bomba diesel es de 6 autobuses por hora, mientras que el promedio de servicio del surtidor es de 8 servicios completos por hora. La bomba sirve a los autobuses en el orden en que llegan a la estación de servicio y no se puede dar servicio a más de un autobús simultáneamente. Encuentre todos los parámetros que describen cuantitativamente a esta bomba diesel, para

que posteriormente se pueda tomar una decisión, acerca de la instalación de otra bombas diesel en ese lugar.

Cada autobus hace 6 recorridos diariamente de ida y vuelta entre dos ciudades que están unidas por la carretera donde está la bomba de gasolina. El recorrido es tal que obliga a los autobuses a rellenar sus depósitos de gasoil después de cada tres viajes completos. El costo de operación mensual de un autobus (sueldos del conductor, gasoil, aceite, mantenimiento, seguros, depreciación, entre otros) es de 60.000 u. m. y se trabaja 24 días al mes, 16 horas por día. ¿Cuál es el costo diario de la espera?

Solución:

$\lambda = 6 \text{ autobuses/hora}$ y $\mu = 8 \text{ autobuses/hora}$. Por lo tanto.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6 \text{ autobuses/hora}}{8 \text{ autobuses/hora}} = \frac{3}{4} = 0,75$$

1.- por la ecuación:

$$P_0 = 1 - \rho = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} = 0,25$$

El factor de utilización es $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$ (con $s = 1$, pues solo se dispone de un surtidor). Además, como $\rho = \frac{\lambda}{s\mu} = \frac{3}{4} < 1$ se pueden utilizar las fórmulas anteriormente deducidas para caracterizar la cola.

➤ Probabilidad de encontrar el surtidor vacío, P_0

$$P_0 = (1 - p) = \left(1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} = 0,25 = 25 \%$$

➤ Probabilidad de que solo haya un autobús en la estación de servicio, P_1

$$P_1 = p(1 - p) = \left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16} = 0,1875 = 18,75 \%$$

$$W = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{8 - 6} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ horas} = 30 \text{ minutos}$$

- Probabilidad de que el tiempo de espera en la cola sea mayor de 45 minutos (0,75 Horas)

$$P(W_q > 0,75) = \rho e^{-\mu(1-p)0,75} = \frac{3}{4} e^{-8(1-\frac{3}{4})0,75} = 0,1674 = 16,74 \%$$

- Probabilidad de que el tiempo total de permanencia en el sistema (esperando en la cola + cargando combustible), sea superior a 1 hora

$$P(W_q > 1) = \rho e^{-\mu(1-p)1} = e^{-8(1-\frac{3}{4})} = 0,1353 = 13,53 \%$$

Si es necesario recargar combustible después de tres viajes completos, será necesario parar diariamente 2 veces en la estación de servicio, y cada una de ellas tendrá una duración de 30 minutos según los cálculos realizados anteriormente. Por tanto, cada día estará 1 hora parado. El costo de esta parada será el costo de operación del autobús durante esa hora de parada:

$$60,000 \frac{\text{u. m.}}{\text{mes}} \times \frac{1 \text{ mes}}{24 \text{ días}} \times \frac{1 \text{ día}}{16 \text{ horas}} = 156,25 \frac{\text{u. m.}}{\text{hora}}$$

Es decir el coste de operación del autobús es de 156,25 u. m. por hora de trabajo. Como cada día está 1 hora parado, el costo diario de esta espera será de 156,25 u. m.

Auto evaluación

- 1.- Realizar un breve resume sobre la “**TEORIA DE COLA**”; donde se explique su fundamento, Definición, historia, Modelos, Tipos y Características con sus herramientas. De ejemplo explicativo. Análisis mediante un proyecto donde indique su tendencia y aplicación probable,

señalando su importancia y el uso de Software para facilitar su implementación.

- 2.- Un restaurante tiene un estacionamiento para tres autos. Cuando el restaurante está abierto, los clientes ocupan el lugar con una tasa promedio de 2 cada hora. Para $n = 0, 1, 2, 3$; la probabilidad P_n de que haya exactamente n espacios ocupados es $P_0 = 0,1$; $P_1 = 0,2$; $P_2 = 0,3$; $P_3 = 0,4$
 - a) Halle los valores L , L_q , W y W_s de este sistema de cola.
 - b) Con los valores obtenidos, obtenga el tiempo promedio que cada cliente permanece en el restaurante.
- 3.- Un cajero de estacionamiento, donde llega un promedio de 10 vehículos por hora. Suponga que el tiempo promedio de servicio para cada cliente es de 4 minutos, y que los tiempos entre llegadas y los de servicio son exponenciales. Conteste las siguientes preguntas.
 - a) ¿Cuál es la probabilidad de que el cajero se encuentre vacío?
 - b) ¿Cuál es el número promedio de automóviles que esperan en la cola su turno?, se considera que un vehículo que está ocupando el cajero, no está en la cola esperando.
 - c) ¿Cuál es el tiempo promedio que un cliente pasa en el estacionamiento del banco, incluyendo el tiempo en el servicio?
 - d) En promedio, ¿Cuántos clientes por hora serán atendidos por el cajero automático?
- 4.- Los propietarios de automóviles llenan sus tanques de gasolina cuando están exactamente a la mitad, En la actualidad, llega un promedio de 7.5 clientes por hora a una gasolinera que tiene una sola bomba surtidora. Se necesita un promedio de 4 minutos para atender un automóvil. Suponga que tanto los tiempos entre llegadas como los tiempos de servicio son exponenciales.
 - a) Para el caso actual, calcule L y W

b) Suponga que se presenta escasez de gasolina y que hay compras de pánico. Para modelar este fenómeno, suponga que todos los propietarios de automóvil compran gasolina cuando sus tanques les falta exactamente $\frac{3}{4}$ partes. Como cada conductor pone menos gasolina al tanque durante cada visita a la gasolinera, suponga que el tiempo promedio de servicio se ha reducido a 3.33 minutos ¿Cómo afecta la compra de pánico a L y a W ?

5.- En una aerolínea se debe revisar cada pasajero, así como su equipaje, para ver si trae armas. Suponga que al aeropuerto Internacional La Aurora llega un promedio de 10 pasajeros/minuto. Los tiempos entre llegadas son exponenciales. Para revisar a los pasajeros, el aeropuerto debe tener una estación que consiste en un detector de metales y una máquina de rayos X para el equipaje. Cuando está trabajando la estación se necesitan dos empleados. Una estación puede revisar un promedio de 12 pasajeros/min. Con la hipótesis que el aeropuerto sólo tiene una estación de verificación, responda las siguientes preguntas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un pasajero tenga que esperar para ser revisado?

b) En promedio, ¿Cuántos pasajeros esperan en la cola para entrar a la estación?

c) En promedio, ¿Cuánto tiempo pasará el pasajero en la estación de verificación?

UNIDAD 4

MODELOS DE TRANSPORTE EN INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

La resolución de un modelo de transporte se realiza mediante un procedimiento de la programación lineal, pero su estructura nos permite la creación de múltiples alternativas para llegar a dicha solución, podemos nombrar por ejemplo los modelos de asignación o los métodos de flujos de red. También es posible emplear los heurísticos más populares como Vogel, Esquina Noroeste o Mínimos Costos.

Los problemas de transporte o distribución son uno de los más aplicados en la economía actual, dejando, como es de prever, múltiples casos de éxito a escala global que estimulan la aprehensión de los mismos.

Los algoritmos de transporte.

Un algoritmo es un “*grupo finito de operaciones organizadas de manera lógica y ordenada*” mediante el cual se obtiene la solución un determinado problema. Son instrucciones o reglas secuenciales, establecidas, mediante el cual se realizan una serie de pasos, que nos llevan a obtener un resultado o solución.

El modelo de transporte es un caso particular de los problemas referidos a la programación lineal. Se presentan varias situaciones con el traslado de productos desde lugares llamados puntos origen (fabrica, almacén) a los puntos de destino (consumo); su objetivo es determinar las cantidades óptimas de dichos envíos de las el origen a las de consumo que minimicen el costo total del transporte, al mismo tiempo que satisfagan tanto los límites de la oferta como los requerimientos de la demanda.

El algoritmo de transporte organiza los cálculos en una forma más cómoda aprovechando la ventaja de la estructura especial del modelo de transporte. Para esto sigue los mismos pasos que el método simplex, sin embargo, en lugar de usar la tabla simplex normal se aprovecha la ventaja de la estructura especial del modelo de transporte para organizar los cálculos en una forma más cómoda.

El problema del transporte o distribución, es un Problema de redes especial en la programación lineal. Los principales objetivos de un modelo de transporte son la satisfacción de todos los requerimientos establecidos por los destinos, y claro está, la minimización de los costos relacionados con el plan determinado por las rutas escogidas.

La aplicación el modelo de transporte tiene un amplio contexto y se genera soluciones relacionadas con el área de operaciones, inventario y asignación de elementos.

Debemos señalar que el algoritmo especial de transporte fue desarrollado por primera vez cuando la norma eran los cálculos a mano y se necesitaba de soluciones con método abreviado.

Otro detalle importante es que el algoritmo de transporte se basa en la hipótesis de que el modelo está balanceado, eso quiere decir que la demanda total es igual a la oferta total. Si el modelo está desbalanceado siempre se podrá aumentar con una fuente ficticia o destino ficticio para restaurar el equilibrio o balance.

Los pasos del algoritmo de transporte son exactamente iguales a los del algoritmo simplex.

1^{er} Paso: Se determina una solución básica factible de inicio que nos ayude a proseguir en el siguiente paso.

2^{do} Paso: Se usa la condición de optimalidad del método simplex para determinar la variable de entrada entre todas las variables básicas. Detenerse si se satisface.

3^{er} Paso: Se usa la condición de factibilidad del método simplex para determinar la variable de salida para determinar la nueva solución y posteriormente se regresa al paso dos.

Además, anteriormente recordemos que los problemas de transporte consisten en decidir cuántas unidades trasladar desde ciertos puntos de origen (plantas, ciudades) a ciertos puntos de destino (centros de distribución, ciudades) de modo de minimizar los costos de transporte, dada la oferta y demanda en dichos puntos. Se suponen conocidos los costos unitarios de transporte, los requerimientos de demanda y la oferta disponible.

Cualquier modelo de transporte se compone de unidades de un bien a distribuir, m orígenes, n destinos, recursos en el origen, demandas en los destinos y costos de distribución por unidad. Adicionalmente, se tienen varios supuestos:

1. **Supuesto de requerimientos:** cada origen tiene un suministro fijo de unidades que se deben distribuir por completo entre los destinos.
2. **Supuesto de costo:** el costo de distribuir unidades de un origen a un destino cualquiera es directamente proporcional al número de unidades distribuidas.
3. **Propiedad de soluciones factibles:** un problema de transporte tiene soluciones factible sólo si la sumatoria de recursos en los m orígenes es igual a la sumatoria de demandas en los destinos.

4. **Propiedad de soluciones enteras:** En los casos en los que tanto los recursos como las demandas toman un valor entero, todas las variables básicas (asignaciones), de cualquiera de las soluciones básicas factibles (inclusive la solución óptima), asumen también valores enteros.

Lo primero que se debe hacer es formular el problema en términos de programación lineal para esto se necesita identificar las actividades y los requerimientos del problema para de esta manera formularlo como un problema de programación lineal.

El método de la esquina Noroeste

Se trata de un algoritmo heurístico capaz de solucionar problemas de transporte o distribución mediante la consecución de una solución básica inicial que satisfaga todas las restricciones existentes sin que esto implique que se alcance el costo óptimo total.

Este método tiene como ventaja con respecto a otros similares en la rapidez de su ejecución, y es utilizado con mayor frecuencia en ejercicios donde el número de fuentes y destinos sea muy elevado.

El método comienza en la esquina noroeste o superior izquierda de la tabla (variable x_1) o sea donde comienzan los valores el primer elemento de la tabla arriba y a la izquierda, para aplicarlo debemos seguir los siguientes pasos.

1. Asignar lo más que se pueda a la celda seleccionada y ajustar las cantidades asociadas de oferta y demanda restando la cantidad asignada.
2. Salir del renglón o la columna cuando se alcance oferta o demanda cero y tacharlo para indicar que no se pueden hacer más asignaciones a ese renglón o columna.

3. Detenerse si queda exactamente un renglón o columna sin tachar.
O en caso contrario avanzar a la celda de la derecha si se acaba de tachar una columna o a la de abajo si se tachó un renglón y devolvemos al paso uno.

El método del costo mínimo o de los mínimos costos

Es un algoritmo desarrollado con el objetivo de resolver problemas de transporte o distribución, cuyos resultados obtenidos es mejor que el método de esquina noroeste, ya que plantea su enfoque en las rutas que presentan menores costos. El diagrama de flujo de este algoritmo es mucho más sencillo que los anteriores dado que se trata simplemente de la asignación de la mayor cantidad de unidades posibles (sujeta a las restricciones de oferta y/o demanda) a la celda menos costosa de toda la matriz hasta finalizar el método.

Este método determina una mejor solución de inicio, porque se concentra en las rutas menos costosas, es decir, se inicia asignando todo lo posible a la celda que tenga el mínimo costo unitario los empates se rompen en forma arbitraria.

A continuación el renglón o columna ya satisfecho se tacha y las cantidades de oferta y demanda se ajustan en consecuencia. Si se satisfacen en forma simultanea un renglón y una columna al mismo tiempo solo se tacha uno de los dos.

Posteriormente se busca la celda no tachada con el costo unitario mínimo y se repite el proceso hasta que queda sin tachar exactamente un renglón o columna.

El método de aproximación de Vogel

Es un método heurístico de resolución de problemas de transporte capaz de alcanzar una solución básica no artificial de inicio, este modelo requiere de la realización de un número generalmente mayor de iteraciones que los demás métodos heurísticos existentes con este fin, sin embargo producen mejores resultados iniciales que los mismos.

El método de los flujos mutuamente preferibles.

Se basa en la noción de flujo mutuamente preferible. Permite obtener normalmente una solución básica mucho más próxima a la óptima que el método de la esquina noroeste ahorrando iteraciones y muchas veces la solución básica ya es óptima. Sin embargo, este método no ha sido justificado en una forma analítica, sino simplemente mediante la noción intuitiva de que los flujos mutuamente preferibles tienen una probabilidad más elevada de estar incluidos en la solución óptima.

El método de cost preprocessing

Método de eficacia análoga a los métodos de Russell y de Vogel y que proporciona otro criterio excelente y fácil de llevar a la práctica en un ordenador pero no para la forma manual debido a que es necesario realizar numerosos cálculos.

Ejercicios explicativos de modelo de transporte

El objetivo de los modelos de transporte es encontrar la solución a un coste mínimo para realizar un plan de envíos desde varios orígenes a varios

destinos, es decir, determinar qué cantidad del producto o productos a transportar se enviará desde cada punto origen a cada punto destino, teniendo en cuenta las restricciones del problema en cuanto a capacidades y demandas, y de forma que el coste total de distribución sea mínimo.

Los orígenes pueden ser fábricas, almacenes, empresas de servicio o cualquier otro punto desde el que se desea enviar algo. Los destinos son los puntos que reciben estos productos o maquinarias. Al utilizar el modelo de transporte, debemos conocer:

- 1.- Los orígenes y la capacidad de suministro de cada uno de ellos por período de tiempo.
- 2.- Los destinos y la demanda de cada uno de ellos por período de tiempo.
- 3.- El coste de enviar un producto unitario de cada origen a cada destino.

El modelo de transporte es, un caso particular de la programación lineal. Por lo tanto existen software disponible para la resolución de problemas de transporte. Para poder utilizar bien estos programas, es necesario comprender la hipótesis en las que se basa el modelo.

Analizaremos un ejemplo con la finalidad de comprender este modelo.

Ejemplo 1

Una empresa llamada "Xeta", que fabrica, entre otros productos, una línea completa de embaces. Los datos referentes a los tipos de embaces son señalados en la siguiente tabla 1. La empresa debe decidir desde qué fábricas deben enviar los embaces. La planta de Cumana puede realizar 100 embaces, la de Barquisimeto 300 embaces y la de San Cristóbal 300 embaces. Los almacenes de Maracaibo solicita 300 embaces, el de Caracas 200 embaces y el de Valencia 200 embaces respectivamente.

Tabla 1. Costes en \$ de transporte por embaces para la empresa “Xeta”

Desde	Para	Maracaibo	Valencia	Caracas
Cumana		5	4	3
Barquisimeto		8	4	3
San Cristóbal		9	7	5

Tabla 2. Matriz de transporte para “Xeta”.

Desde	Para	Maracaibo	Valencia	Caracas	Capacidad
Cumana		5	4	3	100
Barquisimeto		8	4	3	300
San Cristóbal		9	7	5	300
Requerimientos de los clientes		300	200	200	700

Columna de capacidad, representa las asignaciones posibles de unidades a transportar desde el origen (fila) al destino. (columna).

En las esquinas superior derecha se colocan los costos de envío desde cada ciudad origen a las ciudades destinos respectivos. En la ultima celda la Demanda total (capacidad total)

1^{er} Paso: En el proceso de modelización es la elaboración de la matriz de transporte. Su objetivo es resumir claramente todos los datos para realizar el seguimiento de los cálculos del algoritmo. Utilizando la información de empresa “Xeta” de la tabla 1, se construye una matriz de transporte como la mostrada en la tabla 2.

Solución de partida – El método del rincón noroeste

Realizada la tabla 2, se busca hallar una solución posible e inicial para el problema. Un procedimiento, conocido como el método del rincón

noroeste, empieza por la celda de más arriba y más a la izquierda (rincón noroeste) de la tabla y asigna las cantidades transportar de la forma siguiente:

- a- Coloque el mayor valor posible de la oferta (capacidad de la fábrica) de casa fila antes de saltar a la siguiente hacia abajo.
- b- Las necesidades (del almacén) de cada columna antes de pasar a la siguiente hacia la derecha.
- c- Compruebe que se satisfacen todas las demandas y ofertas (capacidades).

En la tabla 3, utilizando el método del rincón noroeste para encontrar una solución de partida posible para el problema de la empresa "Xeta". En éste ejemplo han sido necesarios cinco pasos para encontrarla:

1. Asignamos 100 embaces de Cumana a Maracaibo (agotamos la oferta de Cumana, pasamos a la siguiente fila).
2. Asignamos 200 embaces de Barquisimeto a Maracaibo (cubriendo el límite de la columna de Maracaibo, por lo que continuamos en la misma fila hacia la derecha).
3. Asignamos 100 embaces de Barquisimeto a Caracas (agotando la oferta de Barquisimeto)
4. Asignamos 100 embaces de San Cristóbal a Caracas (cubriendo la demanda de Caracas).
5. Asignamos 200 embaces de San Cristóbal a Valencia (finalmente agotamos la oferta de San Cristóbal y la demanda de Valencia).

Tabla 3 Solución de partida a través del método del rincón noroeste

Desde	Para	Maracaibo (A)	Valencia (B)	Caracas ©	Capacidad
Cumana (D)		5	4	3	100
	100				
Barquisimeto (E)		8	4	3	300
	200		100		
San Cristóbal (F)		9	7	5	300
			100	200	
Requerimientos de los clientes		300	200	200	700

Significa que la empresa debe enviar 100 embaces desde San Cristóbal a Caracas

Tabla 4 Cálculo del coste del plan de envíos.

RUTA Origen	Destino	EMBACES ENVIADAS	COSTE UNITARIO	COSTE TOTAL (\$)
D	A	100	5 \$	500 \$
E	A	200	8 \$	1.600 \$
E	B	100	4 \$	400 \$
F	B	100	7 \$	700 \$
F	C	200	5 \$	1.000 \$
				4.200 \$

El coste total de este plan de envíos es de 4200 dólares (tabla 4)

La solución obtenida es posible porque satisface todas las restricciones de demanda y oferta. Sin embargo, tendríamos mucha suerte si ésta solución conlleva el mínimo coste total del transporte del problema. Lo más probable es que debamos utilizar un procedimiento adicional para encontrar la solución óptima, dado que el método del rincón noroeste solamente nos proporciona una solución de partida.

El algoritmo de Stepping – Stone

El algoritmo de Stepping – Stone nos permitirá ir de la solución de partida a la solución óptima. Se utiliza para evaluar la efectividad del coste de enviar unidades a través de rutas que en la actual solución no se contemplan. Vamos a comprobar cada celda o casilla no utilizada (sin cantidad asignada, es decir, vacía) en la matriz de transporte preguntándonos: “Qué pasaría con el coste total de transporte si enviásemos una cantidad de producto (por ejemplo, Embases) por ésta vía no utilizada?”. Lo realizaremos de la siguiente forma:

1. Seleccionar una celda no utilizada para ser evaluada.
2. Empezando por esta celda, trazar un circuito que acabe con esta misma celda, a través de celdas que sí estén utilizadas (solo se permiten movimientos horizontales o verticales). Podemos pasar, sin embargo, tanto por celdas utilizadas como por las no utilizadas, pero sólo podemos cambiar de dirección por las que efectivamente están en uso (con cantidad asignada).
3. Empezando con un signo + en la celda seleccionada en el punto 1, vamos colocando alternativamente signos – y signos + en cada celda en la que cambiamos de dirección (esquinas) del circuito que hemos trazado, hasta llegar de nuevo a la celda inicial, que evidentemente habrá de tener el signo +.
4. Calcular el índice de mejora, sumando los costes unitarios de las celdas con el signo + y restando los costes asociados de las celdas con el signo menos.
5. Repetir los pasos 1 a 4 hasta que se hayan calculado los índices de mejora para todas las celdas vacías. Si todos los índices calculados son mayores o iguales a cero, la solución actual es la solución óptima. En

caso contrario es posible mejorar dicha solución y rebajar el coste total de transporte.

El ejemplo siguiente; se muestra cómo utilizar el método de Stepping – Stone para llegar a la solución óptima.

Ejemplo 2

Podemos aplicar el método de Stepping – Stone a los datos del problema de la empresa “Xeta” de la figura 4, para evaluar las rutas no utilizadas. En este momento, las rutas no utilizadas son: de Cumana a Caracas, de Cumana a Valencia, de Barquisimeto a Valencia y de San Cristóbal a Maracaibo.

Pasos 1 y 2. Empezando por Cumana, trazamos un circuito utilizando solamente las celdas ocupadas (Tabla 5). Ponemos alternativamente signos más y menos en las esquinas del circuito. Nótese que hemos utilizado solamente celdas donde existen envíos para cambiar de dirección la ruta que sigue el circuito que estamos trazando.

Por lo tanto, el circuito: Cumana - Caracas, Cumana - Valencia, San Cristóbal – Cumana, San Cristóbal – Caracas, Cumana – Caracas no sería aceptable por que la celda correspondiente a San Cristóbal – Cumana que está vacía.

Resulta que solamente existe un circuito para cada celda vacía. Una vez que se ha identificado el circuito, podemos asignar los signos + y – a las casillas del circuito.

Paso 3. ¿Cómo decidimos a qué celdas se les asigna un signo + y a cuales un signo menos?. La respuesta es fácil. Dado que estamos comprobando la efectividad del coste de la ruta Cumana – Caracas, vamos a tratar de enviar un embace de Cumana a Caracas. Esto es una unidad

más de lo que estamos enviando entre dos ciudades, por lo tanto colocamos un signo más en la celda.

Pero si enviamos una unidad más que antes desde Cumana a Caracas, estaremos enviando 101 desde la fábrica de Cumana. Como la capacidad de la fábrica de Cumana es solamente de 100 embaces, debemos enviar una menos desde Cumana a Maracaibo. Este cambio nos permite cumplir con la restricción del límite de capacidad de Cumana.

Para indicar que reducimos el envío de Cumana a Maracaibo, colocamos un signo – en esta celda. Continuando a lo largo del circuito, nótese que no estamos cumpliendo con las necesidades del almacén de Maracaibo, que eran de 300 unidades.

De hecho, si reducimos el envío de Cumana a Maracaibo a 99 unidades, debemos incrementar el de Barquisimeto a Maracaibo en una unidad hasta llegar a las 201 embaces. Por lo tanto, debemos colocar un signo más para indicar el incremento.

Observe además que estas celdas donde cambiamos de dirección (y sólo estas celdas) tendrán signos + o -.

Finalmente, si asignamos 201 Embaces a la ruta de Barquisimeto a Maracaibo, debemos reducir el envío de Barquisimeto a Caracas en una unidad, hasta las 99 embaces, con el objeto de seguir cumpliendo la restricción de capacidad de Barquisimeto de 300 unidades. Por lo tanto, asignamos un signo menos a la celda Barquisimeto - Caracas.

Como resultado hemos equilibrado las limitaciones de suministros entre las cuatro rutas que componen el circuito.

Tabla 5. Evaluación mediante el algoritmo de Stepping – Stone de las rutas alternativas del problema de la Empresa “Xeta”.

desde \ hasta	Maracaibo (A)	Caracas (B)	Valencia (C)	Capacidad de las fábricas.
Cumana (D)	100 -	Start +	3\$	100
Barquisimeto (E)	200 +	- 100	3\$	300
San Cristobal (F)		100	5\$	300
Necesidad de los almacenes	300	200	200	700

Los movimiento de asignación propuesto = $1 \times 4 - 1 \times 5 + 1 \times 8 - 1 \times 4 = + 3 \$$

Paso 4. Cálculo del índice de mejora para la ruta Cumana – Caracas sumando los costes que tengan un signo + en la celda y restando los que tengan un signo -.

$$\text{Índice de Cumana – Caracas : } 4 - 5 + 8 - 4 = +3$$

Esto significa que para cada bañera enviada de Cumana a Caracas, los costes totales de transporte se incrementarán en 3 dólares por encima del coste de la solución actual.

Vamos a examinar ahora la ruta no utilizada de Cumana a Valencia, con un circuito un poco más complejo que el anterior. Hay que recordar que solamente podemos cambiar de dirección en las celdas que están siendo utilizadas. El circuito puede ir hacia Barquisimeto - Valencia, pero aquí no podemos girar, por lo que no podemos asignar un signo más o menos (Tabla 6).

Índice de mejora para Barquisimeto – Valencia: $3 - 5 + 8 - 4 + 7 = +4$

Tabla 6. Evaluando Barquisimeto a Valencia.

<i>desde</i> \ <i>hasta</i>	<i>Maracaibo (A)</i>	<i>Caracas (B)</i>	<i>Valencia (C)</i>	<i>Fábrica</i>
<i>Cumana (D)</i>	100		Inicio	100
			3\$	
<i>Barquisimeto (E)</i>	200			300
			3\$	
<i>San Cristobal (F)</i>				300
			5\$	
<i>Necesidad de los almacenes</i>	300	200	200	700

Por lo tanto, realizar envíos desde Cumana a Valencia no va a mejorar el coste total. Las otras rutas las podemos evaluar de la misma forma:

$$\text{(Circuito: EC - EB + FB - FC)}$$

$$\text{Índice de mejora de Barquisimeto - Valencia} = 3 - 4 + 7 - 5 = 1$$

$$\text{(Circuito: FA - FB + EB - EA)}$$

$$\text{Índice de mejora de San Cristóbal - Maracaibo} = 9 - 7 + 4 - 8 = -2$$

Dado que éste último índice es negativo, se pueden obtener mejoras en el coste total, realizando envíos por esta ruta, San Cristóbal - Maracaibo, actualmente no utilizada.

En el análisis realizado con este ejemplo se concluye que es posible mejorar la solución, puesto que existe una ruta, que actualmente no se utiliza, con un índice de mejora negativo.

Cada índice negativo representa la cantidad en que mejora (se reduce) el coste total de transporte si enviamos una unidad de producto desde el origen al destino asociados a la celda en cuestión.

El siguiente paso es, por lo tanto, escoger la ruta (celda vacía) con el índice de mejora más negativo, y enviaremos a través de ella la cantidad máxima posible con el objetivo de reducir, consecuentemente, el coste total.

¿Cuál es la cantidad máxima que podemos enviar a través de esta nueva ruta?

La cantidad se obtiene del circuito que ha servido para calcular el índice, y seleccionaremos la cantidad más pequeña de las que tienen asignado el signo más y se la restaremos a las que tienen el signo menos. Se a analizado, una iteración del algoritmo de Stepping – Stone.

De nuevo debemos comprobar si esta solución es la óptima, o en su lugar, dónde podemos encontrar nuevas mejoras. Esto se realiza evaluando cada celda no utilizada, de la misma manera que hemos hecho antes.

En el ejemplo 3 se continúa la resolución del problema de Empresa “Xeta” hasta llegar a la solución óptima

Ejemplo 3

Para mejorar la solución de Empresa “Xeta” usamos los índices calculados en el ejemplo 2. El índice de mejora más negativo (único negativo) pertenece a la celda de San Cristóbal - Maracaibo, como vemos en la Tabla 7

La cantidad máxima que podemos transportar en la nueva ruta (FA) es el número más pequeño de los que tienen asignados un signo menos, en este caso 100. ¿Por qué 100 unidades? Porque como el coste total descende en 2 dólares por unidad transportada, enviaremos lo máximo posible.

Los cálculos previos del algoritmo indicaban que cada unidad de incremento en la ruta FA implicaba un incremento de una unidad en la ruta EB y un descenso de una unidad tanto en la ruta FB (ahora se transportan 100) como en la EA (que ahora se transportan 200).

Por lo tanto, la cantidad máxima que podemos transportar por la ruta FA es 100 bañeras (una cantidad mayor implicaría un transporte negativo en la ruta FB). Esta solución implica que se transportarán 0 unidades por la ruta FB.

Ahora, por lo tanto, procederemos a añadir 100 unidades a la ruta FA (a las cero actualmente transportadas); restamos 100 a la ruta FB, dejando un cero en esta celda, pero permitiendo que la fila siga sumando lo mismo, es decir, 300; sumamos 100 a la ruta EB dejándola en 200; y, finalmente, restamos 100 a la ruta EA dejándola en 100 unidades. Véase que los nuevos números siguen produciendo los totales necesarios en las filas y columnas (ofertas y demandas originales). La nueva solución se muestra en la figura H.

Tabla 7. Tabla de transporte: ruta FA.

<i>desde</i> \ <i>hasta</i>	<i>Maracaibo (A)</i>	<i>Caracas (B)</i>	<i>Valencia (C)</i>	<i>Fábrica</i>
<i>Cumana (D)</i>	100 -	4\$ -	3\$ -	100
<i>Barquisimeto (E)</i>	200	4\$ + 100	3\$ -	300
<i>San Cristobal (F)</i>	- +	7\$ - 100	5\$ 200	300
<i>Almacén</i>	300	200	200	700

Tabla 8. Solución en la nueva iteración (sigue no siendo óptima).

<i>De</i> \ <i>A</i>	<i>Maracaibo (A)</i>	<i>Caracas (B)</i>	<i>Valencia (C)</i>	<i>Fábrica</i>
<i>Cumana (D)</i>	100 -	5\$ 4\$	3\$	100
<i>Barquisimeto (E)</i>	100	8\$ 4\$ 200	3\$	300
<i>San Cristobal (F)</i>	100	9\$ 7\$	5\$ -	300
<i>Almacén</i>	300	200	200	700

El coste total de transporte se ha reducido en (100 unidades)x(2 \$ de ahorro) = 200 \$, por lo que ahora es de 4000 dólares. Este valor del coste total, por supuesto, también se puede obtener multiplicando las unidades enviadas a través de cada ruta por el costo unitario y al final sumando los valores resultantes, de la forma siguiente:

$$100 \times (5) + 100 \times (8) + 200 \times (4) + 100 \times (9) + 200 \times (5) = 4000$$

Si observamos detenidamente la tabla 8. Se observa que la solución no es la óptima. La ruta EC (Barquisimeto – Valencia) tiene un índice de mejora negativo.

Degeneración

Al usar el algoritmo de Stepping – Stone a un problema de transporte se debe cumplir una condición con el número de rutas utilizadas (celdas no vacías): el número de celdas utilizadas (no vacías), en cualquier solución

(inicial o posterior) debe ser igual al número de filas más el número de columnas de la tabla menos 1.

Las soluciones que no cumplen esta condición se denota como soluciones degeneradas.

La degeneración ocurre cuando se están utilizando demasiadas pocas rutas (celdas). Como consecuencia, es imposible poder trazar un circuito para una o más celdas no utilizadas. Ninguno de los problemas que trataremos más adelante en degenerado. El problema original de la empresa "Xeta" , por ejemplo, tenía cinco rutas asignadas (3 filas + 3 columnas – 1 = 5).

Auto evaluación

El siguiente cuadro indica el costo de transporte unitario en \$, desde los orígenes a los destinos y sus respectivas ofertas y demandas. Empleando el método de costo mínimo determine la cantidad a transportar de cada origen a cada destino y determine también el costo mínimo en que se incurre.

1.-

Origen Destino	Destino			Oferta TM
	A	B	C	
1	40	60	90	2.000
2	10	40	50	3.000
3	30	20	10	4.000
Demanda Kgr.	1.500	2.500	5.000	

2.-

Origen Destino	Destino				Oferta M ² .
	V	W	X	Y	
M	60	10	60	80	2.000
N	70	90	60	110	3.000
S	80	100	140	60	4.500
Demanda m ² .	1.000	1.500	4.000	3.000	

3- Chip. C. A. es una fábrica de componentes de electrónico para Televisión tiene dos fábricas que producen, respectivamente, 8.000 y 15.000 piezas semanales. Estos componentes se deben transportar a tres clientes que necesitan 10.000, 7.000 y 6.000 piezas, cada una. Los costos de transporte, en \$ por pieza aparecen en la tabla adjunta. ¿Cómo debe organizarse el transporte para que el costo sea mínimo?

Cliente Fabrica	A	B	C
I	30	70	10
II	20	20	60

4.- Dos almacenes A y B, distribuyen frutas a tres mercados de la ciudad de Caracas. El almacén A dispone de 10 toneladas de fruta diarias y el B de 15 toneladas, que se reparten en su totalidad. Los dos primeros mercados necesitan, diariamente, 8 toneladas de fruta, mientras que el tercero necesita 9 toneladas diarias. El costo del transporte desde cada almacén a cada mercado viene dado por el siguiente cuadro:

Mercado Almacén	A	B	C
A	10	15	20
B	15	10	10

Utilizando el método matriz mínima, determine el transporte para que el costo sea mínimo.

5.- Una compañía tiene tres Plantas (A, B y C) para fabricar bebidas gaseosas LA ESPARTANA, y dispone de tres distribuidores mayoristas para la venta (D, E y F). Las cantidades producidas por A, B y C son 1000, 5000 y 4000 litros por día respectivamente. La máxima cantidad que puede vender el almacén D es 3000 litros/día, E es 6000 litros/día y F es 7000 litros/día. Los costos de transporte de cada fábrica a cada distribuidor mayorista están dados en la siguiente tabla:

Plantas Distribuidora	Destino		
	D	E	F
A	1	4	2
B	3	1	2
C	4	5	2

Determine la cantidad a transportar desde los orígenes a los destinos para que el costo sea mínimo

6.- SEDAM Huancayo SA. tiene que distribuir el agua de tres pozos entre tres localidades. La tabla de costos de distribución de cada m³ es la siguiente:

Pozo Localidades	Destino			Oferta (m ³ /día)..
	A	B	C	
I	70	80	100	400
II	50	120	40	300
III	90	70	80	450
Demanda (m ³ /día).	550	400	600	

Determine la distribución del agua para cada una de las localidades de modo que el costo sea el mínimo.

7.- Una empresa KINGTEX S.A. produce 120 unidades del producto A y 360 unidades del producto B cada día. Estos productos han de someterse a control de calidad, siendo la capacidad de control de 200 unidades al día. El producto A se vende en el mercado a un precio 4 veces superior al precio del producto B. Determínese la producción de la empresa que hace posible maximizar el beneficio.

8.- CEPER PIRELLI SA. fabrica cable eléctrico de alta calidad usando dos tipos de aleaciones metálicas, M y N. La aleación M contiene un 80% de cobre y un 20% de aluminio, mientras que la N incluye un 68% de cobre y un 32% de aluminio. La aleación M tiene un precio de 80 euros por tonelada, y la N, 60 euros por tonelada. ¿Cuáles son las cantidades que Pedro Pérez debe usar de cada aleación para producir una tonelada de

cable que contenga al menos un 20% de aluminio y cuyo costo de producción sea el menor posible?

Asignaciones.

El modelo de asignación es un tipo especial de problema de programación lineal en el que los asignados son recursos que se destinan a la realización de tareas. Por ejemplo, los asignados pueden ser empleados a quienes se tiene que dar trabajo. La asignación de Particulares para trabajos es una práctica normal de esta herramienta. Aunque, los asignados no tienen que ser personas. Por ejemplo, podemos señalar las máquinas, los vehículos o las plantas e incluso los lapsos temporales para asignan las tareas.

El eslogan: **“La mejor persona para el puesto”** es una buena descripción del modelo de asignación.

El objetivo de esta herramienta es obtener una asignación óptima (costo mínimo) de trabajadores a puestos.

El modelo general de asignación con n trabajadores y n puestos se representa en la tabla siguiente:

		Puestos				
		1	2	...	n	
Trabajador	1	C_{11}	C_{12}	...	C_{1n}	1
	2	C_{21}	C_{22}	...	C_{2n}	1
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	n	C_{n1}	C_{n2}	...	C_{nn}	1
		1	1	---	1	

Para ajustarse a la definición de un problema de asignación, se necesita que las aplicaciones sean formuladas cumpliendo con supuestos siguientes:

- a- La cantidad de asignados es igual la cantidad de labores “**n**”
- b- A cada asignado se le indique una sola labor.
- c- Cada labor debe ser realizada por sólo un asignado.
- d- El costo C_{ij} correspondiente con el asignado i ($i = 1, 2, \dots, n$) que realiza la labor j ($j = 1, 2, \dots, n$).
- e- El objetivo es obtener cómo se debe realizar las n asignaciones para minimizar los costos totales.

La realización del modelo de asignación en forma directa como modelo normal de transporte; cumpliendo el hecho de que todas las ofertas y las demandas son iguales a 1, condujo al desarrollo de un algoritmo sencillo de solución llamado **método húngaro**.

Método húngaro

Es un método de optimización de problemas de asignación, dado a conocer por Dénes König y Jenő Egerváry dos matemáticos húngaros, mediante un algoritmo diseñado para la resolución de problemas de **minimización** únicamente.

Se debe tomar en cuenta que este método trabaja con una matriz de costos **$n \times m$** (en nuestro caso la matriz es **$m \times m$** , dado que el número de filas es igual al número de columnas **$n = m$**).

Al resolver un problemas de asignación, aplicando el método Húngaro, debemos seguir los siguientes pasos o algoritmos:

1^{er} Paso: En la matriz original de costo, identificar el mínimo de cada renglón y restarlo de todos los elementos del renglón.

2^{do} Paso: Para la matriz obtenida en el 1^{er} paso, se identifica el mínimo de cada columna, y restarlo de todos los elementos de la columna.

- a- De no poder asegurar una asignación factible (todos los elementos cero) en los dos pasos anteriores.
- b- Trazar la cantidad mínima de líneas horizontales y verticales en la última matriz reducida que cubran todos los elementos cero.
- c- Seleccionar el elemento mínimo no cubierto, restarlo de todo elemento no cubierto y a continuación sumarlo a todo elemento en la intersección de dos líneas.
- d- Si no se puede encontrar una asignación factible entre los elementos cero que resulten, repetir el 2^{do} paso. En caso contrario, seguir en el 3^{er} paso para determinar la asignación óptima.

3^{re} Paso: Identificar la solución óptima como la asignación factible asociada con los elementos cero de la matriz obtenida en el paso 2.

Ejemplo 1

Un equipo de 3 mecánicos debe ser asignado para la realización de 3 labores, donde cada mecánico debe hacer una labor. Se requiere encontrar la asignación de costo mínimo para lo cual se dispone de los costos asociados a que el mecánico *i* realice la labor *j*.

	Labor 1	Labor 2	Labor 3
1 ^{er} Mecánico	15	10	9
2 ^{do} Mecánico	9	15	10
3 ^{er} Mecánico	10	12	8

Solución

1^{er} Paso: En la matriz original de costo, identificar el mínimo de cada renglón y restarlo de todos los elementos del renglón.

	Labor 1	Labor 2	Labor 3	Valor mínimo de cada fila
1 ^{er} Mecánico	15	10	9	9
2 ^{do} Mecánico	9	15	10	9
3 ^{er} Mecánico	10	12	8	8

2^{do} Paso: En la matriz que resulte del paso 1, identificar el mínimo de cada columna, y restarlo de todos los elementos de la columna.

	Labor 1	Labor 2	Labor 3
1 ^{er} Mecánico	6	1	0
2 ^{do} Mecánico	0	6	1
3 ^{er} Mecánico	2	4	0
Valor minimo	0	1	0

3^{er} Paso: Identificar la solución óptima como la asignación factible asociada con los elementos cero de la matriz obtenida en el 2^{do} paso.

	Labor 1	Labor 2	Labor 3
1 ^{er} Mecánico	6	0	0
2 ^{do} Mecánico	0	6	1
3 ^{er} Mecánico	2	4	0

Las celdas con valor cero son la solución óptima. En consecuencia el 1^{er} mecánico realiza la labor 2, el 2^{do} mecánico asuma la labor 1 y el 3^{er} mecánico la labor 3. Cada mecánico realiza exactamente una tarea y el costo total de dicha asignación (valor óptimo) es de

$$C_{\text{total}} = 9 + 10 + 8 = 27.$$

Ejemplo 2

Comercial "Zaid" debe asignar 4 labores a 4 trabajadores. El costo de realizar un trabajo es función de los conocimientos de los trabajadores. La siguiente tabla resume el costo de las asignaciones. El 1^{er} trabajador no puede hacer la 3^{era} labor, y el 3^{er} trabajador no puede hacer el 4^{ta} labor. Determine la asignación óptima con el método húngaro.

	1 ^{er} Labor	2 ^{da} Labor	3 ^{era} Labor	4 ^{ta} Labor
1 ^{er} obrero	50	50	--	20
2 ^{do} obrero	70	40	20	30
3 ^{er} obrero	90	30	50	..
4 ^{to} obrero	70	20	60	70

Solución

1^{er} Paso: En la matriz original de costo, identificar el mínimo de cada renglón y restarlo de todos los elementos del renglón.

	1 ^{er} Labor	2 ^{da} Labor	3 ^{era} Labor	4 ^{ta} Labor	Costo Mínimo
1 ^{er} obrero	50	50	--	20	20
2 ^{do} obrero	70	40	20	30	20
3 ^{er} obrero	90	30	50	..	30
4 ^{to} obrero	70	20	60	70	20

2^{do} Paso: En la matriz que resulte del paso 1, identificar el mínimo de cada columna, y restarlo de todos los elementos de la columna.

	1 ^{er} Labor	2 ^{da} Labor	3 ^{era} Labor	4 ^{ta} Labor
1 ^{er} obrero	30	30	--	0
2 ^{do} obrero	50	20	0	10
3 ^{er} obrero	60	0	20	..
4 ^{to} obrero	50	0	40	50
Mínimo	30	0	0	0

3^{er} Paso: Si no se puede asegurar una asignación factible (con todos los elementos cero) con los pasos 1 y 2

a- Trazar la cantidad mínima de líneas horizontales y verticales en la última matriz reducida que cubran todos los elementos cero.

	1 ^{er} Labor	2 ^{da} Labor	3 ^{era} Labor	4 ^{ta} Labor
1 ^{er} obrero	0	30	--	0
2 ^{do} obrero	20	20	0	10
3 ^{er} obrero	30	0	20	..
4 ^{to} obrero	20	0	40	50

- b- Seleccionar el elemento mínimo no cubierto (negrita), restarlo de todo elemento no cubierto y a continuación sumarlo a todo elemento en la intersección de dos líneas.

	1 ^{er} Labor	2 ^{da} Labor	3 ^{era} Labor	4 ^{ta} Labor
1 ^{er} obrero	0	40	--	0
2 ^{do} obrero	10	20	0	0
3 ^{er} obrero	20	0	20	..
4 ^{to} obrero	10	0	40	40

- c- Si no se puede encontrar una asignación factible entre los elementos cero que resulten, repetir el 2^{do} paso a. En caso contrario, seguir en el 3^{er} paso para determinar la asignación óptima.

	1 ^{er} Labor	2 ^{da} Labor	3 ^{era} Labor	4 ^{ta} Labor
1 ^{er} obrero	0	50	--	10
2 ^{do} obrero	0	20	0	0
3 ^{er} obrero	10	0	20	..
4 ^{to} obrero	0	0	40	40

	1 ^{er} Labor	2 ^{da} Labor	3 ^{era} Labor	4 ^{ta} Labor
1 ^{er} obrero	0	50	--	10
2 ^{do} obrero	10	30	0	0
3 ^{er} obrero	10	0	10	..
4 ^{to} obrero	0	0	30	30

4^{to} Paso: Identificar la solución óptima como la asignación factible asociada con los elementos cero de la matriz obtenida en el 2^{do} pasó.

Las celdas con valor cero son la solución óptima. En consecuencia el 1^{er} obrero realizará la 4^{ta} Labor, el 2^{do} obrero asuma la 3^{era} Labor, el 3^{er} obrero realizará la 2^{da} Labor y el 4^{to} obrero la 1^{er} Labor. Cada trabajador realizará exactamente un trabajo y el costo total de dicha asignación (valor óptimo) es:

$$C_{\text{total}} = 20 + 20 + 30 + 70 = 140$$

Auto evaluación

1.- Una fábrica dispone de cuatro proveedores para completar cuatro productos. Cada proveedor sólo puede suministrar materia prima para realizar un producto. El tiempo que requiere cada proveedor para completar cada producto se expresa en la siguiente tabla:

Tiempo requerido (proveedor)	Producto 1	Producto 2	Producto 3	Producto 4
1	14	5	8	7
2	2	12	6	5
3	7	8	3	9
4	2	4	6	10

La fábrica desea minimizar el tiempo total dedicado a los cuatro productos. a) Determine la mejor asignación a los proveedores.

2. Una fábrica arma juguetes mecánicos, a dos mercados, en ello laboran 3 obreros con un tiempo de trabajo de 40 horas semanales, el sueldo vengado por cada obrero es de 1 \$, 1,25 \$ y 1,5 \$ respectivamente. Los obreros están dispuestos a trabajar 15 horas adicionales si el valor de la hora se incrementa en 50 % para el tiempo extra,

Semanales se tiene un costo fijo de 1.000 \$. Los gastos de operación variables son de 1.5 \$ por hora por obrero. Los juguetes vendidos al mercado A en 3 \$ y al Mercado B em 8 \$. La fábrica tiene un contrato bajo el cual debe entregar 150 juguetes semanalmente al mercado A y 50 jugurtes semanales al mercado B. El dueño de la fábrica aplica la meta de armar hasta 75 juguetes a la semana por sobre el contrato.

Los juguetes son vendidos a 15 \$ en el mercado A y 25 \$ en el mercado B. Se requieren 1 hora para armar un juguete

Desarrolle un modelo de programación lineal que responda lo siguiente: ¿cómo y cuánto producir para cumplir el contrato de modo de maximizar las utilidades?

3. El director de un centro de salud debe planificar el horario de los trabajadores del mismo. Determínese el coste mínimo de personal para el hospital sabiendo que

- a. La jornada laboral consta de 4 turnos.
- b. En cada turno ha de haber al menos 2 médicos, 4 enfermeras y 2 auxiliares de clínica.
- c. El número máximo de empleados que se requiere en cada turno es 15.
- d. Los salarios son los siguientes: 100 \$/turno para un médico, 30 \$/turno para un enfermero, y 15 \$/turno para un auxiliar de clínica.
- e. El número total de empleados es: 24 médicos, 40 enfermeras, y 60 auxiliares de clínica.
- f. Cada empleado debe descansar al menos dos turnos consecutivos.

4. Una empresa tiene un trabajo compuesto de 6 módulos para ser desarrollado por 6 programadores, se desea que cada módulo sea desarrollado por un solo programador y que cada programador desarrolle un solo módulo. El grado de dificultad de los módulos y a las diferencias individuales de los programadores, el tiempo (en días) de ellos es diferente, se expresa en la siguiente tabla:

MÓDULOS	PROGRAMADORES					
	A	B	C	D	E	F
Módulo 1	2	4	4	3	3	6
Módulo 2	2	6	5	4	3	6
Módulo 3	5	6	5	3	5	7
Módulo 4	3	5	7	2	1	4
Módulo 5	8	5	6	2	4	1
Módulo 6	3	2	6	5	3	7

- a) Determine la asignación óptima que minimice el tiempo total
- b) Cuándo debe comprometerse a entregar el trabajo
- c) ¿Qué sucede si un programador desarrolla más de un módulo?
- d) ¿Cuál es la opción óptima de la empresa?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Frederick S. y Hillier, G. J. Introducción a la Investigación de Operaciones
 - a. traducción Marcia A. Gonzalez O
- Hamd A. Taha Investigación de Operaciones. Traducción Juan Carlos Vega
- AQUINO CÓRDOVA, JOAQUÍN – “ INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES – EDICIÓN - RED TERCER MILENIO S. C. AÑO 2012
- TAHA, AMDY A. – “INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES”,- EDICIÓN EN ESPAÑOL
- EPPER – GOULD – SCHMIDT – MOORE - WEATHRFORD - " INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES " EN LA CIENCIA ADMINISTRATIVA - 5TA ED.- PEAESON – PRENTICE HALL
- Prof.: Msc. Julio Rito.. – “PROBLEMAS RESUELTOS DE **TEORÍA DE COLAS**.
- <http://es.wikipedia.or>