REPUBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA
MINISTERIO DEL PODER POPULAR PARA LA EDUCACION UNIVERSITARIA, CIENCIA, TECNOLOGIA E INNOVACION
INSTITUTO UNIVERSITARIO DE TECNOLOGIA PARA LA INFORMATICA
I.U.T.E.P.I
VALENCIA EDO. CARABOBO

GUIA METODO SIMPLEX

Para resolver ejercicio utilizando el método simplex. Este método simplex consiste en transformar el problema original en un problema equivalente que tenga una solución básica factible inicial, y luego ir mejorando esa solución mediante operaciones elementales sobre las filas de una tabla que representa el sistema de restricciones. El proceso termina cuando se alcanza una solución óptima o se detecta que el problema es no acotado o incompatible.

Ejemplos;
Problema 1
Dado

$$Z_{[MIN]} = 2X + Y$$

Sujeto a:

$$X + Y \leq 10$$
$$X + 2Y \leq 12$$
$$X \leq 9$$
$$X, Y \leq 1\ ;\ \ S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Resolver problema de programación Lineal mediante el método simplex, primero debemos expresar las restricciones en forma estándar, es decir, igualando a cero el lado derecho de las desigualdades. Para ello, introducimos variables de holgura S_1, S_2 y S_3 que representan la diferencia entre el lado izquierdo y el derecho de cada restricción. Así, el problema queda como:

$$Z - 2X - Y = 0$$

Sujeto a:

$$X + Y + S_1 = 10$$
$$X + 2Y + S_2 = 12$$
$$X + S_3 = 9$$
$$X, Y \leq 1\ ;\ \ S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

Luego, construimos la tabla simplex inicial con los coeficientes de las variables en la función objetivo y las restricciones. La tabla tiene tantas filas como restricciones más una fila para la función objetivo, y tantas columnas como variables más una columna para el término independiente o solución (b) y la columna de las variable que salen (Holgura). La tabla inicial es:

	Z	X	Y	S_1	S_2	S_3	b
Z	**1**	**- 2**	**- 1**	**0**	**0**	**0**	**0**
S_1	**0**	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**10**
S_2	**0**	**1**	**2**	**0**	**1**	**0**	**12**
S_3	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**9**

El objetivo es minimizar **Z,** por lo que buscamos una solución factible que tenga el menor valor posible de Z. Para ello, aplicamos el siguiente algoritmo:

- **Paso 1:** Identificar la variable que entra en la base. Se trata de la variable no básica que tiene el coeficiente más negativo en la fila de **Z**. En este caso, es **X** con un coeficiente de **-2**.
- **Paso 2:** Identificar la variable que sale de la base. Se trata de la variable básica que tiene el menor cociente entre el término independiente y el coeficiente de la variable que entra en la base. En este caso, es **S_3** con un cociente de **9/1**.
- **Paso 3:** Realizar operaciones elementales de fila para obtener un uno en la posición del elemento pivote (la intersección entre la columna de la variable que entra y la fila de la variable que sale) y ceros en el resto de la columna. En este caso, multiplicamos la tercera fila por (2) y sumamos a la primera; además multiplicamos la tercera fila por (-1) y sumamos a la segunda y tercera fila. La nueva tabla es:

	Z	X	Y	S_1	S_2	S_3	b
Z	**1**	**0**	**- 1**	**0**	**0**	**2**	**18**
S_1	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**- 1**	**1**
S_2	**0**	**0**	**2**	**2**	**1**	**- 1**	**3**
X	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**9**

- **Paso 4:** Comprobar si se ha alcanzado la solución óptima. Si todos los coeficientes de la fila de **Z** son no negativos, entonces se ha encontrado la solución óptima. En caso contrario, volver al paso 1. En este caso, aún hay coeficientes negativos en la fila de **Z**, por lo que repetimos el algoritmo.

	Z	X	Y	S_1	S_2	S_3	b
Z	**1**	**0**	**- 1**	**0**	**0**	**2**	**18**
S_1	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**- 1**	**1**
S_2	**0**	**0**	**2**	**2**	**1**	**- 1**	**3**
X	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**9**

- **Paso 1:** Identificar la variable que entra en la base. Se trata de la variable no básica que tiene el coeficiente más negativo en la fila de **Z**. En este caso, es **Y** con un coeficiente de **-1**.
- **Paso 2:** Identificar la variable que sale de la base. Se trata de la variable básica que tiene el menor cociente entre el término independiente y el coeficiente de la variable que entra en la base. En este caso, es **S_1** con un cociente de **1/1**.

	Z	X	Y	S_1	S_2	S_3	b
Z	**1**	**0**	**- 1**	**0**	**0**	**2**	**18**
Y	**0**	**0**	**1**	**1**	**0**	**- 1**	**1**
S_2	**0**	**0**	**2**	**2**	**1**	**- 1**	**3**
X	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**9**

- **Paso 3:** Realizar operaciones elementales de fila para obtener un uno en la posición del elemento pivote (la intersección entre la columna de la variable que entra y la fila de la variable que sale (en este caso ya es 1) y ceros en el resto de la columna. En este caso, multiplicamos la segunda fila por uno y sumamos a la primera fila, además multiplicamos la segunda fila por (-2) y sumamos a la tercera fila. La nueva tabla es:

	Z	X	Y	S_1	S_2	S_3	b
Z	1	0	0	1	0	1	19
Y	0	0	1	1	0	- 1	1
S_2	0	0	0	0	1	2	1
X	0	1	0	0	0	1	9

- **Paso 5:** Repetir los pasos anteriores hasta obtener una tabla óptima. La tabla óptima es:

	Z	X	Y	S_1	S_2	S_3	b
Z	1	0	0	1	0	1	19
Y	0	0	1	1	0	- 1	1
S_2	0	0	0	0	1	2	1
X	0	1	0	0	0	1	9

Comprobación: En la función objeto

$$\boldsymbol{Z_{[MIN]} = 2X + Y}$$

Se tiene:

$$\boldsymbol{Z_{[MIN]} = 2(9) + 1 = 18 + 1 = 19}$$

Problema 2

En este caso, se plantea un problema que tiene cuatro variables y dos restricciones.

$$\boldsymbol{Z_{[MAX]} = 3X_1 + 4X_2 + 5X_3 + 6X_4}$$

sujeto a

$$\boldsymbol{2X_1 + X_2 + X_3 + 8X_4 = 6}$$
$$\boldsymbol{X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 \leq 4}$$
$$\boldsymbol{X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0}$$

Para aplicar el método simplex, se introducen dos variables de holgura, S_1 y S_2, que representan la diferencia entre el lado izquierdo y el lado derecho de cada restricción. Así, el problema equivalente queda:

$$\boldsymbol{Z - 3X_1 - 4X_2 - 5X_3 - 5X_4 = 0}$$

sujeto a

$$\boldsymbol{2X_1 + X_2 + X_3 + 8X_4 + S_1 = 6}$$
$$\boldsymbol{X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 + S_2 = 4}$$
$$\boldsymbol{X_1, X_2, X_3, X_4, S_1, S_1 \geq 0}$$

La solución básica factible inicial es (X_1, X_2, X_3, X_4, S_1, S_2) = (0, 0, 0, 0, 6, 4), con un valor de Z = 0. Se construye la tabla simplex correspondiente:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	b
Z	1	- 3	- 4	- 5	- 5	0	0	0
S_1	0	2	1	1	8	1	0	6
S_2	0	1	1	2	1	0	1	4

- **Paso 1:** Se observa que hay coeficientes negativos en la fila de **Z**, lo que indica que la solución no es óptima. Se elige la variable que entra a la base, que es aquella que tiene el coeficiente más negativo en la fila de **Z**. En este caso, hay un empate entre X_3 y X_4, así que se puede elegir cualquiera de las dos. Por ejemplo, se elige X_4.

- **Paso 2:** Ahora se determina la variable que sale de la base, que es aquella que tiene el menor cociente entre el término independiente y el coeficiente de la variable que entra en cada fila. En este caso, el menor cociente se da en la primera fila, con un valor de **6/8 = 0.75**. Por lo tanto, la variable que sale es X_5. Se realiza la operación elemental que consiste en dividir la primera fila por el coeficiente de X_4 (8) y restar a las demás filas el producto de esa fila por el coeficiente correspondiente de X_4. Así, se obtiene la siguiente tabla:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	b
Z	1	- 3	- 4	- 5	- 5	0	0	0
X_4	0	2	1	1	8	1	0	6
S_2	0	1	1	2	1	0	1	4

- **Paso 3:** Se realizan operaciones elementales de fila para obtener un uno en la posición del elemento pivote (la intersección entre la columna de la variable que entra y la fila de la variable que sale; la operación elemental que consiste en dividir la primera fila por el coeficiente de X_4 (8), se obtiene la siguiente tabla

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	b
Z	1	- 3	- 4	- 5	- 5	0	0	0
S_1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
S_2	0	1	1	2	1	0	1	4

- **Paso 4:** Se realizan la operaciones elementales para transformar en cero los restantes valores de la columna pivote correspondiente de X_4. En este caso, multiplicamos la segunda fila por cinco (5) y sumamos a la primera fila, además multiplicamos la segunda fila por (-1) y sumamos a la tercera fila. La nueva tabla es

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	b
Z	1	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{35}{8}$	0	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{15}{4}$
X_4	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
S_2	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	1	$\frac{13}{4}$

$$5(0)+1=1 \qquad 5\left(\frac{1}{4}\right)+(-3)=-\frac{7}{4} \qquad 5\left(\frac{1}{8}\right)+(-4)=-\frac{27}{8} \qquad 5\left(\frac{1}{8}\right)+(-5)=-\frac{35}{8}$$

$$5(1)+(-5)=0 \qquad 5\left(\frac{1}{8}\right)+(0)=\frac{5}{8} \qquad 5(0)+(0)=0 \qquad 5\left(\frac{3}{4}\right)+(0)=\frac{15}{4}$$

$$-1(0)+0=0 \qquad -1\left(\frac{1}{4}\right)+1=\frac{3}{4} \qquad -1\left(\frac{1}{8}\right)+1=\frac{7}{8} \qquad -1\left(\frac{1}{8}\right)+2=\frac{15}{8}$$

$$-1(1)+1=0 \qquad -1\left(\frac{1}{8}\right)+(0)=-\frac{1}{8} \qquad -1(0)+1=1 \qquad -1\left(\frac{3}{4}\right)+(4)=\frac{13}{4}$$

- **Paso 5:** Se repite el proceso hasta que no haya coeficientes negativos en la fila de **Z** o hasta que no se pueda mejorar la solución. En este caso, se puede seguir mejorando la solución eligiendo como variable que entra a la base a $\mathbf{X_3}$ y como variable que sale a la base a $\mathbf{S_2}$. Se obtiene la siguiente tabla:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	b
Z	1	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{35}{8}$	0	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{15}{4}$
X_4	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
X_3	0	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	$\frac{15}{8}$	0	$-\frac{1}{8}$	1	$\frac{13}{4}$

- **Paso 3:** Se realizan operaciones elementales de fila para obtener un uno (1) en la posición del elemento pivote (la intersección entre la columna de la variable que entra y la fila de la variable que sale; la operación elemental que consiste en dividir la tercera fila por el coeficiente de $\mathbf{X_3}$ $(\frac{15}{8})$, se obtiene la siguiente tabla

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	b
Z	1	$-\frac{7}{4}$	$-\frac{27}{8}$	$-\frac{35}{8}$	0	$\frac{5}{8}$	0	$\frac{15}{4}$
X_4	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{3}{4}$
X_3	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{15}$	1	0	$-\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{26}{15}$

- **Paso 4:** Se realizan la operaciones elementales para transformar en cero los restantes valores de la columna pivote correspondiente de $\mathbf{X_3}$. En este caso, multiplicamos la tercera fila por $(\frac{35}{8})$ y sumamos a la primera fila, además multiplicamos la tercera fila por $(-\frac{1}{8})$ y sumamos a la segunda fila. La nueva tabla es

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	b
Z	1	$\frac{13}{8}$	$-\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{79}{15}$
X_4	0	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{15}$	0	1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$
X_3	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{15}$	1	0	$-\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{26}{15}$

$$\frac{35}{8}(0)+1=1 \qquad \frac{35}{8}\left(\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{7}{4}\right)=\frac{13}{8} \qquad \frac{35}{8}\left(\frac{7}{15}\right)+\left(-\frac{27}{8}\right)=-\frac{4}{3} \qquad \frac{35}{8}(1)+\left(-\frac{35}{8}\right)=0$$

$$\frac{35}{8}(0)+0=0 \qquad \frac{35}{8}\left(-\frac{1}{15}\right)+\frac{5}{8}=\frac{1}{3} \qquad \frac{35}{8}\left(\frac{8}{15}\right)+(0)=\frac{7}{3} \qquad \frac{35}{8}\left(\frac{26}{15}\right)+\left(\frac{15}{4}\right)=\frac{79}{15}$$

$$-\frac{1}{8}(0)+0=0 \qquad -\frac{1}{8}\left(\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{4}=\frac{7}{40} \qquad -\frac{1}{8}\left(\frac{7}{15}\right)+\frac{1}{8}=\frac{1}{15} \qquad -\frac{1}{8}(1)+\frac{1}{8}=0$$

$$-\frac{1}{8}(0)+1=1 \qquad -\frac{1}{8}\left(-\frac{1}{15}\right)+\frac{1}{8}=\frac{2}{15} \qquad -\frac{1}{8}\left(\frac{8}{15}\right)+(0)=-\frac{1}{15} \qquad -\frac{1}{8}\left(\frac{26}{15}\right)+\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{8}{15}$$

- **Paso 5:** Se repite el proceso hasta que no haya coeficientes negativos en la fila de **Z** o hasta que no se pueda mejorar la solución. En este caso, se puede seguir mejorando la solución eligiendo como variable que entra a la base a $\mathbf{X_2}$ y como variable que sale a la base a $\mathbf{X_3}$. Se obtiene la siguiente tabla:

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	b
Z	1	$\frac{13}{8}$	$-\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{79}{15}$
X_4	0	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{15}$	0	1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$
X_2	0	$\frac{3}{5}$	$\frac{7}{15}$	1	0	$-\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{26}{15}$

- **Paso 3:** Se realizan operaciones elementales de fila para obtener un uno (1) en la posición del elemento pivote (la intersección entre la columna de la variable que entra y la fila de la variable que sale; la operación elemental que consiste en dividir la tercera fila por el coeficiente de $\mathbf{X_2}$ $(\frac{7}{15})$, se obtiene la siguiente tabla

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	b
Z	1	$\frac{13}{8}$	$-\frac{4}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{79}{15}$
X_4	0	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{15}$	0	1	$\frac{2}{15}$	$-\frac{1}{15}$	$\frac{8}{15}$
X_2	0	$\frac{9}{7}$	1	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{26}{7}$

- **Paso 4:** Se realizan la operaciones elementales para transformar en cero los restantes valores de la columna pivote correspondiente de $\mathbf{X_2}$. En este caso, multiplicamos la tercera fila por $(\frac{4}{3})$ y sumamos a la primera fila, además multiplicamos la tercera fila por $(-\frac{1}{15})$ y sumamos a la segunda fila. La nueva tabla es

	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	S_1	S_2	b
Z	1	$\frac{187}{56}$	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{7}$	$\frac{27}{7}$	$\frac{341}{45}$
X_4	0	$\frac{5}{56}$	0	$-\frac{1}{15}$	1	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{105}$	$\frac{2}{7}$
X_2	0	$\frac{9}{7}$	1	1	0	$-\frac{1}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{26}{7}$

$$\frac{4}{3}(0)+1=1 \qquad \frac{4}{3}\left(\frac{9}{7}\right)+\left(\frac{13}{8}\right)=\frac{187}{56} \qquad \frac{4}{3}(1)+\left(-\frac{4}{3}\right)=0 \qquad \frac{4}{3}(1)+(0)=\frac{4}{3}$$

$$\frac{4}{3}(0)+0=0 \qquad \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{3}=\frac{1}{7} \qquad \frac{4}{3}\left(\frac{8}{7}\right)+\left(\frac{7}{3}\right)=\frac{27}{7} \qquad \frac{4}{3}\left(\frac{26}{15}\right)+\left(\frac{79}{15}\right)=\frac{341}{45}$$

$$-\frac{1}{15}(0)+0=0 \qquad -\frac{1}{15}\left(\frac{9}{7}\right)+\frac{7}{40}=\frac{5}{56} \qquad -\frac{1}{15}(1)+\frac{1}{15}=0 \qquad -\frac{1}{15}(1)+0=-\frac{1}{15}$$

$$-\frac{1}{15}(0)+1=1 \qquad -\frac{1}{15}\left(-\frac{1}{7}\right)+\frac{2}{15}=\frac{1}{7} \qquad -\frac{1}{15}\left(\frac{8}{7}\right)+\left(\frac{1}{15}\right)=-\frac{1}{105} \qquad -\frac{1}{15}\left(\frac{26}{7}\right)+\left(\frac{8}{15}\right)=\frac{2}{7}$$

Finalmente, se llega a una solución óptima eligiendo como variable que entra a la base a $\mathbf{X_2}$ y como variable que sale a la base a $\mathbf{S_1}$**.** Se obtiene la siguiente tabla: