

1

LA INTEGRAL INDEFINIDA

JOHANN BERNOULLI
(1667–1748)

1.1 LA ANTIDERIVADA

1.2 INTEGRACION POR SUSTITUCION

1.3 INTEGRACION POR PARTES

JOHANN BERNOULLI
(1667 - 1748)



JOHANN BERNOULLI nació en Basilea, Suiza, en 1667. Estudió medicina en la universidad de Basilea, donde se graduó en 1694, con una tesis donde aplica la matemática a los movimientos musculares. Fue el tronco principal de una familia, única en la historia, que ha producido eminentes matemáticos durante el siglo XVIII. Por lo menos 9 miembros de esta familia, repartidos en tres generaciones, fueron matemáticos de primera línea. En la primera generación se encuentran Johann I (del cual nos estamos ocupando) y sus hermanos Jacob I y Nicolaus I. En la segunda generación tenemos a Nicolaus II, hijo de Nicolaus I; a Nicolaus III, Daniel y Johann II, hijos de Johann I. En la tercera generación se cuentan Johann III y Jacob II, hijos de Johann II. El gran Leonardo Euler fue amigo de infancia de Daniel. Ambos recibieron lecciones de matemáticas de Johann I, quien también fue maestro de Guillaume G. A. de L'Hôpital.

ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

Durante la vida de Johann Bernoulli, en América y en el mundo sucedieron los siguientes hechos notables. En 1661, el rey francés Luis XIV inicia la construcción del palacio de Versalles, a donde se muda con su corte en 1682. En este mismo año, el cuáquero William Penn funda la ciudad de Filadelfia. En 1687, Isaac Newton publicó una de las obras científicas más grandes producidas por la humanidad "**Principios Matemáticos de la Filosofía Natural**". Pocos años antes, Newton y Leibniz ya habían inventado el Cálculo. En 1701 se funda la Universidad de Yale, en New Haven, Connecticut. En 1705, el inglés Edmund Halley (1656–1742) dió a conocer el famoso cometa que ahora lleva su nombre. En 1714 el físico holandés Gabriel Daniel Fahrenheit (1686–1736) inventó el termómetro de mercurio.

SECCION 1.1
LA ANTIDERIVADA

Iniciamos esta sección haciendo una breve introducción al concepto de diferencial. Este tema es tratado en forma más extensa en nuestro texto de Cálculo Diferencial, con el cual el lector debe estar familiarizado.

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable. Según la notación de Leibnitz, el símbolo $\frac{dy}{dx}$ representa a la derivada de y respecto a x . El concepto de diferencial da significado propio tanto a dx como a dy en tal forma que $\frac{dy}{dx}$ puede ser vista como un cociente de dy sobre dx .

Si Δx es cualquier incremento de x , entonces

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

es el correspondiente incremento de y . Sabemos que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$

Luego, si Δx es pequeño, la razón incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es una aproximación a la derivada $f'(x)$. Este hecho lo expresamos así $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$. De aquí obtenemos:

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x \quad (1)$$

Esta expresión nos dice que cuando Δx es pequeño, la expresión $f'(x)\Delta x$ está próximo al incremento de Δy . Por este motivo es conveniente fijar la atención en esta expresión. A continuación le damos un nombre y nos ocupamos de ella.

DEFINICION . Sea $y = f(x)$ una función diferenciable y Δx un incremento de x . Llamaremos **diferencial de y** , que se denota con dy ó df , a

$$dy = f'(x) \Delta x$$

Notar que dy es función de dos variables, x y Δx .

EJEMPLO 1. Si $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$, hallar
a. dy **b.** Evaluar dy cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0.03$

Solución

a. $dy = \frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + x + 3) \Delta x = (3x^2 - 4x + 1)\Delta x$

b. Cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0.03$, se tiene

$$dy = [3(2)(2)^2 - 4(2) + 1]0.03 = 0.15$$

Si $y = x$ entonces, $dy = dx$. Además, $dy = \frac{dx}{dx} \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Luego,

$$dx = \Delta x$$

Esta igualdad nos dice que la diferencial de la variable independiente es igual al incremento. Gracias a este resultado casi siempre usaremos dx en lugar de Δx . Así, la expresión para la diferencial de $y = f(x)$ se escribe así:

$$dy = f'(x) dx$$

En esta nueva expresión si $dx \neq 0$ dividimos entre dx para obtener $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Esto nos dice que el símbolo $\frac{dy}{dx}$, que es derivada de y respecto a x , se le puede pensar también como el cociente de la diferencial dy entre la diferencial dx .

EJEMPLO 2.

La diferencial de $y = \sqrt{x+1}$ es

$$dy = \frac{d}{dx}(\sqrt{x+1}) dx = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$$

TEOREMA 1.1

Sean u y v funciones diferenciables de x si c una constante, entonces

1. $dc = 0$

2. $d(cu) = c du$

3. $d(u \pm v) = du \pm dv$

4. $d(uv) = u dv + v du$

5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$

6. $du^n = nu^{n-1} du$

Demostración

Cada una de estas igualdades viene de las correspondientes fórmulas de derivación. Aquí probaremos sólo (4), dejando las otras como ejercicio.

4. Sabemos por definición que:

$$du = \frac{du}{dx} dx \quad \text{y} \quad dv = \frac{dv}{dx} dx$$

Por otro lado, por la regla de la derivada de un producto, sabemos que:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Luego,

$$d(uv) = \frac{d}{dx}(uv) dx = \left(u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \right) dx = u \frac{dv}{dx} dx + v \frac{du}{dx} dx = u dv + v du$$

ANTIDERIVADA

La operación inversa de la derivación se llama **integración**. Mediante la integración encontraremos la función cuya derivada es dada. La función que se encuentra se llama **antiderivada** o **integral indefinida**.

Durante el resto de curso nos ocuparemos de las integrales y sus aplicaciones. Por esta razón, a esta parte de la materia, se la llama **Cálculo Integral**.

DEFINICION. Una función F es una **antiderivada o una primitiva** de la función f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$

EJEMPLO 3. Las funciones siguientes son antiderivadas de $f(x) = 3x^2$:

$$F(x) = x^3 + 1 \quad \text{y} \quad G(x) = x^3 - 5$$

En efecto:

$$F'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2 = f(x) \quad \text{y} \quad G'(x) = 3x^2 - 0 = 3x^2 = f(x)$$

Observar que si C es una constante cualquiera, entonces $H(x) = x^3 + C$ es una antiderivada de $f(x) = 3x^2$, ya que

$$H'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2 = f(x)$$

El siguiente teorema nos dice que cualquier antiderivada se obtiene sumando una constante a una antiderivada conocida.

TEOREMA 1.2 Forma General de la Antiderivada

Si F es una **antiderivada de f en el intervalo I** , entonces

G es una **antiderivada de f en I** $\Leftrightarrow \exists C$, constante, tal que

$$G(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in I$$

Demostración

(\Rightarrow) Sea $H(x) = G(x) - F(x)$. Tenemos que:

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

Sabemos que si la derivada de una función es idénticamente 0 en un intervalo, entonces la función es una función constante. Esto es, existe una constante C tal que

$$H(x) = C, \quad \forall x \in I$$

Luego,

$$G(x) - F(x) = C, \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad G(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in I$$

(\Leftarrow) $G(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Luego, G es una antiderivada de f en I .

NOTACION PARA LA ANTIDERIVADA

El teorema anterior nos dice lo siguiente:

1. Si una función f tiene una antiderivada, entonces tiene una familia muy numerosa de ellas.
2. Si F es una antiderivada conocida de f , entonces cualquier otro miembro de la familia de antiderivadas de f se obtiene a partir de F agregándole una constante adecuada, $F(x) + C$.

A la familia $F(x) + C$ de antiderivadas de f la llamaremos la **antiderivada general de f o integral indefinida de la función f** , y la denotaremos así:

$$\int f(x) dx .$$

Esto es, si F es una antiderivada de f en un intervalo I , entonces

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ donde } C \text{ es una constante.} \quad (1)$$

El símbolo \int es llamado **símbolo de la integral**. Este símbolo se obtuvo alargando la letra S . Esto es debido a que, como veremos más adelante, la integral está emparentada con la suma.

En $\int f(x) dx$, la función f es el **integrand**. El símbolo dx se usa para indicar que x es la variable de integración. Esta variable puede cambiarse por cualquier otra. Así, la expresión (1) se escribe también del modo siguiente:

$$\int f(t) dt = F(t) + C \quad \text{ó} \quad \int f(u) du = F(u) + C$$

La **integración** es el proceso de hallar la **integral indefinida** o sea la antiderivada general. De la discusión anterior obtenemos:

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \quad (3) \quad \int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

El símbolo dx que acompaña al integrando lo podemos interpretar también la diferencial de x . Esto no es una coincidencia. La expresión (1) puede interpretarse en términos de diferenciales. En efecto, se tiene que:

$$dF = F'(x) dx = f(x) dx$$

Luego, (1) puede escribirse así:

$$\int dF = F(x) + C \quad (4)$$

EJEMPLO 4. Hallar $\int 2x \, dx$

Solución

La función $F(x) = x^2$ es una antiderivada de $2x$, ya que $F'(x) = 2x$. Luego,

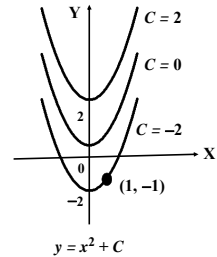
$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$

SIGNIFICADO DE LA CONSTANTE C

La integral indefinida representa a toda la familia de las antiderivadas del integrando. Cada valor que asignemos a la constante de integración, nos proporciona un miembro de la familia.

Geoméricamente esta familia está representada por un conjunto de curvas paralelas obtenidas por traslación vertical del gráfico de una de las antiderivadas.

En la figura siguiente se han graficado algunos miembros de la familia $y = x^2 + C$, que es la integral indefinida del ejemplo anterior.



EJEMPLO 5. Hallar una función G cuya tangente tenga como pendiente $2x$ para cada x , y que su gráfico pase por el punto $(1, -1)$.

Solución

La pendiente de G está dada por su derivada. Luego, se debe cumplir que

$$G'(x) = 2x$$

Esto nos dice que G es una antiderivada de $2x$. Por el ejemplo anterior sabemos que $G(x) = x^2 + C$. Como la gráfica de G pasa por $(1, -1)$, tenemos:

$$-1 = G(1) = 1^2 + C$$

Luego, $C = -2$ y $G(x) = x^2 - 2$.

La gráfica de esta función aparece en la figura anterior.

LINEALIDAD DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

TEOREMA 1.3 Si a es una constante, entonces

$$1. \int a f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx$$

$$2. \int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

Demostración

$$1. \frac{d}{dx} \left(a \int f(x) dx \right) = a \frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = af(x)$$

$$2. \frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \pm \int g(x) dx \right] = \frac{d}{dx} \int f(x) dx \pm \frac{d}{dx} \int g(x) dx = f(x) \pm g(x)$$

Presentamos el primer grupo básico de integrales indefinidas. Las dos primeras fórmulas fueron probadas en el teorema anterior. La validez de estas integrales descanza en la fórmula de la derivada dada a la derecha

INTGRALES BASICAS. TABLA I.

$$1. \int af(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$2. \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

INTEGRAL

DERIVADA

$$3. \int 0 du = C \quad \frac{d}{du} [C] = 0$$

$$4. \int du = u + C \quad \frac{d}{du} [u] = 1$$

$$5. \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C, n \neq -1 \quad \frac{d}{du} \left[\frac{1}{n+1} u^{n+1} \right] = u^n$$

$$6. \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C \quad \frac{d}{du} [\ln |u|] = \frac{1}{u}$$

$$7. \int e^u du = e^u + C \quad \frac{d}{du} [e^u] = e^u$$

$$8. \int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C \quad \frac{d}{du} \left[\frac{1}{\ln a} a^u \right] = a^u$$

$$9. \int \operatorname{sen} u dx = -\cos u + C \quad \frac{d}{du} [-\cos u] = \operatorname{sen} u$$

$$10. \int \cos u du = \operatorname{sen} u + C \quad \frac{d}{du} [\operatorname{sen} u] = \cos u$$

$$11. \int \sec^2 u du = \tan u + C \quad \frac{d}{du} [\tan u] = \sec^2 u$$

$$12. \int \operatorname{cosec}^2 u du = -\cot u + C \quad \frac{d}{dx} [-\cot u] = \operatorname{cosec}^2 u$$

$$13. \int \sec u \tan u \, du = \sec u + C \quad \frac{d}{du} [\sec u] = \sec u \tan u$$

$$14. \int \operatorname{cosec} u \cot u \, du = -\operatorname{cosec} u + C \quad \frac{d}{du} [-\operatorname{cosec} u] = \operatorname{cosec} u \cot u$$

EJEMPLO 6. De acuerdo a la fórmula 5 (regla de la potencia) con $u = x$ ó $u = t$:

$$a. \int x^4 dx = \frac{1}{4+1} x^{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C \quad (n = 4)$$

$$b. \int \frac{1}{t^3} dt = \int t^{-3} dt = \frac{1}{-3+1} t^{-3+1} + C = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2t^2} \quad (n = -3)$$

$$c. \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} dx = \frac{1}{-1/2+1} x^{-1/2+1} + C = 2x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (n = -1/2)$$

EJEMPLO 7.

$$a. \int 3x^2 dx = 3 \int x^2 dx = 3 \left(\frac{1}{3} x^3 + C_1 \right) = x^3 + 3C_1 = x^3 + C. \quad \text{por 1, 5 y } C = 3C_1$$

$$b. \int 8e^x dx = 8 \int e^x dx = 8(e^x + C_1) = 8e^x + 8C_1 = 8e^x + C. \quad \text{por 1, 7 y } C = 8C_1$$

$$c. \int \frac{5}{x} dx = 5 \int \frac{1}{x} dx = 5(\ln |x| + C_1) = 5 \ln |x| + 5C_1 = 5 \ln |x| + C. \quad \text{por 1, 6, } C = 5C_1$$

EJEMPLO 8.

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt[4]{t}} - 2^t \right) dt = \int (3t^{-1/4} - 2^t) dt = 3 \int t^{-1/4} dt - \int 2^t dt \quad \text{por 1 y 2}$$

$$= 3 \frac{t^{-1/4+1}}{-1/4+1} + C_1 - \frac{2^t}{\ln 2} + C_2 \quad \text{por 5 y 8}$$

$$= 3 \frac{4}{3} t^{3/4} - \frac{2^t}{\ln 2} + C_1 + C_2$$

$$= 4t^{3/4} - \frac{2^t}{\ln 2} + C, \quad C = C_1 + C_2$$

Se demuestra fácilmente por inducción, que la fórmula 2 es válida para cualquier número $n \geq 2$ de sumandos,

EJEMPLO 9.

$$\begin{aligned}
 \int \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 dx &= \int \left(x^2 - 4 + \frac{4}{x^2}\right) dx = \int x^2 dx - 4 \int dx + 4 \int x^{-2} dx \\
 &= \frac{x^{2+1}}{2+1} + C_1 - 4(x + C_2) + 4 \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C_2 \right) \\
 &= \frac{x^3}{3} + C_1 - 4(x + C_2) + 4 \left(-\frac{1}{x} + C_3 \right) \\
 &= \frac{x^3}{3} - 4x - \frac{4}{x} + C. \quad (C = C_1 - 4C_2 + 4C_3)
 \end{aligned}$$

NOTA. De aquí en adelante sólo escribiremos la constante C más general y no las parciales C_1, C_2 , etc.

EJEMPLO 10. Hallar $\int \frac{x^3 - x + 4}{x^2} dx$

Solución

El integrando es una función racional impropia. Para casos como este, antes de integrar se divide el numerador entre el denominador.

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 - x + 4}{x^2} dx &= \int \left(x - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right) dx = \int x dx - \int x^{-1} dx + 4 \int x^{-2} dx \\
 &= \frac{x^2}{2} - \ln|x| + 4 \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{4}{x} + C
 \end{aligned}$$

EJEMPLO 11. Hallar $\int (\tan u - \cot u)^2 du$

Solución

$$\begin{aligned}
 \int (\tan u - \cot u)^2 du &= \int (\tan^2 u - 2 \tan u \cot u + \cot^2 u) du \\
 &= \int ((\sec^2 u - 1) - 2 + (\operatorname{cosec}^2 u - 1)) du \\
 &= \int (\sec^2 u - 4 + \operatorname{cosec}^2 u) du \\
 &= \int \sec^2 u du - \int 4 du + \int \operatorname{cosec}^2 u du \\
 &= \tan u - \cot u - 4u + C
 \end{aligned}$$

SABOR A ECUACIONES DIFERENCIALES

Nos planteamos el problema de hallar una función $y = F(x)$ de la que se conoce su derivada $\frac{dy}{dx} = f(x)$ y un punto (x_0, y_0) en la gráfica de F . o sea $F(x_0) = y_0$. Este último requerimiento recibe el nombre de **condición inicial** y se acostumbra escribirle así: $y(x_0) = y_0$. En resumen, buscamos la solución de la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0.$$

Esta ecuación es un caso simple de una **ecuación diferencial**. Una ecuación diferencial es una ecuación donde intervienen derivadas. Las ecuaciones diferenciales constituyen uno de los temas más importantes de la Matemática, tanto desde el punto de vista teórico como aplicado. Aquí apenas estamos dando un pequeño paso dentro de este campo. Más adelante retomaremos este tema.

EJEMPLO 12. Hallar la curva cuya pendiente en cualquier punto (x, y) es $-4x^3$ y pasa por el punto $(-1, 2)$.

Solución

La pendiente de una una curva está dada por su derivada. Luego, debemos resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = -4x^3, \text{ con condición inicial } y(-1) = 2$$

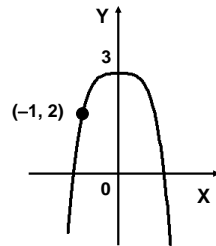
Paso 1. Resolvemos $\frac{dy}{dx} = -4x^3$:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -4x^3 &\Rightarrow y = \int -4x^3 dx = -4 \int x^3 dx \\ &= -4 \frac{x^4}{4} + C = -x^4 + C \Rightarrow y = -x^4 + C \end{aligned}$$

Paso 2. Hallamos el valor de C .

$$y(-1) = 2 \Rightarrow 2 = -(-1)^2 + C \Rightarrow C = 3$$

La curva buscada es $y = -x^4 + 3$



MOVIMIENTO RECTILINEO

Sabemos que si $s = f(t)$ es la función posición de un móvil que se mueve a lo largo de una recta, entonces:

$$\text{Su velocidad es } v(t) = \frac{ds}{dt} \text{ y su aceleración, } a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

En nuestro curso anterior nos proporcionaban la función posición y nos pedían encontrar la velocidad y la aceleración. Ahora resolvemos el problema recíproco: Dada la velocidad o la aceleración, encontramos la función posición. Sin duda que

esta vez tenemos que resolver ecuaciones diferenciales. Si tenemos la aceleración, integraremos dos veces. Con la primera integral, hallamos la velocidad, y con la segunda, la función posición. Como hay que integrar dos veces, precisaremos dos valores iniciales, una para la velocidad y la otra para función posición.

EJEMPLO 13. Un objeto se mueve a lo largo de una recta con aceleración

$$a(t) = 2\cos t + 6t$$

Su velocidad inicial es $v(0) = -8$ y su posición inicial, $s(0) = -5$.

Hallar la función posición.

Solución

Paso 1. Hallamos la velocidad $v(t)$.

$$\frac{dv}{dt} = a(t) \Rightarrow v(t) = \int a(t) dt = \int (2\cos t + 6t) dt = 2\sin t + 3t^2 + C_1$$

$$v(0) = -8 \Rightarrow 2\sin 0 + 3(0)^2 + C_1 = -8 \Rightarrow C_1 = -8. \text{ Luego,}$$

$$v(t) = 2\sin t + 3t^2 - 8$$

Paso 2. Hallamos la función desplazamiento $s(t)$.

$$\frac{ds}{dt} = v(t) \Rightarrow s(t) = \int v(t) dt = \int (2\sin t + 3t^2 - 8) dt = -2\cos t + t^3 - 8t + C_2$$

$$s(0) = -5 \Rightarrow -2\cos 0 + (0)^3 - 8(0) + C_2 = -5 \Rightarrow C_2 = -3. \text{ Luego,}$$

$$s(t) = -2\sin t + t^3 - 8t - 3$$

PROBLEMAS RESUELTOS 1.1

PROBLEMA 1. Hallar $\int \frac{dx}{1 + \cos x}$

Solución

Multiplicamos y dividimos por $1 - \cos x$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \cos x} &= \int \frac{(1 - \cos x) dx}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)} = \int \frac{1 - \cos x}{1 - \cos^2 x} dx \\ &= \int \frac{1 - \cos x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx \\ &= \int \frac{1}{\sin^2 x} dx - \int \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x} dx \\ &= \int \operatorname{cosec}^2 x dx - \int \cot x \operatorname{cosec} x dx \\ &= -\cot x + \operatorname{cosec} x + C \end{aligned}$$

PROBLEMA 2. La población de cierta ciudad, después de t meses, está creciendo al ritmo de $6 + 7t^{3/4}$ personas por mes. Si la población actual es de 12,000 habitantes ¿cuál será la población después de 16 meses?

Solución

Sea $P(t)$ la población después de t meses. El ritmo de crecimiento es la derivada $P'(t)$. Esto es,

$$P'(t) = 6 + 7t^{3/4}$$

Luego,

$$P(t) = \int (6 + 7t^{3/4}) dt = 6 \int dt + 7 \int t^{3/4} dt = 6t + 4t^{7/4} + C$$

La población actual, cuando $t = 0$, es $P(0) = 12,000$. Luego,

$$12,000 = P(0) = 6(0) + 4(0)^{7/4} + C \Rightarrow C = 12,000$$

Por lo tanto,

$$P(t) = 6t + 4t^{7/4} + 12,000$$

Por último, la población después de 16 meses es

$$P(16) = 6(16) + 4(16)^{7/4} + 12,000 = 12,608 \text{ habitantes}$$

PROBLEMA 3. Hallar la curva $y = f(x)$ que cumple las dos condiciones:

a. $\frac{d^2y}{dx^2} = 15\sqrt{x}$

b. $y = 8x - 9$ es tangente a la curva en el punto donde $x = 1$.

Solución

Resolver la ecuación diferencial a. Tenemos que determinar dos condiciones iniciales.

La pendiente de la recta tangente es 8. Pero, esta misma pendiente es la derivada de la curva en $x = 1$, Luego, $y'(1) = 8$

Por otro lado, la ordenada del punto de tangencia es $y = 8(1) - 9 = -1$. Luego, por estar este punto de tangencia en la curva, tenemos que $y(1) = -1$.

Ahora, resolvemos la ecuación

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 15\sqrt{x}, \text{ con condiciones iniciales, } y'(1) = 8 \text{ y } y(1) = -1$$

Bien,

$$y' = \int 15\sqrt{x} dx = 15 \int x^{1/2} dx = 15 \left(\frac{2}{3} \right) x^{3/2} = 10x^{3/2} + C_1$$

$$y'(1) = 8 \Rightarrow 10(1)^{3/2} + C_1 = 8 \Rightarrow C_1 = -2 \Rightarrow y' = 10x^{3/2} - 2$$

Además:

$$y' = 10x^{3/2} - 2 \Rightarrow y = \int (10x^{3/2} - 2) dx = 4x^{5/2} - 2x + C_2 \quad y$$

$$y(1) = -1 \Rightarrow 4(1)^{5/2} - 2(1) + C_2 = -1 \Rightarrow C_2 = -3$$

La curva buscada es $y = 4x^{5/2} - 2x - 3$

En economía, la palabra **marginal** es usada para referirse a la derivada. Así, si $R(x)$ es la función ingreso, el ingreso marginal es su derivada $R'(x)$.

PROBLEMA 4. El ingreso marginal de una compañía es $R'(x) = 18 - 0.02x$

- Hallar la función ingreso.
- Hallar la ecuación de demanda del producto que vende la compañía.

Solución

a. Tenemos que:

$$R(x) = \int R'(x) dx = \int (18 - 0.02x) dx = 18x - 0.01x^2 + C$$

Si no se vende ninguna unidad, el ingreso debe ser nulo. Esto es, $R(0) = 0$. De esta ecuación obtenemos que $C = 0$. Luego, la función ingreso es

$$R(x) = 18x - 0.01x^2$$

b. Una ecuación de demanda es una ecuación que relaciona la cantidad demandada x de un producto con el precio del mismo. Puede venir en dos formas:

- Función demanda: $x = D(p)$
- Función precio: $p = f(x)$

Si el precio de cada unidad es p , entonces el ingreso es $R(x) = px$.

En nuestro caso tenemos que:

$$18x - 0.01x^2 = px \Rightarrow (18 - 0.01x)x = px \Rightarrow 18 - 0.01x = p$$

En consecuencia, la ecuación de demanda es

$$p = 18 - 0.01x$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.1

En los problemas del 1 al 34 hallar la integral indefinida indicada.

$$1. \int 5 dx \quad \text{Rpta. } 5x + C \quad 2. \int x^8 dx \quad \text{Rpta. } \frac{1}{9}x^9 + C$$

$$3. \int 3x^{-4} dx \quad \text{Rpta. } -\frac{1}{x^3} + C \quad 4. \int \sqrt[3]{t} dt \quad \text{Rpta. } \frac{3}{4}t^{4/3} + C$$

$$5. \int z \ln 2 \, dz \quad \text{Rpta. } \frac{\ln 2}{2} z^2 + C \quad 6. \int \frac{dx}{x^2} \quad \text{Rpta. } -\frac{1}{x} + C$$

$$7. \int (4u^5 - 5u^4) \, du \quad \text{Rpta. } \frac{2}{3}u^6 - u^5 + C$$

$$8. \int (r-2)^2 \, dr \quad \text{Rpta. } \frac{r^3}{3} - 2r^2 + 4r + C$$

$$9. \int (u^2 + 3u + 5) \, du \quad \text{Rpta. } \frac{u^3}{3} + \frac{3u^2}{2} + 5u + C$$

$$10. \int (1 + x + x^2 + x^3) \, dx \quad \text{Rpta. } x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C$$

$$11. \int \left(\frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \sqrt{z} \right) \, dz \quad \text{Rpta. } \ln |z| - \frac{3}{z} + \frac{2}{3}z^{3/2} + C$$

$$12. \int (x+3)(x-1) \, dx \quad \text{Rpta. } \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C$$

$$13. \int \left(t + \frac{1}{t} \right)^2 \, dt \quad \text{Rpta. } \frac{1}{3}t^3 + 2t - \frac{1}{t} + C$$

$$14. \int \left(\frac{1}{x} - x \right)^3 \, dx \quad \text{Rpta. } -\frac{1}{2x^2} - 3\ln|x| + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + C$$

$$15. \int (x^{2/3} - \sqrt{x}) \, dx \quad \text{Rpta. } \frac{3}{5}x^{5/3} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C$$

$$16. \int \sqrt{x}(x^2 - 2x) \, dx \quad \text{Rpta. } \frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{4}{5}x^{5/2} + C$$

$$17. \int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \, dx \quad \text{Rpta. } \frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln|x| + C$$

$$18. \int \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} \, dx \quad \text{Rpta. } x - \ln|x| + \frac{2}{x} + C$$

$$19. \int \left(\frac{1+x}{x} \right)^2 \, dx \quad \text{Rpta. } -\frac{1}{x} + 2\ln|x| + x + C$$

$$20. \int \frac{e^{x+2}}{e^{x+1}} \, dx \quad \text{Rpta. } ex + C$$

$$21. \int \frac{y^2 - y^3 e^y + \sqrt{y}}{y^3} dy$$

$$Rpta. \ln |y| - e^y - \frac{2}{3} y^{-3/2} + C$$

$$22. \int \frac{(t-1)^2}{t\sqrt{t}} dt$$

$$Rpta. \frac{2}{3} t^{3/2} - 4t^{1/2} - 2t^{-1/2} + C$$

$$23. \int \frac{\sqrt{x} - x\sqrt{x}}{x^2} dx$$

$$Rpta. -\frac{2}{\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + C$$

$$24. \int x^{-2} (8x^5 - 6x^4 - x^{-1}) dx$$

$$Rpta. 2x^4 - 2x^3 + \frac{1}{2x^2} + C$$

$$25. \int e^{4 \ln x} dx$$

$$Rpta. \frac{1}{5} x^5 + C$$

$$26. \int \frac{\ln x^4}{\ln x} dx$$

$$Rpta. 4x + C$$

$$27. \int \tan^2 \theta d\theta$$

$$Rpta. \tan \theta - \theta + C$$

$$28. \int \operatorname{cosec} x (\cot x + \operatorname{cosec} x) dx$$

$$Rpta. -\operatorname{cosec} x - \cot x + C$$

$$29. \int \tan x (\tan x + \sec x) dx$$

$$Rpta. \tan x - x + \sec x + C$$

$$30. \int (\tan x + \sec x)^2 dx$$

$$Rpta. 2\tan x + 2\sec x - x + C$$

$$31. \int \frac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t} dt$$

$$Rpta. \sec t + C$$

$$32. \int \frac{d\beta}{1 - \operatorname{sen} \beta}$$

$$Rpta. \tan \beta + \sec \beta + C$$

$$33. \int (2\cot^2 \alpha - 3\tan^2 \alpha) d\alpha$$

$$Rpta. \alpha - 2\cot \alpha - 3\tan \alpha + C$$

$$34. \int \frac{\operatorname{cosec} \phi}{\operatorname{cosec} \phi - \operatorname{sen} \phi} d\phi$$

$$Rpta. \tan \phi + C$$

En los problemas del 35 al 38 hallar la curva cuya pendiente en x es dada y que pasa por el punto indicado.

$$35. m(x) = 4x - 3, \quad (1, 2)$$

$$Rpta. y = 2x^2 - 3x + 3$$

36. $m(x) = x^2 - x, (0, -5)$

Rpta. $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 5$

37. $m(x) = 2e^x + 1, (0, -1)$

Rpta. $y = 2e^x + x - 3$

38. $m(x) = \frac{3}{x} - 1, (1, 5)$

Rpta. $y = 3\ln|x| - x + 6$

En los problemas del 39 al 42 resolver la ecuación con el valor inicial dado.

39. $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{4\sqrt{x}}, y(4) = -3$

Rpta. $y = \frac{\sqrt{x}}{2} - 4$

40. $\frac{dy}{d\theta} = \frac{4}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sin \theta, y(\pi/2) = -1$

Rpta. $y = \frac{4}{\pi}(\theta + \cos \theta) - 3$

41. $\frac{d^2y}{dx^2} = 35x\sqrt{x}, y'(1) = 12, y(1) = 5$

Rpta. $y = 4x^3\sqrt{x} - 2x + 3$

42. $\frac{d^2y}{dx^2} = \sin x + \cos x, y'(0) = 1, y(0) = -2$ Rpta. $y = -\sin x - \cos x + 2x - 1$

En los problemas 43 y 44, un móvil se desplaza de acuerdo a las condiciones dadas. Hallar la función desplazamiento.

43. $a(t) = \sin t + t, v(0) = 2, s(0) = 1$ Rpta. $s(t) = -\sin t + \frac{t^3}{2} + 3t + 1$

44. $a(t) = e^t + 28\sqrt[3]{t}, v(1) = e, s(1) = 2e$. Rpta. $s(t) = e^t + (9t^2)\sqrt[3]{t} - 21t + 12 + e$

45. Hallar la curva $y = f(x)$ tal que: **a.** $\frac{d^2y}{dx^2} = 12x - 4$ **b.** $y = 3x - 4$ es tangente a la curva en el punto donde $x = 1$. Rpta. $y = 2x^3 - 2x^2 + x - 2$

46. **(Movimiento rectilíneo)** Desde la orilla de la azotea de un edificio de altura h es lanzado un objeto hacia arriba con una velocidad inicial v_0 . Probar que la ecuación de desplazamiento del objeto es $s(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h$

47. **(Población)**. Después de t años la población de cierta ciudad crece al ritmo de $500 + 600\sqrt{t}$ por año. La población actual es de 120,000. ¿Cuál será la población dentro de 4 años? Rpta. 125,200

48. **(Función costo)**. El costo marginal de un producto es $C'(x) = 50 - 0.06x$.

Los costos fijos son de \$ 1,500. Hallar la función costo.

Sugerencia: Costos fijos = $C(0)$ Rpta. $C(x) = 50x - 0.03x^2 + 1,500$

49. **(Función costo)**. El costo marginal de cierta firma es

$C'(x) = 32 - 0.02x + 0.009x^2$. El costo de producir 100 unidades es de Bs. 18,000.