MATEMATICA I

ESCUELA: ADMINISTRACIÓN
ANÁLISIS DE SISTEMAS
ELECTRÓNICA

SEMESTRE: SEGUNDO.

A MODO DE PROLOGO

Coloquialmente el límite tiene un carácter estático que indica, extremo frontera o término; por otro lado en las matemáticas, es dinámico, tal que presenta la sensación de proximidad a un valor (finito o infinito).

Por otro lado, el estudio de la continuidad en un punto o intervalo yel cálculo de la derivada, se usa como herramientas fundamentales para la resolver problemas diversas áreas de la ciencia.

Mediante el cálculo del límite usando sus propiedades y el álgebra. Se puede obtener los valores de límites Indeterminados de tipo (∞/∞), (0/0), (∞-∞), (1^{∞}). Además de los límite de funciones definidas por tramos y los límites notables También su uso nos permite realizar intuitivamente la continuidad en un punto o en intervalos y la derivabilidad, Técnicas y Reglas para calcular derivadas. Derivadas de orden superior. La Regla de la Cadena Derivación implícita

Así mismo, la derivación constituye una de las operaciones de mayor importancia cuando se trata de funciones reales de variable real puesto que indica la tasa de variación de la función en un instante determinado, si ésta no es el tiempo Dimensiona, la importancia de aplicaciones matemáticas en derivadas de funciones para su futuro desempeño profesional

La Regla de L'Hôpital. Teoremas del Cálculo Diferencial: Rolle, LaGrange y Cauchy . Valores extremos de una función continua y los criterios de la primera y segunda derivada. Teoremas de concavidad y convexidad. La graficación de curvas y sus aplicaciones nos permite una actitud crítica y reflexiva al aplicar los diferentes Teoremas en la resolución de problemas propios de la profesión que desempeña para la resolución de problemas Cotidiano.

SIMÓN NATIVIDAD DÍAZ ESPÍN
LICENCIADO EN EDUCACIÓN
MENCIÓN MATEMÁTICA

Instituto Universitario de Tecnología para la Informática

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El límite es una expresión que señala la aproximación hacia un punto concreto de una sucesión o función, a medida que los parámetros de esa sucesión o función se acercan a determinado valor.

En el cálculo infinitesimal (real y matemático) este concepto se emplea con el fin de definir los conceptos fundamentales de continuidad, convergencia, derivación e integración, entre otros. Esto está relacionado con la distancia, en un espacio euclidiano, es la clase de conjunto abierto vinculado con la métrica, que permite definir la noción de límite rigurosamente.

La definición de límite ha evolucionado a lo largo de la historia desde la época clásica hasta la formulación métrica definida por Karl Theodor Weierstrass. Partiendo su investigación se pudo concluir, de forma estructura, la dificultad de entender por los alumnos del nivel secundario. Seguidamente Blázquez, S y Ortega, T. (2002) en el artículo: "Nueva definición de límite funcional", expresa una nueva definición de límite funcional mas sencilla.

Ellos consideran que, a nivel secundario es más facil definir el límite funcional de manera similar a como lo hizo D'Alambert considerando el límite como aproximación o tendencia.

Entonces, se propone la siguiente definición:

Sea $\boldsymbol{f}$ una función y $\boldsymbol{a}$ un número que pertenece a los números reales, el número $\boldsymbol{L}$ es el límite de la función en el punto $\boldsymbol{a}$, se escribe $\boldsymbol{lim_{x \to a}\, f(x) = L}$, si cuando $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$, siendo distinto de $\boldsymbol{a}$, sus imágenes es $\boldsymbol{f(x) = L}$ s

De este modo el tratamiento del límite finito en un punto se hace como "aproximación óptima".

Definición que se puede generalizar a otros espacios de las matemáticas.

Para fórmulas, el *límite* usualmente se emplea formas abreviadas mediante lim como en $lim_{a_x \to a}(a_x) = a$.

Así mismo, la derivación constituye una de las operaciones de mayor importancia cuando se trata de funciones reales de variable real puesto que indica la tasa de variación de la función en un instante determinado, si ésta no es el tiempo

La derivada de la función en el punto específico de su grafica es la pendiente de la recta tangente en dicho.

La derivada de una función es la razón de cambio instantánea con la que varía el valor de dicha función matemática, según se modifique el valor de su variable independiente. La derivada de una función depende del punto donde se desea obtener su valor, es decir, se determina como el límite de la rapidez de cambio media de la función en cierto intervalo, cuando el intervalo considerado para la variable independiente se torna cada vez más pequeño. Es por ello que se señala como el valor de la derivada de una función *en un punto dado*.

Por ejemplo al estudiar el movimiento: de un cuerpo, la función que nos indica su posición con respecto al tiempo, su derivada es la velocidad de dicho objeto para todos los momentos.

Por lo tanto el valor de la derivada de una función en un punto puede interpretarse geométricamente, ya que nos indica la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. Dicha recta tangente es, a su vez, la gráfica de la mejor aproximación lineal de la función alrededor de dicho punto.

Las aplicaciones de los primordial en el cálculo entre los que podemos señalar el Teorema de Rolle, del valor medio de Legrange y Cauchy, El teorema de Rolle establecido en 1691 por el matemático francés Michel Rolle (1652-1719), nos permite demuestra la existencia de un punto interior en un intervalo abierto para el cual la derivada de una función derivable se anula cuando el valor que está en los extremos del intervalo es el mismo; es un caso especial del teorema del valor medio..

El teorema de valor medio (de Lagrange) o teorema de Bonnet-Lagrange es una propiedad de las funciones derivables en un intervalo. La interpretación geométrica de el nos dice que hay un punto en el que la tangente es paralela a la secante de la curva que genera la función.

El criterio de derivadas (o prueba de derivadas) se emplean las derivadas de una función para ubicar sus puntos críticos y determinar si son un máximo local, un monimo local o un punto de silla. Los criterios de derivadas también pueden dar información sobre la concavidad de una función.

La utilidad de las derivadas para encontrar extremos se demuestra matemáticamente mediante el teorema de los puntos estacionarios de Fermat.

En la práctica, el teorema del valor extremo es una herramienta útil para resolver problemas de diversa áreas del desarrollo tecnológico. Se puede utilizar para encontrar los valores máximo y mínimo de una función. Por ejemplo, se puede utilizar para encontrar el punto más alto o más bajo de una ruta, o para optimizar una función que busca obtener el resultado más eficiente.

En resumen, el teorema del valor extremo es un principio fundamental del cálculo que establece que cualquier función continua en un intervalo cerrado tiene un valor máximo y un mínimo. Este teorema es una poderosa herramienta para la resolución de problemas y es un concepto importante que se debe comprender.

UNIDAD 1

LÍMITES DE SUCESIONES

Sucesiones

Desde el punto de vista Matemático una sucesión es una secuencia de números u otros objetos relacionados entre sí, en la que la posición relativa de cada letra respecto del anterior se tiene en cuenta. Por ejemplo 2, 4, 6, 8... es una sucesión con números pares mayores que 1; por otro lado 3, 9, 27, 81... es una sucesión de términos obtenidos con las potencias cuadradas de 3 . La sucesión se define matemáticamente como una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales y su codominio es cualquier otro conjunto, generalmente de números de diferente naturaleza, figuras geométricas o funciones; es decir, a cada posición de la secuencia identificados con índice 1, 2, 3, 4...; se le asocia un objeto que le corresponde en el conjunto de destino. Cada uno de ellos es denominado término (miembro o elemento) de la sucesión y al número de elementos ordenados (posiblemente infinitos) se le denomina la longitud o tamaño de la sucesión. Esto no debe confundirse con una serie matemática, que es el número resultante de sumar todos los términos de una sucesión infinita.

A diferencia de un conjunto, el orden en que aparecen los términos sí es relevante y un mismo término puede aparecer en más de una posición. De manera formal, una sucesión puede definirse como una función sobre el conjunto de los números naturales (o un subconjunto del mismo) y es por tanto una función discreta.

Por ejemplo, la sucesión A, E, I, O, U es una sucesión de las letras vocales que difiere de la sucesión U, A, E, I O. En este caso se habla de sucesiones finitas (cuya longitud es igual a 5). Un ejemplo de sucesión infinita sería la sucesión de números positivos primos: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13…

En ocasiones se identifica a las sucesiones finitas con palabras sobre un conjunto. Puede considerarse también el caso de una sucesión vacía (no poseen términos), pero este caso puede excluirse dependiendo del contexto.

Las sucesiones que siguen una regla determinada o patrón, siempre han llamado la atención de los matemáticos de todas las generaciones. Pero, a pesar de esto y de que se conocían desde tiempos lejanos, no fueron estudiadas de forma detallada hasta la época de mayor desarrollo de las matemáticas en el siglo XVIII. Fue en ese tiempo cuando se perfeccionó el concepto de límite de una sucesión como el valor al cual se acercan de forma sucesiva sus términos.

Leonhard, Euler, el matemático más destacado de esa época, sus contribuciones en diversos campos de las matemáticas, sobre todo, en el campo de las sucesiones y de las series numéricas. otro matemático italiano destacar Leonardo de Pisa, que en el siglo XII, introdujo en Europa una de las sucesiones matemáticas que mayor existencia tiene en los fenómenos naturales, los números de Fibonacci.

En general, las sucesiones se utilizan para representar listas ordenadas de terminos, dentro de las matemáticas discretas son empleadas maneras diversas, por ejemplo, dentro de las ciencias de la computación y en la teoría de juegos entre otras.

Notación

Existen diferentes notaciones y nociones de sucesión en matemática, dependiendo del área de estudio, algunas de las cuales (por ejemplo sucesión exacta) no quedan comprendidas en la notación que se introduce a continuación.

Se suele usar la notación $\{a_n\}$ para indicar una sucesión, donde a_n es el elemento de la sucesión de la posición n, llamado término general. El subíndice $n \in N$ indica el lugar que ocupa en dicha sucesión. Por ejemplo en los números positivos pares, denotando dicha sucesión por $\{a_n\}$:

$$\{a_n\} = 1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots \text{ entonces}$$

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = 5, a_4 = 7, \ldots$$

Cuando los elementos de la sucesión queden determinados por una regla, se puede especificar la sucesión haciendo referencia a la fórmula de un término arbitrario. En la sucesión anterior $\{a_n\}$ puede especificarse mediante la fórmula $a_n = 2n+1$. Para $n \geq 0$

Frecuentemente encontramos sucesiones donde los subíndices que denoten posición inicien desde cero, en vez desde uno, particularmente en matemática discreta o en ciencias de la computación. También se puede usar una variable distinta a n para denotar el término general, cuando así convenga para evitar confusión con otras variables.

En la literatura es posible encontrar una gran variedad de notaciones alternativas. Por ejemplo, uso de paréntesis en vez de llaves, o indicaciones de los límites mediante variantes con super y subíndices, a continuación se muestran algunos pocos ejemplos:

- $(a_n) = a_1, a_2, a_3, \ldots$
- $(a_k)_{k=1}^{m} = a_1, a_2, a_3, \ldots a_m$
- $(a_n)_{n \in N} = a_1, a_2, a_3, , ,,$

Sucesiones definidas por recurrencia

Una relación de recurrencia para una sucesión $\{a_n\}_{n \in N_0}$ es una ecuación la cual establece el término a_n en función de los términos anteriores

$$a_0, a_1, a_3, a_4, \ldots a_{n_0 - 1}$$

para todos los enteros n tales que $n \geq n_0$. La sucesión en sí es la solución de la relación de recurrencia si sus términos cumplen la relación para todo entero positivo n.

Los algoritmos recursivos proporcionan solución a un problema de tamaño n en términos de la solución de uno o más casos del mismo problema, pero de menor tamaño. Ejemplo de una sucesión por recurrencia es la sucesión de Fibonacci, en la cual, cada término a partir del tercero es la suma de los dos términos anteriores. Esta sucesión en términos generales se define como:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

Cuando se realiza la complejidad de un algoritmo recursivo basado en una sucesión, se obtiene una relación de recurrencia que expresa el número de operaciones necesarias para resolver un problema de tamaño n en términos del número de operaciones necesarias para resolver el mismo problema con unos datos de tamaño menor.

De esta manera, se puede comprobar la existencia de una gran relación entre las relaciones de recurrencia y la recursión, ya que sirven para resolver una gran cantidad de problemas como, por ejemplo, calcular el interés compuesto, calcular el número de movimientos del juego de las Torres de Hanói y el número de conejos de una isla (este problema fue propuesto por Fibonacci y relacionado con la sucesión de Fibonacci).

Ejemplos

Entre las sucesiones comunes y muy utilizadas se pueden encontrar la progresión aritmética y la progresión geométrica. La diferencia básica es que en la progresión aritmética el paso de un término al siguiente es la suma de una constante, y en la progresión geométrica el siguiente término de la sucesión se obtiene multiplicando una constante. En el primer caso la diferencia entre términos consecutivos es constante, mientras que en la segunda la razón o cociente entre términos consecutivos es constante:

Definición formal y propiedades básicas

Finitud e infinitud

Una sucesión finita $\{a_n\}$ (de longitud r) con elementos pertenecientes a un conjunto S, se define como una función

$$f(x): \{1, 2, 3, \ldots, r\} \to S$$

y en este caso el elemento a_n corresponde a f(n). Por ejemplo, la finitud e infinitud, (de longitud 4) de números pares menores que 10 (2, 3, 6, 8) corresponde a la función f:{1, 2, 3, 4} → P (donde P es el conjunto de números pares) definida por:

$$f(1) = 2, \quad f(2) = 4, \quad f(3) = 6, \; f(4) = 8$$

Una sucesión infinita $\{a_k\}$ con elementos pertenecientes a un conjunto S, se define como una función

$$f: N \longrightarrow S$$

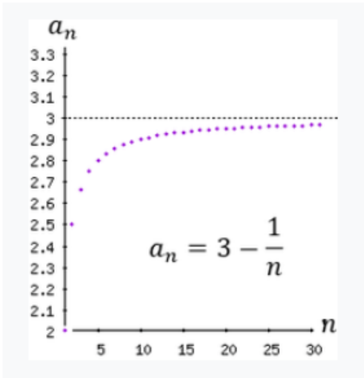
en donde, de forma análoga, $\{a_n\}$ corresponde a f(n).

Sucesiones monótonas

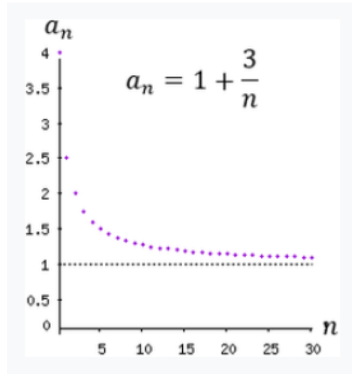
Una sucesión es monótona, cuando la diferencia entre cada término y el siguiente es siempre del mismo signo. Pueden ser crecientes o decrecientes.

Una sucesión creciente es aquella en la que se impone la desigualdad no estricta $a_n \leq a_{n+1}$, es decir, en la que cada término es menor o igual al término siguiente. Dentro de estas se pueden incluir, entre otras, las sucesiones constantes. Si se impone la condición de que $a_n < a_{n+1}$, es decir, que el siguiente término a_{n+1} siempre sea estrictamente mayor que su predecesor a_n, se denominan sucesiones estrictamente crecientes.

De la misma manera se puede definir la sucesión decreciente, según el término general, si $a_n \geq a_{n+1}$. Será estrictamente decreciente si $a_n > a_{n+1}$.



Ejemplo de una sucesión creciente



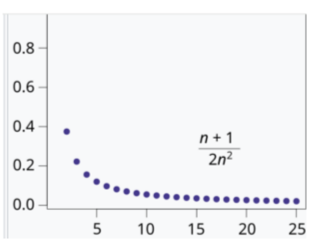
Ejemplo de una sucesión decreciente

Sucesiones acotadas

Se pueden dar tres formas de sucesión acotada:

- Una sucesión $\{a_n\}$ estará acotada superiormente en el caso de que exista un número real M que limite de la siguiente forma la secuencia: $\{a_n\} \leq M$.
- Por otro lado, la sucesión estará acotada inferiormente cuando un número real N la límite de la forma contraria a la anterior: $\{a_n\} \geq N$.
- Finalmente, en caso de que se den ambas opciones {an} será una sucesión acotada.

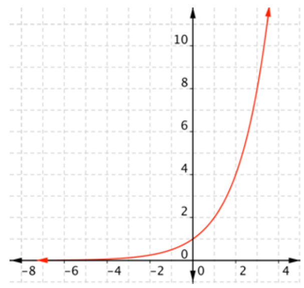
Límites y convergencia



Gráfica de una sucesión convergente $\{a_n\}$ que se muestra en azul. Del gráfico se puede ver que la sucesión es convergente al límite cero cuando se incrementa n.

Crecimiento exponencial

La siguiente gráfica de la función $f(x) = 2^x$ nos permite señalar:



- El Crecimiento: Su grafica tiende a acerca mucho al eje *x* cuando se aleja de cero por la izquierda, pero nunca toca el eje *x*. y su valor se hace más grande cuando se aleja del cero por la derecha
- La función en cero es igual a 1
- Su dominio son los números reales.
- Su rango son lo números reales positivos.

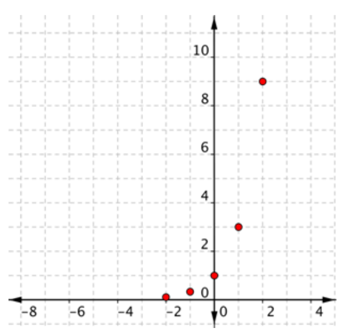
Ejemplo

Graficar el creciente de nuestra bacteria $f(x) = 3^x$.

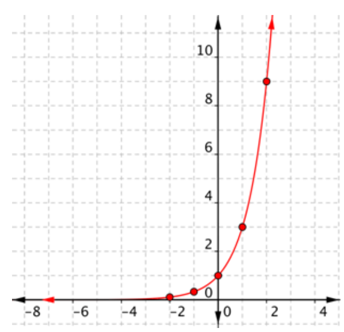
Empieza con una tabla de valores.

x	*f*(x)	Puntos
-2	$\frac{1}{9}$	$A\left(-2, \frac{1}{9}\right)$
−1	$\frac{1}{3}$	$B\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
0	1	$C(0,1)$
1	3	$D(1,3)$
2	9	$E(2,9)$

Grafica los puntos.

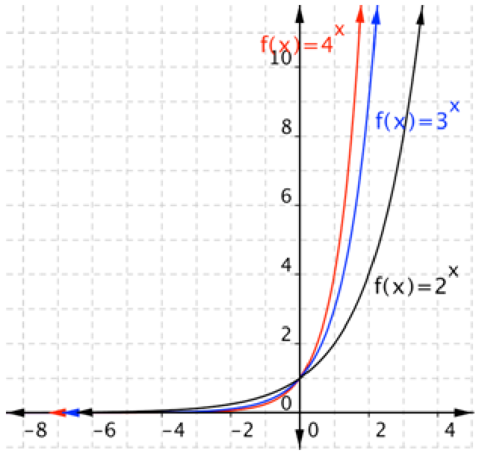


La función exponencial



Si graficamos tres funciones con base diferentes, por ejemplo

$f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^x$ y $f(x) = 4^x$ obtenemos.



Se observa que una base más grande hace más empinada la gráfica. Una base mayor, su gráfica se acerque al eje *y* por $x > 0$ y más cerca al eje *x* por $x < 0$. “Todas las gráficas pasan por (0, 1)”

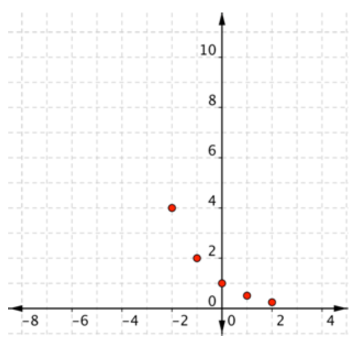
Decaimiento exponencial

Recordamos que para las funciones exponenciales, $b > 0$, pero $b \neq 1$. En los ejemplos anteriores, $b > 1$. ¿Qué pasa cuando *b* está entre 0 y 1, $0 < b < 1$?

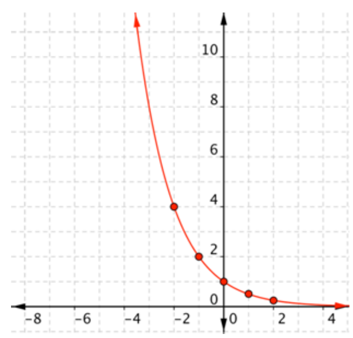
Graficamos la funciones: $\mathbf{f(x)} = \left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{x}}$

x	*f*(x)	Puntos
-2	4	$A(-2,4)$
−1	2	$B(-1,2)$
0	1	$C(0,1)$
1	$\frac{1}{2}$	$D\left(1,\frac{1}{2}\right)$
2	$\frac{1}{4}$	$E\left(2,\frac{1}{4}\right)$

Grafica los puntos.



La función exponencial



Observa que la forma es similar a la forma cuando $b > 1$, pero esta vez la gráfica se acerca al eje *x* cuando $x > 0$, en lugar de $x < 0$. Esto es un decaimiento exponencial. En lugar de que los valores de la función “crezcan” conforme aumentan los valores de *x*, como sucedía antes, los valores de la función “decaen” o disminuyen conforme los valores de *x* aumentan. Se acercan cada vez más a 0.

Sucesiones Convergentes - Límite de una sucesión

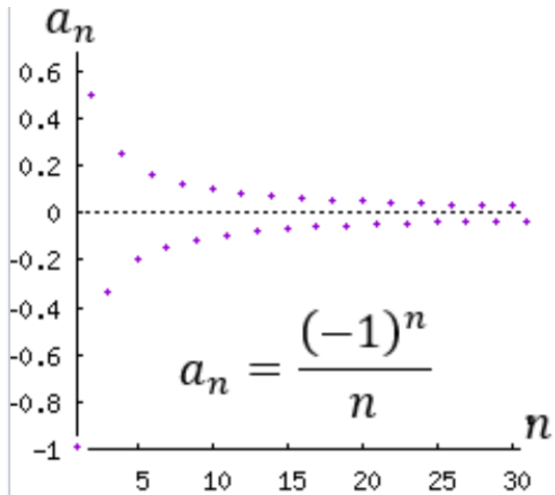
Una propiedad importante de las sucesiones es la convergencia. Si una sucesión converge, esta tiende a un valor particular conocido como límite. Si una sucesión converge a algún límite, entonces es convergente. Una sucesión que no es convergente es divergente.

Informalmente, una sucesión tiene límite si los elementos de la sucesión se hacen cada vez más y más cercanos a algún valor L (llamado límite de la sucesión), y se quedan «arbitrariamente» cercanos a L, lo que significa que dado un número real ε mayor que cero, todos menos un número finito de elementos de la sucesión tienen una distancia a L menor que ε

Formalmente, una sucesión $\{a_n\}$, $a_n \in R$, converge a L o tiene por límite L (cuando $n \to \infty$), y se escribe, $\lim_n a_n = L$
cuando, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in N : |a_n - L| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$

Esto quiere decir que, la sucesión es convergente si existe un lugar (en la sucesión) a partir del cual la diferencia entre los términos de la sucesión y el límite sea pequeña.

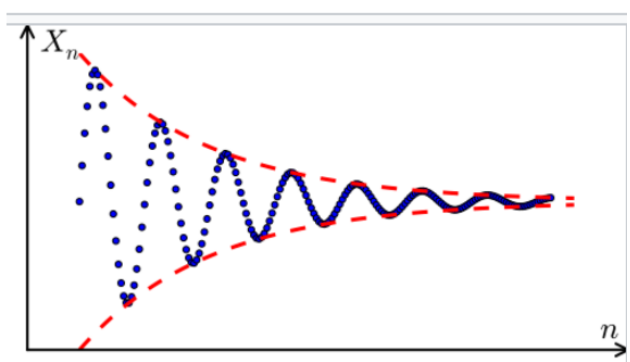
Se puede comprobar fácilmente que si una sucesión $\{a_n\}$, $a_n \in R$ es convergente, entonces el $\lim_n a_n$ es único (se aplica reducción al absurdo y se llega a una contradicción) y la sucesión es acotada (consecuencia inmediata de la definición).



Ejemplo de una sucesión alternada.

La sucesiones oscilantes son divergentes. Sus términos alternan indefinidamente de mayor a menor o viceversa, por lo que no tienen límite. Intuitivamente se llama sucesión alternada cuando alterna valores de signo opuesto, como $a_n = (-1)^n$ que genera la sucesión: a_0 = 1, -1, 1, -1, 1, -1, …, utilizada por series alternadas.

Sucesión de Cauchy



Gráfica de una sucesión de Cauchy $\{x_n\}$.

Dada la sucesión $\{a_n\}$ de números reales, se llama sucesión de Cauchy o sucesión fundamental, en el caso de que satisfaga el requisito siguiente:

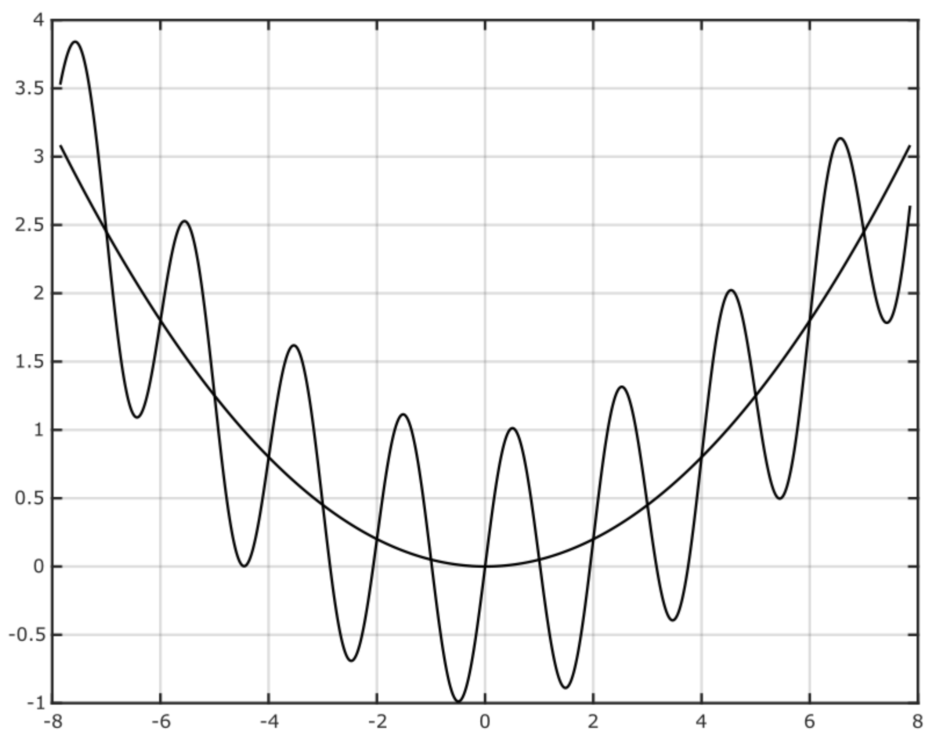
dado un número real r positivo se pueda conseguir dos enteros positivos p, q tal que de $p > n_0$ y $q > n_0$ se deduzca que $|c_p - c_q| < r$.

En los números reales toda sucesión de Cauchy converge a algún límite. Esta particularidad implica un resultado importante en el análisis real que es la caracterización de Cauchy para la convergencia de sucesiones:

Una sucesión de números reales es convergente (en los reales) si y solo si es de Cauchy.

A los espacios métricos que verifiquen la implicación hacia la izquierda se les llama espacios completos. O sea, R es un espacio completo. En general, se puede probar fácilmente que R^N es un espacio completo.

Extensión a los reales



Compruébese que $\{a_n\} = f(n) = f(n) + \sin(n\pi)$ ilustrando que dos funciones reales diferentes pueden corresponder a una misma sucesión sobre los enteros.

Dada una función f : N → R, llamaremos extensión en los reales de f a una función P : R → R cuyos valores coinciden en el dominio de f, es decir, $f|_N = P|_N$.

Es incorrecto representar a la extensión en los reales con el mismo nombre (f : R → R), pues, se trata de una asociación totalmente arbitraria y no unívoca que trae confusión y no tiene sentido para algunas funciones definidas a trozos. Se suele llamar a la extendida por ejemplo P, Q, ϕ o ψ si es un polinomio, o g o h si son funciones trigonométricas, agregando subíndices si hace falta.

La función f puede adquirir propiedades de la extendida P, si existe P con dichas propiedades, como límites al infinito, monotonía, acotaciones, entre otras.

Aplicando funciones exponenciales

Las funciones exponenciales son utilizadas en diferentes contextos, como el interés compuesto (dinero), crecimiento poblacional y decaimiento radioactivo. La mayoría de esta funciones no es exactamente de la forma $f(x) = b^x$. Normalmente, ésta se ajusta sumando o multiplicando constantes.

Por ejemplo, la fórmula del interés compuesto es $\mathbf{C_f = C_0\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}}$, donde $\mathbf{C_0}$ es el Capital invertido (la inversión o aporte inicial) y $\mathbf{C_f}$ es la cantidad de dinero que tendrás, con interés, al final de *t* años, usando la tasa de interés anual de *r* (expresado como un decimal) y *m* periodos por año. En este caso la base es el valor representado por la expresión $\mathbf{\left(1+\frac{r}{m}\right)}$ y el exponente es *mt* (un producto de dos valores).

Ejemplo:

Si inviertes 2.000 $ en una cuenta que paga 4% de interés, cuatrimestral, ¿cuánto dinero tendrás después de 4 años?

Solución

Datos	Formula	Operación
$\mathbf{C_0} =$ 2,000 \$	$\mathbf{C_f} = \mathbf{C_0}\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{m}}\right)^{\mathbf{mt}}$	$\mathbf{C_f} = \mathbf{2.000}\left(\mathbf{1} + \frac{\mathbf{0,04}}{\mathbf{4}}\right)^{\mathbf{4 \cdot 4}}$
r = 0.04		$= \mathbf{2.000}(\mathbf{1,01})^{\mathbf{16}}$
m = 4		$\mathbf{C_f} = \mathbf{2.000}(\mathbf{1,172579})$
t = 4 años		$\mathbf{C_f} = \mathbf{2.345,16}$ \$
$\mathbf{C_f} =?$		

Límites de funciones

La expresión límite de una función se utiliza en el calculo diferencial matemático y refiere a la cercanía entre un valor y un punto. El límite de una función es un concepto fundamental del análisis matemático aplicado a las funciones. En particular, el concepto se refiere en análisis real al estudio de límites, la continuidad y la derivabilidad de las funciones reales.

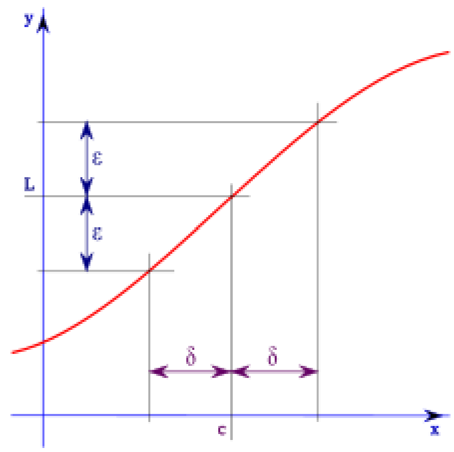
Intuitivamente, el hecho de que una función *f* alcance un límite *L* en un punto *c* significa que, tomando puntos suficientemente próximos a *c*, el valor de *f* puede ser tan cercano a *L* como se desee. La cercanía de los valores de *f(x)* y *L* no depende del valor que adquiere *f* en dicho punto *c*.

El Límite en la línea del tiempo

Con el desarrollo del cálculo durante los siglos XVII y XVIII, la notación moderna del límite de una función se remonta a Bolzano, quien en 1817 introdujo las bases de la técnica épsilon – delta. Sin embargo, no vio en vida el reconocimiento a su trabajo. Cauchy expuso límites en su *Cours d'analyse* (1821) y parece haber expresado la esencia de la idea, pero no de forma sistemática. La primera presentación rigurosa de la técnica hecha pública fue dada por Weierstrass entre los años 1850 - 1860, y desde entonces se ha convertido en el método estándar para trabajar con límites.

La notación de escritura usando la abreviatura **lim** con la flecha debajo es debida a Hardy en su libro *A Course of Pure Mathematics,* en 1908.

Definición formal - Funciones de variable real



Visualización de los parámetros utilizados en la definición de límite.

Si la función *f* tiene límite L en c podemos decir de manera informal que la función *f* tiende hacia el límite L cerca de c si se puede hacer que *f(x)* esté tan cerca como queramos de L haciendo que x esté suficientemente cerca de c siendo x distinto de c.

Los conceptos *cerca* y *suficientemente cerca* son matemáticamente poco precisos. Por esta razón, se da una definición formal de límite que precisa estos conceptos. Entonces se dice:

El límite de una función f, cuando *x* tiende a *c* es *L* *si y solo si* para todo Ɛ > 0, existe un $\delta > 0$ tal que para todo número real *x* en el dominio de la función, si $0 < |x - c| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Esto, escrito en notación formal:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

$$\leftrightarrow\ \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0/\forall x\epsilon\, Dom(f), 0 < |x - c| < \delta\ \ \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Tomando valores arbitrarios de ε, podemos elegir un δ para cada uno de estos, de modo que *f*(*x*) y *L* se acerquen a medida que *x* se acerca a *c*.

Esta es una formulación estricta del concepto de límite de una función real en un punto de acumulación (o punto límite) del dominio de la función y se debe al matemático francés Louis Cauchy.

Lo importante es comprender que el formalismo no lo hacen los símbolos matemáticos, sino la precisión con la que queda definido el concepto de límite. Esta notación es tremendamente poderosa, pues nos dice que si el límite existe, entonces se puede estar tan cerca de él como se desee. Si no se logra estar lo suficientemente cerca, entonces la elección del δ no era adecuada.

Una manera de entender mejor la definición anterior es interpretar las letras c y δ como las palabras "error" y "distancia", respectivamente. De esta forma, la definición se puede entender como sigue: podemos hacer que *f* aproxime el valor límite L *con errores* Ɛ *tan pequeños como queramos* ($\forall\varepsilon > 0$) a costa de reducir la distancia δ de los puntos x considerados al punto límite c.

Por ejemplo. Supongamos que se quiere demostrar que $\lim_{x\to 2}(5x + 1) = 11$ El cálculo de este límite surge por simple sustitución, esto se debe a que la función afín es continua.

Solución.

Usamos la definición. Debemos demostrar que para cualquier error Ɛ dado respecto del valor límite L podemos hallar una distancia δ al punto límite x = 2 para la cual se cumple

$$0 < |x - 2| < \delta\ \ \rightarrow |(5x + 1) - 11| < \varepsilon\ \ (\mathbf{1})$$

es decir, que puntos a distancia menor que δ del punto límite c = 2 tienen imágenes *f(x)* que aproximan el valor L = 11 con un error menor que el que nos hayamos propuesto, Ɛ.

Tomando $\delta = \frac{1}{5}\varepsilon$ es posible probar esto. Es válido ya que nos permite obtener un valor para cualquier Ɛ dado, que es precisamente lo que enuncia la definición.

Probaremos entonces la tesis, tomando como hipótesis

$$. \ 0 < |x-2| < \frac{1}{5}\varepsilon$$

Veamos que

$$|(5x+1)-11| = |5x+1-11| = |5x-10| = |5(x-2)| = 5|x-2|,$$

Luego por hipótesis $5|x-2| < 5\frac{1}{5}\varepsilon = \varepsilon$ y queda demostrado.

Nótese que bien podríamos haber elegido $\delta = \frac{1}{10}\varepsilon$ o $\delta = \frac{1}{15}\varepsilon$, por ejemplo. Siempre que $\delta = \frac{1}{5}\varepsilon$, se podrá demostrar la definición (1).

Se resume lo siguiente. Consideramos la función *f(x) = 5x + 1* y nos centramos en el punto c = 2. Ahora, para un error Ɛ > 0 cualquiera, si consideramos sólo puntos cuya distancia menor que un tercio del error ($\delta = \frac{1}{5}\varepsilon$) de c = 2, todas sus imágenes aproximan L = 11 con un error menor que el objetivo Ɛ elegido. Como este error es arbitrario, lo anterior quiere decir que las imágenes de puntos cercanos a c =2 aproximan L = 11 tanto como queramos.

Hay casos como por ejemplo la función Dirichlet ***D : R*** → ***R*** definida como:

$$D(x) = \begin{cases} c, & para\ x\ racional \\ d, & para\ x\ irracional \end{cases}$$

donde no hay ningún número ***a*** en el dominio para el cual existe el $\lim_{x\to a} f(x)$. Para demostrar la anterior afirmación, es necesario hacer uso del hecho de que cada intervalo contiene tanto números racionales como irracionales.

Límite secuencial

Consiste en definir al límite de una función en términos de los valores que toma para sucesiones contenidas en su dominio.

“Una función real *f* tiene un límite *L* en un punto *x* = *c* de su dominio si para toda sucesión x_n que converge a este punto *c*, la sucesión $f(x_n)$ converge a *L*."

En términos formales, si x_n es una sucesión tal que:

$$\forall \varepsilon_0 > 0, \exists N_0 \in N / n \geq N_0 \Rightarrow |x_n - c| < \varepsilon_0$$

entonces *f* tiene límite *L* en *x* = *c si y solo si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \, \mathcal{E} \, N / \forall x_0 \; n > N \Rightarrow |f(x_n) - L| < \varepsilon$$

lo cual se simboliza así:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$$

esta definición en términos de sucesiones es equivalente a la definición épsilon-delta de Cauchy.

Demostración:

Dado que se quiere demostrar una equivalencia, es necesario demostrar dos implicaciones. Por un lado:

$$\lim_{x\to c} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x_n) = L, \; \forall x_n / \lim_{x\to\infty} x_n$$

Por hipótesis

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 / |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

entonces si x_n converge a *c*, existe un número natural N_0 tal que

$$|x_n - c| < \delta, \forall n \geq N_0$$

bastará elegir N_0 en función de *δ*. La condición anterior implica que los puntos $x = x_n$ cumplen la primera parte de la implicación

$$0 < |x - c| < \delta$$

con lo cual si $x = x_n$ automáticamente se cumple por hipótesis que

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Acabamos de demostrar que

$$\forall x_n, n \geq N = N_0 \;\; \Rightarrow \; |f(x_n) - L| < \varepsilon$$

que es precisamente la definición de límite secuencial.

Para la implicación recíproca, se procede por reducción al absurdo

$$\lim_{x\to\infty} f(x_n) = L,\ \forall x_n / \lim_{x\to\infty} x_n = c \Rightarrow \; \lim_{x\to c} f(x) = L$$

Suponiendo que no existe el límite

$$\lim_{x\to c} f(x) = L$$

se tiene, negando su definición, que existe un *ε* tal que para todo *δ* existe al menos una sucesión x_δ para la cual se cumple

$$0 < |x_\delta - c| < \delta \;\wedge | \, f(x) - \, L| \geq \mathcal{E}$$

En particular conviene tomar

$$\delta = \frac{1}{n} \, , n \in N$$

Por lo tanto para estos *δ* existe al menos una sucesión $t_n = x_\delta$ que cumple

$$0 < |t_n - c| < \frac{1}{n} \,\wedge\, | \, f(t_n) - \, L| \geq \mathcal{E}$$

Esto muestra que, si bien t_n converge a *c*, la función *f* no converge a *L* para estas sucesiones. Esto contradice la hipótesis, y la contradicción provino de suponer que $\lim_{x\to c} f(x) \neq L$ por lo tanto el límite de *f*(*x*) cuando *x* tiende a *c* debe ser *L*

El límite secuencial proporciona una manera sencilla de probar la inexistencia de ciertos límites, como por ejemplo el ya mencionado

$$\lim_{x\to a} D(x)$$

para ellos basta tomar dos sucesiones diferentes que converjan al punto *a*:

1. una que contenga solo números racionales y
2. otra que solo contenga irracionales

de esta manera, se obliga a la función a tomar dos valores diferentes sobre sucesiones que tienden a un mismo punto del dominio. Luego, el límite no existe.

Unicidad del límite

La definición de límite permite demostrar el siguiente

Teorema

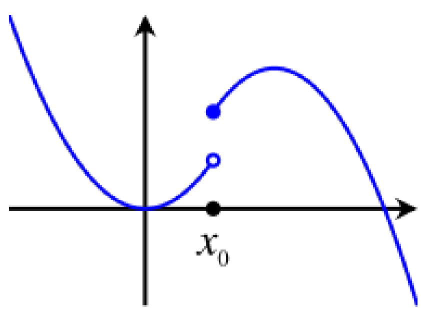
"Si el límite de una función existe, entonces es único".

Este teorema es válido en espacios topológicos Hausdorff.

Supóngase que $\lim_{x \to c} f(x) = L$ y también $\lim_{x \to c} f(x) = L'$ que siendo *L* y *L'* distintos; se debe de comprobar que no puede ser que $L \neq L'$ verificándose la definición de límite. Para ello se toma un entorno *E* de *L* y un entorno *E*' de *L*' que no se intersequen. Por definición de límite $f(x) \in E$ para todo *x* en algún entorno agujereado de *c*, por lo que no puede estar en *E*', evitando que el límite sea *L*'.

El teorema de unicidad provee de una valiosa herramienta para refutar la existencia de límites.

Límites laterales



El límite cuando: $x \to x_0^+ \neq x \to x_0^-$.

Por lo tanto, el límite cuando $x \to x_0$ no existe.

Tomemos ahora una función de una variable

$$f: D \subsetneq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

y un punto *x* del dominio *D* de esta función, aproximándose a *c*, pero tomando solo valores más grandes que él. Formalmente estaríamos tomando los *x* que verifican $0 < x - c < \delta$, para ciertos δ. Si la función tiende a un valor L^+, se dice que «existe el límite por derecha» y se denota así

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L^+$$

Tomando valores más pequeños, es decir los *x* tales que $0 < -(x - c) < \delta$, el límite puede ser escrito como:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L^-$$

Si los dos límites anteriores son iguales:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

entonces **L** se pueden referir como *el límite* de *f*(*x*) en *c*. Dicho de otro modo, si los límites laterales no son iguales, entonces el límite no existe. El hecho de que el límite no sea el mismo en todo entorno del punto *c* implica que no es único, por esta razón es que no existe.

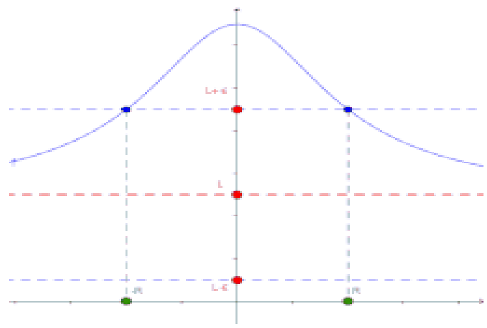
Los límites laterales permiten definir la continuidad y derivabilidad de una función en un punto.

Límites infinitos

Existen varios casos de límites de funciones que involucran la noción del infinito, definiremos cada uno de ellos en las secciones siguientes.

Variable que tiende a infinito

Cuando una variable tienda a infinito, supongamos *x*, utilizaremos el símbolo del infinito de esta manera $x \to \infty$. Esto significa que la variable *x* toma valores arbitrariamente grandes, en magnitud. Analíticamente diremos que, fijado cierto número real *R*, *x* lo superará en valor absoluto, cualquiera sea el *R* tomado.



Dado *ε*, puede establecerse *R* de modo que *f*(*x*) se «acerque» a *L*,

a medida que *x* se aleja del origen ilimitadamente.

$x \to \infty \;\leftrightarrow\; \forall \mathbb{R} > 0, |x| > \mathbb{R}$.

Para esta definición tomaremos, como caso particular, dos «signos del infinito».

1. Si es $x > 0$, diremos que *x* tiende a *más infinito* o al infinito «positivo». Lo denotaremos así, $x \to +\infty$.
2. $x < 0, x \to -\infty$. Si significa que *x* tiende a *menos infinito*.

Resulta de especial interés el comportamiento de ciertas funciones en el infinito. Cuando estos límites existen, y son números reales, podemos construir la ecuación de las Asíntotas horizontales u oblicuas de la función. Definiremos entonces el límite de una función, cuando la variable independiente tiende a infinito, para cualquier signo.

El Limite de una función f(x) cuando x tiende a infinito es L si y solo si para todo $x > 0, \exists \mathbb{R} > 0$ tal que, para x en el dominio de f, se cumple la implicación $|x| > \mathbb{R} \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$

Si solo se toma uno de los casos, basta añadir la restricción correspondiente. Por ejemplo, si queremos calcular el límite de $x \to -\infty$, consideraremos la definición anterior con la salvedad de que $x > 0$.

Tomemos como ejemplo $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, definida $\forall x \epsilon \mathbb{R}$. A medida que damos valores muy grandes a *x* en valor absoluto, *f* decrece y se acerca a cero. Esto se puede demostrar con la definición dada.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \mathbb{R} > 0 / |x| > \mathbb{R} \Rightarrow \left| \frac{1}{x^2+1} - 0 \right| < \varepsilon$$

Dado que R es arbitrario por definición, conviene tomarlo en función de ε de esta manera

$$\mathbb{R} = max \left\{ 1, \quad \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \right\}$$

.De este modo, hay dos casos a considerar:

1. ε ≥ 1 en cuyo caso, cualquier R sirve, pues f está acotada por 1. En particular se escogió arbitrariamente un R = 1.
2. 0 < ε < 1 se elige R en función de ε.

El primer caso queda automáticamente demostrado por la definición de función acotada, pues basta deducir el caso particular.

$$\forall x \, \epsilon \, \mathbb{R}, |f(x)| \leq 1 \leq \ \varepsilon \ \Rightarrow \ \forall x \, \epsilon \, \mathbb{R}, |x| > 1 \Rightarrow |f(x)| \leq \varepsilon$$

Para el segundo caso, debemos demostrar la implicación (2).

$$|x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \ \Rightarrow \ \left| \frac{1}{x^2+1} \right| < \varepsilon$$

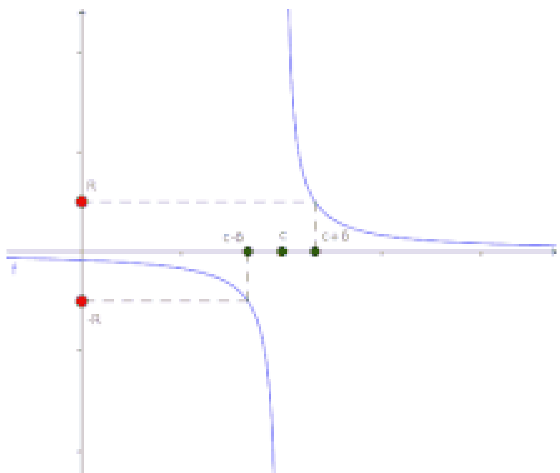
siempre que ε < 1, pues de lo contrario se toma R = 1. Partimos de

$$|x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1} \ \Rightarrow \ x^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \Rightarrow \ x^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \ \Rightarrow \ \frac{1}{} x^2 + 1 > \varepsilon$$

Como f es una función estrictamente positiva ∀ x vale que f(x) =|f(x)|, por lo tanto queda demostrada (2).

Como $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$, la ecuación y = 0 determina la asíntota horizontal de la función.

Función que tiende a infinito



Tomando *R* arbitrariamente grande, podemos establecer un *δ* de modo que cuando *x* se acerque a *c*, *f*(*x*) supere a *R* en valor absoluto.

Dada cierta función *f*, diremos que *tiende a infinito* cuando crezca indefinidamente, a medida que nos acercamos a cierto punto *c* en el dominio. Esto equivale a afirmar que *f* no está acotada, para valores del dominio «suficientemente cercanos» a *c*. Esto se denota así $\lim_{x\to c} f(x)=\infty$, o también, se escribe $f(x)\to\infty$.

Si tomamos a la función *f* como una variable, por ejemplo, *y*, podemos utilizar la definición de *variable que tiende a infinito*, y combinarla con la definición de límite, de la siguiente manera.

"El Limite de una función f(x), cuando x tiende a c, es infinito si y solo si, para todo $\mathbb{R}$ > 0 existe un δ tal que, para todo punto *x* en el dominio de *f*, se cumple $0<|x-c|<\delta\ \Rightarrow |f(x)|<\mathbb{R}$.

En símbolos,

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \leftrightarrow \forall \mathbb{R} > 0, \exists \delta > 0 / \forall x \in Dom(f), 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x)| > \mathbb{R}$$

Por ejemplo, tomemos la función racional $f(x) = \frac{1}{x}$, cuya gráfica en el plano es una hipérbola equilátera centrada en el origen de coordenadas. Tomando *x* muy cercano a cero, la función *f*(*x*) toma valores muy grandes, por eso se dice que *f*(*x*) tiende a infinito cuando *x* tiende a cero. Esto puede demostrarse con la definición.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty \leftrightarrow \forall \mathbb{R} > 0, \exists \delta > 0/0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > \mathbb{R}$$

Tomemos $\delta = \frac{1}{\mathbb{R}}$, en este caso la demostración es inmediata ya que

$$0 < |x - 0| < \frac{1}{\mathbb{R}} \Rightarrow |x| < \frac{1}{\mathbb{R}} \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right| > \mathbb{R}$$

Cuando una función tiende a infinito en un punto determinado *c* del dominio, la recta que determina la ecuación x = c, es decir, todo punto de la forma $(c, t) \forall t \in \mathbb{R}$, se denomina asíntota vertical de la función. En el ejemplo dado, x = 0 es la asíntota vertical.

El hecho de que $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$ no implica que sea posible la división por cero. Según la definición de este límite, $0 < |x| < \delta \Rightarrow x \neq 0$, con lo cual, $\frac{1}{0} \neq \infty$. En definitiva, no existe $\frac{1}{0}$ es decir, está expresión es indefinida.

Realicemos otro ejemplo, la función Logaritmo natural.

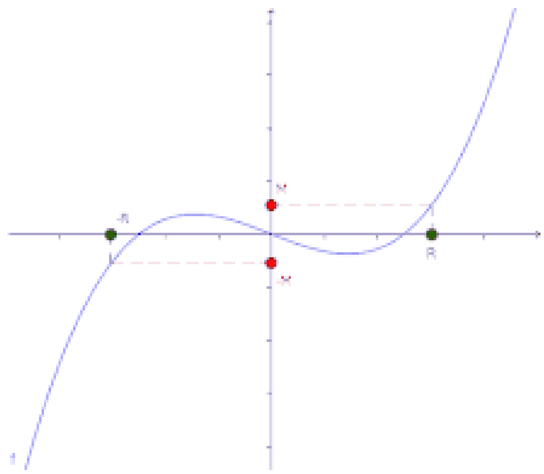
$$\lim_{x \to 0^+} Ln\,(x) = -\infty$$

usando límite lateral ya que el logaritmo solo está definido para x > o en los reales.

Tomaremos $\delta = e^{-\mathbb{R}}$ por lo tanto $0 < x < e^{-\mathbb{R}} \Rightarrow Ln(x) < -\mathbb{R}$ y queda demostrado el limite, ya que siendo $\mathbb{R} > 0, Ln(x) < -\mathbb{R}$ significa que dado cualquier $\mathbb{R}$ podemos tomar a la función más pequeña que este número.

Esta función tiene una asíntota vertical x = 0, igual que la anterior.

Ambos casos



A medida que tomamos *M* cada vez más grande, podemos establecer *R* de modo que *f* supere a *M* en valor absoluto cuando lo hace *x*, con respecto a *R*.

Pueden darse ambos casos al mismo tiempo, por ejemplo, cualquier función polinómica de *x* tiende a infinito, cuando *x* tiende a infinito. En este tipo de casos definiremos al límite como sigue.

El límite de una función *f*(*x*) es infinito, cuando *x* tiende a infinito, si y solo si para M > 0 todo existe un $\mathbb{R}$ > 0 para el cual se cumple $|x| > \mathbb{R} \Rightarrow |f(x)| > M$, siempre que $x \epsilon Dom\ (f)$

Por ejemplo para la función f)x) = 2x + 1, que es un caso particular de función polinómica. Siendo su gráfica una recta, intuitivamente podemos imaginar que tomando puntos de *x* «muy grandes» o «muy pequeños» los valores de *f*(*x*), es decir, la «altura», se hace muy grande o pequeña con respecto a *x*.

Demostremos que $\lim_{x\to\infty}(2x+1) = \infty$. Escribamos la definición

$$\lim_{x\to\infty}(2x+1) = \infty \iff \forall M > 0, \exists \mathbb{R} > 0/|x| > \mathbb{R} \Rightarrow |2x+1| > M$$

Para esta demostración tomaremos $\mathbb{R} = \frac{1}{2}(M-1)$.

$$|2x+1| \geq 2|x| + 1 > 2.\frac{1}{2}(M-1) + 1 = M$$

Cálculo de límites

Los conceptos definidos permiten introducir herramientas para el cálculo de límites. A partir de las definiciones pueden demostrarse propiedades algebraicas, listadas en detalle a continuación.

Propiedades generales

Dadas dos funciones f(x) y g(x) que tienen límite en un punto a, se cumplen las siguientes propiedades:

- El límite de la suma de ambas funciones es igual a la suma de los límites.
- El límite de la diferencia se calcula como la diferencia de los límites.
- El límite del producto de las funciones es igual al producto de sus límites.
- El límite del cociente entre ambas funciones es igual al cociente entre los límites, siempre y cuando el límite del denominador sea distinto de cero.
- El límite del producto de una constante por una función viene determinado por la multiplicación de la constante por el límite de la función.

Si f(*x*) y g(*x*) son funciones de variable real y *k* es un escalar, entonces, se cumplen las siguientes propiedades:

#	Límite de	Expresión
01	Una constante	$\lim_{x \to c} k = k, donde\ k\ \epsilon \mathbb{R}$
02	La función identidad	$\lim_{x \to c} x = c$

03	El producto de una función y una constante	$\lim_{x\to c} kf(x) = k\lim_{x\to c} f(x)$
04	Una suma	$\lim_{x\to c}(f(x)+g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$
05	Una resta	$\lim_{x\to c}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
06	Un producto	$\lim_{x\to c}(f(x).\,g(x)) = \lim_{x\to c} f(x)\,.\lim_{x\to c} g(x)$
07	Un cociente	$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}, si\ \lim_{x\to c} g(x)\ \neq 0$
08	Una potencia	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to c} f(x)^{\lim_{x\to c} g(x)}, si\ f(x) > 0$
09	Un logaritmo	$\lim_{x\to c} Log\,[f(x)] = Log\left[\lim_{x\to c} f(x)\right]$
10	El numero e	$\lim_{x\to 0}[1+x]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e$
11	Función f(x) acotada y g(x) infinitesimal	$\lim_{x\to c}(f(x).\,g(x)) = 0$
12	Una Raíz	$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$

Propiedades de los límites

Asíntotas verticales y horizontales

Las **asíntotas** son rectas a las cuales la función se va aproximando indefinidamente, cuando por lo menos una de las variables (x o y) tienden al infinito. Son límites de las funciones.

Asíntotas Verticales:

Si una función f(x) crece indefinidamente cuando el valor de la variable x tiende a a, se dice que su límite es **infinito** (+∞, si el crecimiento es en sentido positivo, y −∞, si lo es en sentido negativo). Análogamente, también es posible definir límites de una función cuando el valor de x tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.

Entonces, se dice que una función f(x) tiene por **asíntota vertical** la recta cuya ecuación es x = a, cuando al menos existe uno de los límites laterales de la función en el punto a y dicho límite es $+\infty$ o a $-\infty$.

Nos indican a que tiende la función cuando la x no está definida, son rectas paralelas al eje OY. Se escriben x = valor de la asíntota horizontal. El número máximo de asíntotas verticales que puede tener una función es dos.

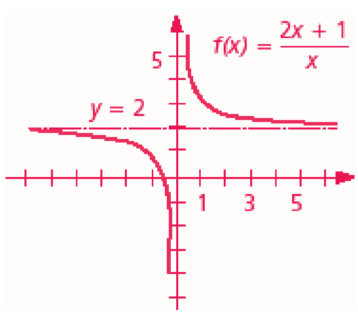
$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

Asíntotas Horizontales:

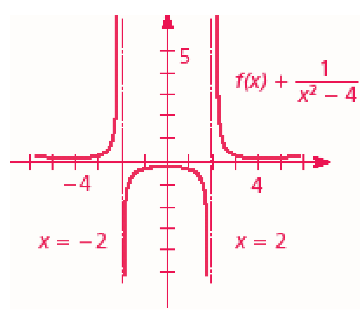
De igual forma, la función f(x) tiene por **asíntota horizontal** la recta de ecuación y = b, cuando existe al menos uno de los límites de la función en el caso de que x tienda a $+\infty$ o a $-\infty$. y dicho límite sea b.

Nos indican a que tiende la función cuando la x es muy grande o muy pequeña, son rectas paralelas al eje OX. Se escriben y = valor de la asíntota horizontal. Las funciones racionales tienen asíntota horizontal cuando el numerador y el denominador son del mismo grado y cuando el grado del denominador es mayor que el grado del numerado.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$



Asíntotas horizontales



Asíntotas verticales

Asíntotas oblicuas:

Una función racional tiene asíntotas oblicuas cuando el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador. Las asíntotas horizontales y oblicuas son incompatibles. Si hay unas no puede haber de las otras.

Como el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador tiene asíntota oblicua.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = \infty \ \Rightarrow$$

Hay una asíntota oblicua.

Calculamos su ecuación expresada como y = mx + b; con $m \neq 0$

La pendiente “m” se determina como:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}}{x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x(x - 1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2}}{\frac{x^2 - x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2} - \frac{2x}{x^2} + \frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{x}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{2}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = \frac{1}{1} = 1$$

La ordenada “n” se obtiene como:

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} - x\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2 - x(x - 1)}{x - 1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 2 - x^2 + x}{x - 1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\frac{-x + 2}{x - 1}\right) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\frac{-x + 2}{x}}{\frac{x - 1}{x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-x}{x} + \frac{2}{x}}{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-| + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}}$$

n = -1

Por lo tanto la ecuación de la asíntota oblicua es: y = x - 1

Ejemplo

Cálculos de límites directos

1. Realizar $$L = \lim_{x \to 1} -x^2 + 3x + 5$$

Evaluando

$$L = -(1)^2 + 3(1) + 5 = -1 + 3 + 5 = 7$$

Por lo tanto

$$L = \lim_{x \to 1} -x^2 + 3x + 5 = 7$$

2. Realizar $$L = \lim_{x \to \infty} 4x^3 + x + 5$$

Evaluando

$$L = 4(\infty)^2 + (\infty) + 5 = \infty$$

Por lo tanto

$$L = \lim_{x \to \infty} 4x^3 + x + 5 = \infty$$

3. Realizar $$L = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x^2}$$

Evaluando

$$L = -\frac{1}{(-\infty)^2} = -\frac{1}{\infty} = 0$$

Por lo tanto

$$L = \lim_{x \to -\infty} -\frac{1}{x^2} = 0$$

Indeterminaciones

Las propiedades generales permiten, junto con la definición, calcular límites indeterminados mediante transformaciones algebraicas. Hay varios tipos de indeterminaciones, Considerar ∞ como el límite que tiende a infinito y 0. 1 al límite de una función que tiende a 0 o 1, respectivamente

A continuación se muestra una tabla resumen con las técnicas habituales a aplicar en cada caso. Luego se desarrolla su explicación para entender cada uno de ellos, y los ejemplos asociados.

Tabla resumen de limites indeterminados y método de ruptura sugerido

#	**Operación**	**Forma de la Indeterminación**	**Método propuesto para su romperla**
01	División por cero	k/0	Limites laterales
02	Sustracción	$\infty - \infty$	De estar presente raíces, multiplicar y dividir por el conjugado
03	Multiplicación	$0 \,.\, \infty$	Simplificar
04	División	$\frac{0}{0}$	❖ Factorizar si es posible ❖ De estar presente raíces, multiplicar y dividir por el conjugado
		$\frac{\infty}{\infty}$	Dividir numerador y denominador por el mayor exponente presente
05	Elevación a potencia	$1^{\infty}, \infty^{0}\ y\ 0^{0}$	Aplicar Logaritmo

Cuando aprendamos a resolver derivadas se desarrollara otra forma adicional de resolver algunas de estas indeterminaciones: La regla de L’Hospital.

Ejemplo.

La operación matemática 0/0 es una indeterminación, es decir, no es posible, *a priori*, saber cual es el valor de un límite que tiende a cero sobre otro que también tiende a cero ya que el resultado no es siempre el mismo. Veamos algunos casos a modo explicativo.

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{t}{t}\ valorando\ \ se\ tiene\ \frac{0}{0}\ (Ind);$$

Para evitar ña indeterminación simplificamos

$$\lim_{x \to 0} \frac{t}{t} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

b)

$$\lim_{x \to 0} \frac{t}{t^2} \ valorando \ \ se \ tiene \ \frac{0}{0} \ (Ind);$$

Para evitar la indeterminación simplificamos

$$\lim_{x \to 0} \frac{t}{t^2} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{t} = \frac{1}{0} = \infty$$

c)

$$\lim_{x \to 0} \frac{t^2}{t} \ valorando \ \ se \ tiene \ \frac{0}{0} \ (Ind);$$

Para evitar la indeterminación simplificamos

$$\lim_{x \to 0} \frac{t^2}{t} = \lim_{x \to 0} t = 0$$

Nótese que hubiera sido imposible «eliminar» las indeterminaciones en los ejemplos anteriores si no se hubiera supuesto t ≠ 0, desigualdad que se deduce de la definición.

Solución cuando se obtiene *K/0*

Sabemos que no es posible dividir un número entre cero, ya que no comprendemos que algo se quieres dividir entre nada, al realizar esta operación con la calculadora, da error. Pero, al hablar de límites el cero no es un valor 'estático', sino un valor al que nos *aproximamos*. Un número *k* al dividirlo por otro muy próximo a cero resulta valor numérico muy grande, que será positivo o negativo según la relación que haya entre los signos de *k* y el signo cuando nos aproximamos a cero por la derecha (0^+), o por la izquierda (0^-).

La resolución de una indeterminación del tipo k/0 debemos calcular los limites laterales. Estos serán ∞ o -∞ según la relación entre *k* y *0.* Además, esta indeterminación genera una asíntota vertical.

Ejemplos

1.- Realizar

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x},\qquad evaluando\ resulta\ \ \frac{1}{0}\ (Indeterminado)$$

Apliquemos límites laterales:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^+}=+\infty\ \wedge\ \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$

Note que, por un lado, que para determinar el valor de $\frac{1}{0^+}$ o $\frac{1}{0^-}$, utilizando la calculadora, donde el 0^+ o el 0^- son valores a la derecha (cercano al cero, pero mayor que él) o a la izquierda (cercano al cero, pero menor que el). Resulta que, los límites laterales son distintos, concluimos que no existe el límite de la función cuando *x* tiende a 0.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\neq\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}\ \Rightarrow el\ limite\ no\ existe$$

2.- Realizar

$$\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-5}$$

Siguiendo un procedimiento similar:

$$\lim_{x\to 5}\frac{4}{x-5},\qquad evaluando\ resulta\ \ \frac{4}{5-5}=\frac{4}{0}\ (Indeterminado)$$

Ahora, aplicando límites laterales:

Por la derecha

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{4}{x-5}=\frac{4}{5{,}001-5}=\frac{4}{0{,}001}=410^3\Rightarrow valor\ grande\ positivo\to+\infty$$

Por la izquierda

$$\lim_{x\to 5^-}\frac{4}{4{,}999-5}=\frac{4}{-0{,}001^-}=-410^3\Rightarrow valor\ grande\ negativo\to-\infty$$

Con lo que esta vez podemos decir que:

$$\lim_{x\to 5^+}\frac{4}{x-5} \neq \lim_{x\to 5^-}\frac{4}{x-5} \Rightarrow el\ limite\ no\ existe$$

Recuerde que, por convención, aunque los límites laterales sean distintos, se suele decir que $\frac{k}{0} = \infty$, por tanto la función diverge en el punto.

Solución de indeterminación tipo *0/0*

"Imagínate que no tenemos caramelos y que entregar a ningunas personas. ¿Cuántas caramelos le tocan a cada uno? Esto no tiene sentido. ¿Se entiende la operación?. Esto es como de locos”

Tratamos de entender, que estás en presencia de una indeterminada. Newton en el Siglo XVII, antes de que se formalizara el estudio de los límites como lo conocemos hoy, escribió en relación al 0/0:

"Hay que entender la razón de las cantidades, no antes de que desaparezcan ni después, sino la razón con la que desaparecen."

Desde un punto de vista práctico, el 0/0 indica la presencia de un factor común, tanto en numerador como denominador, que lo que causa este tipo de indeterminación, cuando la variable tirnde a valor que causa el cero.

- Si estamos ante un cociente de polinomios, factorizamos y simplificamos el factor común de numerador y denominador y resolvemos el nuevo límite
- Si estamos ante un cociente con raíces, ya sea en el numerador, en el denominador, o en ambos, multiplicamos numerador y denominador por el o los conjugado(s) y resolvemos. Es muy importante que recuerdes que *"suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados"*

Ejemplos

1.- Realizar $$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3}$$

Primero evaluamos

$$\frac{2(3)^2 - 5(3) - 3}{3 - 3} = \frac{18 - 15 - 3}{3 - 3} = \frac{18 - 18}{3 - 3} = \frac{0}{0}\ (IND)$$

Para evitar la indeterminación, por ser de dos polinomios, un posible método para hacerlo es por factorización o aplicando la resolvente cuadrática y obtener las raíces del polinomio. Luego simplificamos el factor común. Al factorizar recordemos que uno de los dos términos es el común

$$2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3)$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(2x + 1)(x - 3)}{(x - 3)}; simplificado\ el\ termino\ común$$

$$\lim_{x \to 3}(2x + 1)\quad evaluando\ \Rightarrow 2(3) + 1 = 6 + 1 = 7$$

Finalmente

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} = 7$$

2.- Realizar $$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{x - \frac{1}{2}}$$

Primero evaluamos

$$\frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{1 - 1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = \frac{0}{0}\ (IND)$$

Para evitar la indeterminación, por ser de dos polinomios, un posible método para hacerlo es por factorización o aplicando la resolvente cuadrática y obtener las raíces del polinomio. Luego simplificamos el factor común. Al factorizar recordemos que uno de los dos términos debe ser común.

$$4x^2 - 1 = (2x+1)(2x-1) = 2(2x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{x - \frac{1}{2}} = \lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{2(2x+1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{\left(x - \frac{1}{2}\right)}; simplificado\ el\ termino\ común$$

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} 2(2x+1)\ \ evaluando\ \Rightarrow 2\left(2.\frac{1}{2} + 1\right) = 2(1+1) = 2.2 = 4$$

Finalmente

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{4x^2 - 1}{x - \frac{1}{2}} = 4$$

3.- Realizar $\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1}$

Primero evaluamos

$$\frac{1 - 1}{(1)^2 - 2 + 1} = \frac{1 - 1}{2 - 2} = \frac{0}{0}\ (IND)$$

Para evitar la indeterminación, por ser de dos polinomios, factorizando nos queda Luego simplificamos el factor común.

$$x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \to 1} \frac{x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 1)}{(x - 1)^2}; simplificado\ el\ termino\ común\ \lim_{x \to 1} \frac{1}{(x - 1)};$$

Evaluamos ahora

$$\frac{1}{(1 - 1)} = \frac{1}{0}\ (IND)$$

Con lo que debemos volver a resolver una indeterminación, esta vez del tipo *k/0*, resolviendo los límites laterales:

Por la derecha

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x - 1} = \frac{1}{1{,}0001 - 5} = \frac{1}{0{,}0001} = 10^4 \Rightarrow valor\ grande\ positivo \to +\infty$$

Por la izquierda

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{0{,}9999-1} = \frac{1}{-0{,}0001^-} = -10^4 \Rightarrow valor\ grande\ negativo \to -\infty$$

Con lo que esta vez podemos decir que:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{x-1} \neq \lim_{x\to 1^-} \frac{1}{x-1} \Rightarrow el\ limite\ no\ existe$$

Como los límites laterales son distintos, no existe el límite:

4.- Realizar $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$

Primero evaluamos

$$\frac{\sqrt{2+2}-2}{2-2} = \frac{\sqrt{4}-2}{2-2} = \frac{2-2}{2-2}\ \frac{0}{0}\ (IND)$$

En los tres ejemplos anteriores nos encontrábamos con polinomios tanto en el numerador como en el denominador, en este caso nos encontramos que en el numerador aparece una raíz, para evitar la indeterminación multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del numerador, luego simplificamos:

$$\frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{\left(\sqrt{x+2}\right)^2-2^2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{x+2-4}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

$$= \frac{(x-2)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}$$

Luego

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)}\ evaluando$$

$$\frac{1}{\left(\sqrt{2+2}+2\right)} = \frac{1}{\left(\sqrt{4}+2\right)} = \frac{1}{(2+2)} = \frac{1}{4}$$

Finalmente

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \frac{1}{4}$$

Nota: En aquellas funciones que presentan cocientes de radicales puede que te resulte de utilidad reducirlas a índice común antes de resolverlas. Esto es:

$$\frac{\sqrt[1]{P(x)}}{\sqrt[b]{Q(x)}} = \sqrt[ab]{\frac{P(x)^b}{Q(x)^a}}$$

Siendo *m.c.m (a,b)* el mínimo común múltiplo de *a* y *b*.

Solución de indeterminación tipo ∞/∞

Sabemos que no todos las funciones que se acercan al infinito (positivo o negativo) lo realizan al mismo ritmo o velocidad. Expresado de otra forma, el infinito es diferente según la expresión matemática que se está trabajando. Por esto podemos resolver una indeterminación del tipo ∞/∞**,** ya que comparamos los grados de los infinitos del numerador y del denominador:

- ❖ Si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, el límite es infinito o menos infinito, según la relación de signos entre los términos de mayor grado del numerador y del denominador
- ❖ Si el grado del denominador es mayor que el grado del denominador, el límite es cero
- ❖ Si el grado del numerador es igual al grado del denominador, el resultado es un valor finito que depende de los términos de mayor grado del numerador y del denominador

Para justificar lo anterior se proceder de la siguiente manera:

- ➢ En el caso donde el grado del polinomio en el numerador es mayos que el grado del polinomio del denominador se realiza la división de ambos por la variable (*x*) que este elevada a la mayor potencia de los polinomios. Por ejemplo:

1.- Realizar
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x}{3x^2+x-5}$$

Primero evaluamos

$$\frac{(\infty)^3+2(\infty)}{3(\infty)^2+(\infty)-5}=\frac{\infty}{\infty}\ (IND)$$

Al comparar los infinitos del numerador y denominador , el resultado debería ser infinito (el polinomio del numerador es de grado 3 y el del denominador de grado 2). Dividiendo numerador y denominador entre la variable *x* elevado a la mayor potencia del polinomio de menor grado (esto es, entre x^2):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x}{3x^2+x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3+2x}{x^2}}{\frac{3x^2+x-5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2}+\frac{2x}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}-\frac{5}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+\frac{2}{x}}{3+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}}$$

Por lo tanto evaluando, recordando que un número pequeño dividido entre uno muy grande tiene a cero $\frac{k}{\infty}=0$ y que un número infinito entre un número pequeño es infinito $\frac{\infty}{k}=\infty$

$$\frac{\infty+0}{3+0-0}=\frac{\infty}{3}=\infty$$

Finalmente

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+2x}{3x^2+x-5}=\infty$$

- Si el grado del denominador es mayor que el grado del denominador, dividimos por la variable de mayor base:

1.- Realizar
$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^3+6}{3x^5+x^2-5}$$

Primero evaluamos

$$\frac{2(\infty)^4+2(\infty)^3+6}{3(\infty)^5+(\infty)^2-5}=\frac{\infty}{\infty}\ (IND)$$

Al comparar los infinitos el resultado debería ser 0, ya que el infinito del denominador es de mayor grado (la variable mayor del denominador es 5 frente a 4 del numerador). Dividiendo numerador y denominador entre la variable *x* elevado a la mayor potencia del polinomio de mayor grado (esto es, entre x^5):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^3+6}{3x^5+x^2-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^4+3x^3+6}{x^5}}{\frac{3x^5+x^2-5}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^4}{x^5}+\frac{3x^3}{x^5}+\frac{6}{x^5}}{\frac{3x^5}{x^5}+\frac{x^2}{x^5}-\frac{5}{x^5}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{6}{x^5}}{3+\frac{1}{x^3}-\frac{5}{x^5}}$$

Por lo tanto evaluando, recordando que un número pequeño dividido entre uno muy grande tiene a cero $\frac{k}{\infty}=0$ y que un número infinito entre un número pequeño es infinito $\frac{\infty}{k}=\infty$

$$\frac{0+0+0}{3+0-0}=\frac{0}{3}=0$$

Finalmente

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+3x^3+6}{3x^5+x^2-5}=0$$

Recuerda que, si en lugar de $x\to\infty$, tenemos que $x\to-\infty$ debes comenzar, con un paso previo, realizando un cambio de variable *x* por *-x*, y operando. Se trata, en definitiva, de aplicar:

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}f(-x)$$

Con esta propiedad nos permite además cambiar $-\infty$ por ∞ y continuar con el cálculo del límite normalmente.

Ejemplos

2.- Realizar

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+6}{-3x^3-5}$$

Primero evaluamos

$$\frac{2(\infty)^4+6}{-3(\infty)^3-5}=\frac{\infty}{-\infty}\ (IND)$$

Ya que el infinito del numerador es el de mayor grado (la variable mayor del numerador es 4 frente a 3 del denominador). Dividiendo numerador y denominador entre la variable *x* elevado a la mayor potencia del polinomio de mayor grado (esto es, entre x^4):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+6}{-3x^3-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^4+6}{x^4}}{\frac{-3x^3-5}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^4}{x^4}+\frac{6}{x^4}}{\frac{-3x^3}{x^4}-\frac{5}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{6}{x^4}}{-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^4}}$$

Por lo tanto evaluando, recordando que un número pequeño dividido entre uno muy grande tiene a cero $\frac{k}{\infty}=0$ y que un número infinito entre un número pequeño es infinito $\frac{\infty}{k}=\infty$

$$\frac{2+0}{-0-0}=\frac{2}{-0}=-\infty$$

Finalmente

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+6}{-3x^3-5}=-\infty$$

2.- Realizar $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^6-5x^3}{2x^6+3}$$

Primero evaluamos

$$\frac{4(\infty)^6+6}{2(\infty)^6+3}=\frac{\infty}{\infty}\ (IND)$$

Ya que los grado de los polinomios son iguales (ambas variable de mayor grado es 6). Dividiendo numerador y denominador entre esta variable de grado común (esto es, entre x^6):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^6-5x^3}{2x^6+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^6-5x^3}{x^6}}{\frac{2x^6+3}{x^6}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^6}{x^6}-\frac{5x^3}{x^6}}{\frac{2x^6}{x^6}+\frac{3}{x^6}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{5}{x^3}}{2+\frac{3}{x^6}}$$

Por lo tanto evaluando, recordando que un número pequeño dividido entre uno muy grande tiene a cero $\frac{k}{\infty}=0$ y que un número infinito entre un número pequeño es infinito $\frac{\infty}{k}=\infty$

$$\frac{4-0}{2+0}=\frac{4}{2}=2$$

Finalmente

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^6-5x^3}{2x^6+3}=2$$

Solución de indeterminación tipo $\infty - \infty$

Siguiendo el mismo razonamiento que aplicamos al señalar que ∞/∞ es 1, tampoco podemos afirmar que $\infty - \infty$ es 0: las funciones que se plantean en los ejercicios al tender sus variables al infinito puede acercarse a él a distinta velocidad (es decir, cada infinito puede tener un grado distinto).

Para resolver una indeterminación de tipo $\infty - \infty$ se realiza siguiendo los siguientes pasos:

- Por de cada función en el infinito, si observamos a simple vista el grado de los infinitos
- simplificando la diferencia que origina la indeterminación y calculando después el límite que quede
- si existen raíces se debe multiplicar y dividir por el conjugado para hacer desaparecer la raíz que dificulta el cálculo del límite

Ejemplos

a) primero realizamos por un ejemplo que se pude resolver a simple vista por comparación de infinitos:

Realizar $\lim_{x\to\infty} 5x^{1000}-2^x$

Evaluando

$$5(\infty)^{1000}-2^{(\infty)}=\infty-\infty\ (IND)$$

Sin embargo, una exponencial crece más rápidamente que un polinomio cuando x toma valores grandes, independientemente de que el grado del exponente sea muy grande, así que

$$\lim_{x \to \infty} 5x^{1000} - 2^x = -\infty$$

Ya que el grado del infinito de la exponencial es mayor que el del polinomio.

b) Simplificando para evitar la indeterminación:

Realizar

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x+2} - x$$

Evaluando

$$\frac{(\infty)^2}{(\infty)+2} - (\infty) = \infty - \infty\ (IND)$$

Realizando la suma algebraica y simplificamos.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x+2} - x = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x(x+2)}{x+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x^2 - 2x}{x+2} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x}{x+2}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{-2x}{x}}{\frac{x+2}{x}}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-2}{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{-2}{1 + \frac{2}{x}}; evaluando\ \frac{-2}{1 + \frac{2}{\infty}} = -\frac{2}{1} = -2$$

En conclusión

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x+2} - x = -2$$

c) Cuando en la función se presentan raíces, multiplicamos y dividimos por el conjugado de la expresión

Realizar

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x} - x$$

Evaluando

$$\sqrt{(\infty)^2 + (\infty)} - (\infty) = \infty - \infty\ (IND)$$

Para evitar esta indeterminación; multiplicamos y dividimos por su conjugado.

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + x} - x\right) . \frac{\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)}{\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\left(\sqrt{x^2 + x}\right)^2 - (x)^2}{\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)}$$

Ahora para resolverlo de manera más analítica, dividir numerador y denominador entre x que es la mayor potencia de la variable.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x}{x}}{\frac{\left(\sqrt{x^2 + x} + x\right)}{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{x^2 + x}}{x} + \frac{x}{x}\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{x^2 + x}{x^2}} + 1\right)}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} + 1\right)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1\right)}$$

Evaluando resulta

$$\frac{1}{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{\infty}} + 1\right)} = \frac{1}{\sqrt{1 + 0} + 1} = \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$$

Finalmente

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{x^2 + x} - x = \frac{1}{2}$$

d) Por otra parte, señalamos que no necesariamente la indeterminación de tipo $\infty - \infty$ se da cuando $x \to \infty$. Como todas las indeterminaciones, también puede darse calculando el límite de la función en un punto:

Realizar
$$\lim_{x \to 2} \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} - \frac{1}{x - 2}$$

Evaluando

$$\frac{2(2) - 2}{(2)^2 - 2(2)} - \frac{1}{2 - 2} = \frac{4 - 2}{4 - 4} - \frac{1}{2 - 2} = \frac{2}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty \; (IND)$$

Observa que hemos dicho que ambos cocientes tienden a infinito cuando *x* se aproxima a 2, lo cual da origen a la indeterminación $\infty - \infty$. Estrictamente hablando, se trata de dos indeterminaciones *k/0* que habría que resolver buscando los límites laterales, pero a nivel práctico podemos decir que ambas son infinito y operar ambos cocientes:

Realizando la suma de fracciones y simplificando

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-2}{x^2-2x}-\frac{1}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{2x-2-x}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}\text{Evaluando}=\frac{1}{2}$$

En conclusión

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x-2}{x^2-2x}-\frac{1}{x-2}=\frac{1}{2}$$

Solución de indeterminación tipo $\infty.\mathbf{0}$

Al multiplicas un número por 0, el resultado es cero. Pero ya sabemos que ni el infinito es un número ni el 0 en los límites es un valor 'estático', sino un valor al que nos aproximamos. Para resolver una indeterminación del tipo $\infty.0$; mediante operaciones algebraicas y simplificaciones, buscamos convirtiéndola en otra de tipo de indeterminación $0/_0\ o\ ^{\infty}/_{\infty}$.

Ejemplo

Realizar

$$\lim_{x\to 2}\left[(x^2-4)\left(\frac{5}{x-2}\right)\right]$$

Primero evaluamos

$$((2)^2-4)\left(\frac{5}{2-2}\right)=(4-4)\left(\frac{5}{0}\right)=0.\infty\ (IND)$$

Para evitar la indeterminación, factorizamos y simplificamos. Recordemos que $A^2-B^2=(A+B)(A-B\ )$

$$\lim_{x\to 2}\left[(x^2-4)\left(\frac{5}{x-2}\right)\right]=\lim_{x\to 2}\left[(x+2)(x-2)\left(\frac{5}{x-2}\right)\right]=\lim_{x\to 2}\lfloor 5(x+2)\rfloor$$

Evaluando

$$\lfloor 5(2+2)\rfloor=5.(4)=20$$

Concluimos que

$$\lim_{x\to 2}\left[(x^2-4)\left(\frac{5}{x-2}\right)\right] = 20$$

Solución de indeterminación tipo 1^{∞}

Se sabe que 1 elevado a cualquier número *n*, es decir, multiplicado por sí mismo *n* veces, da 1. Sin embargo, cuando nos aproximamos a 1 y elevamos a infinito a la vez (recuerda que estamos calculando límites), no podemos estar seguros de lo que ocurre. Es por eso que estamos, de nuevo, ante una indeterminación.

La regla práctica la mayoría de las veces que nos encontramos con este problema indeterminaciones de tipo 1^{∞} se puede evitar y resolver aplicando la fórmula de Euler

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$

Mostraremos dos métodos para resolver este tipo de los límites.

Primer método de resolución de la indeterminación

La idea es resolver el siguiente límite usando el resultado anterior y cierto proceso.

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

Evaluando

$$\left(\frac{2(1)+1}{1+2}\right)^{\frac{1}{1-1}} = \left(\frac{3}{3}\right)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}\ (IND)$$

Para evitar la indeterminación, a la base le sumamos y restamos 1. Esto no altera el valor del límite, pues estamos sumando un cero. Simplificamos los dos últimos sumandos nos queda

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to1^+}\left(1+\frac{2x+1}{x+2}-1\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to1^+}\left(1+\frac{2x+1-x-2}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to1^+}\left(1+\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

Recordando que

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a}$$

Aplicando esta propiedad al segundo, sumando, realizamos el inverso del inverso. Elevamos al denominador y a su inverso

$$\lim_{x\to1^+}\left(1+\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x\to1^+}\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to1^+}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}\right)^{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\left(\frac{x+2}{x-1}\right)}$$

Si sustituimos la variable recordando que

$$\frac{x+2}{x-1} = c \qquad\qquad (a^b)^c = a^{bc}$$

y reducimos y reordenamos

$$\lim_{x\to1^+}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}}\right)^{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\left(\frac{x+2}{x-1}\right)} = \lim_{x\to1^+}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\frac{x+2}{x-1}}\right)^{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)\left(\frac{1}{x-1}\right)}$$

$$= \lim_{x\to1^+}\left(\left(1+\frac{1}{c}\right)^{c}\right)^{\left(\frac{1}{x+2}\right)}$$

notamos que:

$$\lim_{x\to1^+} c = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = \frac{3}{0} = \infty$$

Usando la igualdad vista al inicio tendremos que

$$\lim_{x\to 1^+} e^{\left(\frac{1}{x+2}\right)} = e^{\frac{1}{3}}$$

Así, hemos logrado encontrar el límite deseado.

Segundo método de resolución de la indeterminación

En este segundo método usaremos la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{h(x)} = e^{\lim_{x\to a} h(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}$$

Realizar

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

Evaluando

$$\left(\frac{2(1)+1}{1+2}\right)^{\frac{1}{1-1}} = \left(\frac{3}{3}\right)^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}\ (IND)$$

Usando la igualdad vista previamente con

$$f(x) = 2x+1 \qquad g(x) = x+2 \qquad h(x) = \frac{1}{x-1}$$

tenemos:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\left(\frac{2x+1}{x+2}-1\right)} = e^{\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\left(\frac{2x+1-x-2}{x+2}\right)} = e^{\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)}$$

$$= e^{\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+2}}\ evaluando = e^{\frac{1}{1+2}} = e^{\frac{1}{3}}$$

Concluimos: $.\ \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e^{\frac{1}{3}}$

Solución de indeterminaciones tipo $\mathbf{0^{\infty}, \infty^{0}}$ *y* $\mathbf{0^{0}}$

Utilizando el mismo razonamiento que en las solución anterior señalada, nos encontramos ante las indeterminaciones del tipo $\mathbf{0^{\infty}, \infty^{0}}$ *y* $\mathbf{0^{0}}$

Para la resolución todas ellas tomamos en cuenta que es una función elevada a otra, la cual se modificara usando las propiedades del limite de los logaritmos.

Así, si

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = a\,, y\ \lim_{x\to\infty} g(x) = b$$

Resulta

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to\infty} g(x).Ln(f(x))} = e^{bLna}$$

Donde

$$Lim\, f(x): \begin{bmatrix} \lim_{x\to\infty} f(x) \\ \lim_{x\to a} f(x) \end{bmatrix}$$

Comprobación

Para verificar la expresión anterior, recordemos que la función exponencial y la logarítmica son inversas entre si. Lo que quiere decir, simplemente, que si las aplicamos de manera consecutiva, el resultado obtenido es el original. luego:

$$f(x)^{g(x)} = a^b = e^{Ln(a^b)} = e^{Ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x).Ln(f(x))}$$

Ejemplos

1. Realizar $$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$$

Evaluando

$$\infty^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0\ (IND)$$

Transformado esta expresión mediante la formula ante señalada

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{Ln\left(\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty}\left(Ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)\right)} = e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}Ln(x)\right)} = e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{Ln(x)}}\right)}$$

$$= e^{\frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{Ln(x)}\right)}}, \qquad evaluando\ e^{\frac{0}{k}} = e^0 = 1$$

Este ejemplo se realizara más formalmente cuando pomos aplicar la regla de L'Hospital luego de conocer las derivadas.
Por lo tanto

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

2. Realizar $$\lim_{x\to\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}}$$

Evaluando

$$\infty^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0\ (IND)$$

Transformado esta expresión mediante la fórmula ante señalada

$$\lim_{x\to\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}} = e^{Ln\left(\lim\limits_{x\to\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(Ln\left((1+e^x)^{\frac{1}{x}}\right)\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}Ln(1+e^x)\right)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{Ln(1+e^x)}{x}\right)}, \qquad evaluando\ e^{\frac{0}{k}} = e^0 = 1$$

A ser e^x mucho mayor que 1 podemos decir $Ln(1+e^x) \to x$

Quedando nuestra expresión

$$: e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{Ln(1+e^x)}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x}\right)} = e^{\lim_{x\to\infty}(1)} = e^1 = e$$

Este ejemplo se realizara más formalmente cuando pomos aplicar la regla de L'Hospital luego de conocer las derivadas

Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty}(1+e^x)^{\frac{1}{x}} = e$$

Límites trigonométricos

En el cálculo los limites trigonométricos desempeñan un desarrollo importante al entender el comportamiento de las funciones trigonométricas a medida que se acercan a ciertos valores. Estos límites son cruciales para el análisis matemático y utiles en diversas ramas de la ciencia y la ingeniería.

Debemos estudiar y comprender los conceptos asociados con las funciones trigonométricas y su comportamiento en situaciones límite.

Se denota como limites trigonométricos a aquellos que contienen funciones trigonométricas como por ejemplo: Sen (x), Cos (x), Tan (x) y sus inversas.

Al resolver estos límites es recomendable primero evaluar, dado un resultado directo; en aquellos casos que presenten alguna indeterminación se recomienda aplicar las consideraciones según sea pertinente para evitar la indeterminación se recomienda aplicar las identidades trigonométricas.

Relaciones y transformaciones trigonométricas fundamentales.

Presentamos algunas de las relaciones trigonométricas más utilizadas en la resolución de límites trigonométricos:

$$Sen^2 A + Cos^2 A = 1 \qquad Tan\ A = \frac{Sen\ A}{Cos\ A} \qquad CTg\ A = \frac{Cos\ A}{Sen\ A}$$

$$Tan^2 A + 1 = Sec^2 A \qquad Sec\ A = \frac{1}{Cos\ A} \qquad Sen(2A) = 2Sen\ A\ Cos\ A$$

$$1 + CTg^2 A = Csc^2 A \qquad Csc\ A = \frac{1}{Sen\ A} \qquad Cos(2A) = Cos^2 A - Sen^2 A$$

$$Sen\ \left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 - Cos\ (A)}{2}} \qquad Cos\ \left(\frac{A}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1 + Cos\ (A)}{2}}$$

Estos límites son esenciales en la resolución de problemas que implique derivar funciones trigonométricas o límites indeterminados utilizando técnicas de álgebra.

Límites Trigonométricos Básicos:

a. Límite del Seno:

$$\lim_{x\to 0}\frac{Sen\ x}{x}=1$$

b. Límite del Coseno:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-Cos\ x}{x}=0$$

c. Límite de la Tangente:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} Tan\ x=\infty$$

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} Tan\ x=-\infty$$

d. Límite de Cotangente:

$$\lim_{x\to 0} CTg\ x=\lim_{x\to 0}\frac{Cos\ x}{Sen\ x}=1$$

e. Límite de Secante:

$$\lim_{x\to 0} Sec\ x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{Cos\ x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{Sen\ x}}{\frac{Cos\ x}{Sen\ x}}=\lim_{x\to 0}\frac{Csc\ x}{CTg\ x}=1$$

f. Límite de Cosecante:

$$\lim_{x\to 0} Csc\ x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{Sen\ x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{Cos\ x}}{\frac{Sen\ x}{Cos\ x}}=\lim_{x\to 0}\frac{Sec\ x}{Tan\ x}=1$$

A continuación se muestra una tabla de limites trigonométricos.

01 $\lim_{x\to\infty} x.Sen\left(\frac{2\pi}{x}\right)Cos\left(\frac{2\pi}{x}\right)=2\pi$

02 $\lim_{x\to 0}\frac{Sen\ x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{Senx}=1$

03 $\lim_{x\to 0}\frac{Tg\ x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{Tg\ x}=1$

04 $\lim_{x\to 0}\frac{Sen\ x}{Tan\ x}=\lim_{x\to 0}\frac{Tan\ x}{Sen\ x}=1$

05 $\lim_{x\to\infty}\frac{1-Cos\ x}{x^2}=\frac{1}{2}$

06 $\lim_{x\to\infty} x\ Sen\left(\frac{1}{x}\right)=1$

Algunas demostraciones, por ejemplo, el segundo de estos límites trigonométricos, requieren el uso de la inecuación sen (x) < x < tan (x) en el intervalo (0,π/2), que relaciona x con las funciones Seno y Tangente.

Demostración

Se toma $Sen\ x < x < Tan\ x$; dividiendo cada término de la inecuación doble por Sen x, se obtiene

$$\frac{Sen\ x}{Sen\ x} < \frac{x}{Sen\ x} < \frac{Tan\ x}{Sen\ x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{Sen\ x} < \frac{\frac{Sen\ x}{Cos\ x}}{Sen\ x} \Rightarrow 1 < \frac{x}{Sen\ x} < \frac{1}{Cos\ x}$$

Invirtiendo los términos de la inecuación y cambiando los signos de las desigualdades, se tiene:

$$1 > \frac{Sen\ x}{x} > Cos\ x \Rightarrow Cos\ x < \frac{Sen\ x}{x} < 1$$

Calculando el limite cuando x tiende a 0

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} Cos\ x < \lim_{x\to 0} \frac{Sen\ x}{x} < \lim_{x\to 0} 1$$

Que resulta

$$1 < \lim_{x\to 0} \frac{Sen\ x}{x} < 1$$

Aplicando el teorema del Sandwich o teorema de estricción, el limite necesariamente vale 1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{Sen\ x}{x} = 1$$

Ejemplos

1 Realizar $\}\} L = \lim_{x\to 0} \frac{Tan\ x - Sen\ x}{1 - Cos\ x}$

Evaluamos

$$L = \frac{Tan\ (0) - Sen\ (0)}{1 - Cos\ (0)} = \frac{0-0}{1-1} = \frac{0}{0}\ (IND)$$

Para evitar la indeterminación aplicamos identidades y simplificamos:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{Tan\ x - Sen\ x}{1 - Cos\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{Sen\ x}{Cos\ x} - Sen\ x}{1 - Cos\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{Sen\ x - Sen\ xCos\ x}{Cos\ x}}{1 - Cos\ x}$$

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{Sen\, x(1 - Cos\, x)}{Cos\, x(1 - Cos\, x)} = \lim_{x \to 0} \frac{Sen\, x}{Cos\, x}$$

Evaluando nuevamente:

$$L = \frac{Sen\,(0)}{Cos\,(0)} = \frac{0}{1} = 0$$

Finalmente

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{Tan\, x - Sen\, x}{1 - Cos\, x} = 0$$

2. Realizar $$L = \lim_{x \to 0} (Cos\, x)^{\frac{1}{Sen^2 x}}$$

Evaluamos

$$L = (Cos\, 0)^{\frac{1}{Sen^2 0}} = 1^{\frac{1}{0}} = 1^{\infty}\ (IND)$$

Para evitar la indeterminación aplicamos la expresión e identidades, luego simplificamos;

$$L = \lim_{x \to a} (f(x))^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} (g(x)(f(x) - 1))}$$

Nos queda

$$L = e^{\lim_{x \to a} (\frac{1}{Sen^2(x)}(Cos\,(x) - 1))}$$

Pero

$$Sen^2(x) = 1 - Cos^2(x) = (1 + Cos\,(x))(1 - Cos\,(x))$$

Por tanto

$$L = e^{\lim_{x \to a} (\frac{(Cos\,(x) - 1)}{(1 + Cos\,(x))(1 - Cos\,(x))})} = e^{\lim_{x \to a} (\frac{-(1 - Cos\,(x))}{(1 + Cos\,(x))(1 - Cos\,(x))})}$$

$$= e^{\lim_{x \to a} (\frac{-1}{(1 + Cos\,(x))})}$$

Evaluando nuevamente

$$L = e^{\frac{-1}{(1+Cos\,(0))}} = e^{\frac{-1}{(1+1)}} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Finalmente

$$L == e^{\lim_{x\to a}(\frac{1}{Sen^2(x)}(Cos\,(x)-1))} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Auto evaluación

1. Calcular los siguientes límites (directos):

1. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-5}{x}$ 2, $\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x+6}{3x}$ 3. $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-4x-5}{x+2}$

4. $\lim_{x\to -2}\frac{x^2-1}{x+2}$ 5. $\lim_{x\to\infty} x^3-2x+6$ 6. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x-5}{x+2}$

2. Funciones racionales con polinomios: descomponemos en factores y simplificamos.

1. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x-6}{x-2}$ 2, $\lim_{x\to -1}\frac{x^3-2x^2-6x+12}{x^2+3x-10}$ 3. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-8x+5}{x^2+2}$

4. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^5-3}{-x^3+2}$ 5. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x-3}-\sqrt{x+3}$ 6. $\lim_{x\to 6}\frac{x^2-36}{x^2-4x-12}$

7. $\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x-3}{2x+2}\right]^{3x^2}$ 8. $\lim_{x\to 0}\left[\frac{3-x}{2+x}\right]^{x}$ 9. $\lim_{x\to 0}(1+4x)^{\frac{3}{x}}$

10. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-1}}\right)^{\frac{2x+3}{x-2}}$ 11. $\lim_{x\to 0}(1+x+x^2)^{\frac{2}{x}}$ 12. $\lim_{x\to 1}\left(\frac{x^2+x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

3. Realizar el Calcular las asíntotas de las siguientes funciones:

1. $f(x) = \frac{3x-2}{x+1}$ 2, $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$ 3. $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{x+3}$

4. $f(x) = \frac{x^2-3}{x+2}$ 5. $f(x) = \frac{x^2+2}{x-1}$ 6. $f(x) = \frac{x^2+3}{x-5}$

4. Realizar el Calcular los siguientes limites trigonométricos:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{3x}{Sen\ (4x)}$$

2, $$\lim_{x\to 0}\frac{Cos\ (3x) - Cos\ (x)}{x^2}$$

3. $$\lim_{x\to 0}\frac{Sen\ (5x) - Sen\ (3x)}{Sen\ (x)}$$

4. $$\lim_{x\to 0}\frac{Cos\ (x + A) - Cos\ (x - A)}{x}$$

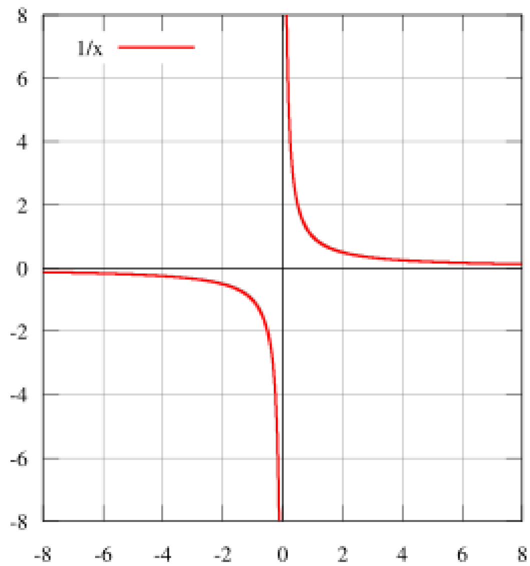
5. $$\lim_{x\to 0}\frac{Sen\ (ax)}{Sen\ (bx)}$$

6 $$\lim_{x\to 0}\frac{Cos\ (4x) - Cos\ (2x)}{x^2}$$

Unidad 2

CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Función continúa



La función $f(x) = \frac{1}{x}$ es continua en su dominio ($\mathbb{R}/[0]$) y no continua en x = 0. Sin embargo, se puede definir su valor principal de Cauchy. Que en otra área de las matemática se denomina este punto (x = 0) no se considera *indefinido* y se llama singularidad.

En cálculo una función continua es una función donde, variaciones pequeñas cercana de puntos del dominio producen variaciones pequeñas en los valores de la función. Esto significa que no presenta "cambios bruscos" en puntos cercanos, lo que se conocería como una discontinuidad. Si la función no es continua, se dice que es discontinua.

De manera Informal, decimos que una función es continua de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ es aquella cuya gráfica puede dibujarse sin levantar el lápiz del papel (más formalmente su grafo es un conjunto conexo). Desde el punto de vista formal, una función es continua si se puede conseguir que sus valores varíen arbitrariamente poco a costa de hacer suficientemente pequeñas las distancias entre los argumentos considerados. Hasta el siglo XIX, los matemáticos definían la continuidad intuitivamente, y sólo trabajaban con funciones continuas. La definición de continuidad se consiguió formalizar por medio de la definición épsilon – delta de limite.

Continuidad o discontinuidad de una función en un punto

Si analizar una función:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}/x \to \; y = f(x)$$

en un punto: $x = x_1$, pueden darse los siguientes casos:

$$Funcion \left[\begin{array}{l} continua \left[\begin{array}{l} derivable \\ no\ derivable \end{array} \right. \\ discontinua \left[\begin{array}{l} evitable \\ esencial \left[\begin{array}{l} de\ 1^{a} especie \left[\begin{array}{l} de\ salto\ finito \\ de\ salto\ infinito \\ asintotica \end{array} \right. \\ de\ 2^{a} especie \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Funciones reales de una variable real

Desde el punto de vista Informal hablando, una función f definida sobre un intervalo *I* es continua si la curva que la representa, es decir el conjunto de los puntos (x, f(x)), con x en *I*, está constituida por un trazo continuo, es decir un trazo que no está roto, ni tiene "hoyos" ni "saltos", como en la figura de la derecha.

El intervalo ***I*** de x es el dominio de definición de f, definido como el conjunto de los valores de x para los cuales f(x) existe.

El intervalo *I* de x es el rango (también conocido como imagen) de f, el conjunto de los valores de y, tomados como y = f(x). Se escribe J = f(I). Notar que en general, no es igual que el codominio (solo si la función en cuestión es suprayectiva.)

.

Continuidad de una función en un punto

La definición de continuidad en un punto es la siguiente

"Una función f es continua en un punto x_0 perteneciente a su dominio"

si:

$$\forall \varepsilon > 0; \ \exists \delta > 0$$

tal que para toda **x** perteneciente al dominio de la función

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

La anterior definición se puede leer intuitivamente como sigue. Un función *f* es continua en un punto x_0 si podemos hacer que sus valores aproximen la imagen del punto, $f(x_0)$, arbitrariamente bien ($\forall \varepsilon > 0, |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$) si consideramos sólo puntos *x* suficientemente cercanos a x_0 (que disten de él menos que una distancia $\delta > 0$ que podemos tomar arbitrariamente pequeña). Es decir, las imágenes de f alrededor x_0 de varían arbitrariamente poco si nos acercamos a x_0 lo suficiente.

Comparando la definición dada con la definición épsilon – delta de limite, la podemos escribir en términos de límites de la siguiente manera; si x_0 es un punto del dominio de la función que es punto de acumulación del mismo, entonces *f* es continua en x_0 si y solo si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Cuando x_0 es un punto del dominio que no es de acumulación del mismo, es decir, es punto aislado del dominio, se cumple trivialmente la definición, luego toda función es continua en los puntos aislados de su dominio. Por ejemplo, las sucesiones de números reales son un caso de función real de variable real cuyo dominio es el conjunto de los números naturales. Como todos los puntos del dominio de una sucesión son puntos aislados del mismo, se concluye que toda sucesión es una función continua. Por otro lado, no tiene sentido hablar de sí una función es o no continua en un punto que no pertenezca al dominio de la misma.

Por ejemplo, la función f(x) = 1/x es continua en todos los puntos de su dominio (obsérvese que cero no está en el dominio de la función). En cero, como no está en el dominio, no podemos hablar ni de si es continua ni de si no lo es puesto que la definición de continuidad en un punto y, por tanto, la posibilidad de decidir sobre si una función es o no continua en dicho punto, parte de un punto del dominio de la función antes de definir la continuidad en el mismo. No olvidemos que el dominio de una función no tiene por qué ser un intervalo.

Por ejemplo, el dominio de la función $f(x) = \sqrt{Cos\,(2\pi x) - 1}$es Ẓ, el conjunto de los números enteros.

A veces en la definición se ponen desigualdades de menor o igual (y no estrictas), es decir, se dice que $f\colon D \subsetneq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0;\ \forall x \in D, |x - x_0| \leq \delta \ \Rightarrow\ |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$$

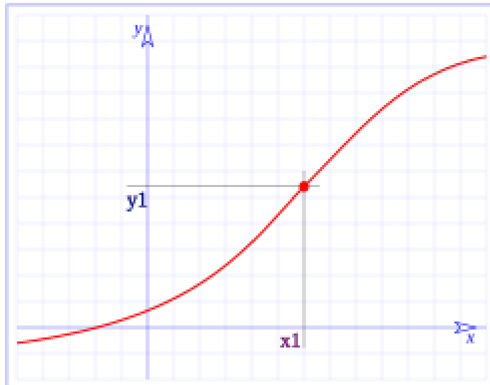
Esto no constituye un problema porque ambas versiones de la definición son equivalentes. En efecto, si f es continua por la primera definición y queremos ver que lo es por la segunda, para cada $\varepsilon > 0$ basta tomar como delta de la segunda definición $\delta/2$ donde $\delta > 0$ es el delta que da la primera definición. Análogamente, suponiendo cierta la segunda definición, podemos comprobar la primera tomando $\varepsilon/2$ en la segunda.

Conclusión:

En el caso de aplicaciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es común ver que se dice que una función f es continua en un punto $\mathbf{x_1}$ si existe **f($\mathbf{x_1}$)**, si existe el límite de **f(x)** cuando **x** tiende hacia $\mathbf{x_1}$ por la derecha, si existe el límite de **f(x)** cuando **x** tiende hacia $\mathbf{x_1}$ por la izquierda, y además ambos coinciden con **f($\mathbf{x_1}$)**. Esto implicaría que, dada una función, si no está definida en un punto, ésta no es continua en él, llegando a una situación como la siguiente: La función f:(0, 1) $\rightarrow \mathbb{R}$ definida como f(x) = x no es continua en 0 porque no está definida en dicho punto, pero tampoco es continua en 3 ni en 5. Esta definición, no satisfactoria, de continuidad está muy extendida, pero hay que recordar el requisito indispensable para poder hablar de continuidad de que el punto en el que se estudia la continuidad pertenezca al dominio. Si no está en el dominio, pero es punto de acumulación del mismo, podemos hablar de si puede o no extenderse con continuidad a dicho punto, pero no podemos decir que la función es discontinua en dicho punto (la función extendida sí podría ser discontinua, puesto que al incorporar dicho punto al dominio, tiene sentido plantearse el estudio de la continuidad en él).

Así pues, una función **f** continua en un punto de su dominio x_1 que, además, es punto de acumulación del mismo, implica lo siguiente:

$$= L_{(x_1)}\langle 7\rangle \left[\begin{array}{l} L_{(x_1)} = L^{+}_{(x_1)} = L^{-}_{(x_1)}\langle 5\rangle \left[\begin{array}{l} \exists L^{+}_{(x_1)} \wedge \exists L^{-}_{(x_1)}\langle 3\rangle \left[\begin{array}{l} \exists L^{+}_{(x_1)} = \lim\limits_{x\to {x_1}^{+}} f(x)\ \langle 1\rangle \\ \exists L^{-}_{(x_1)} = \lim\limits_{x\to {x_1}^{-}} f(x)\ \langle 2\rangle \end{array}\right. \\ L^{+}_{(x_1)} = L^{-}_{(x_1)}\langle 4\rangle \end{array}\right. \\ \exists f(x_1)\langle 6\rangle \end{array}\right.$$



$\langle 1 \rangle$ Existe el límite por la derecha:

$$\exists \lim_{x \to {x_1}^+} f(x) \in \mathbb{R}$$

$\langle 2 \rangle$ Existe el límite por la izquierda

$$\exists \lim_{x \to {x_1}^-} f(x) \in \mathbb{R}$$

$\langle 3 \rangle$ Existe el límite por la derecha y por la izquierda:

$$\exists \lim_{x \to {x_1}^+} f(x) \in \mathbb{R} \wedge \exists \lim_{x \to {x_1}^-} f(x) \in \mathbb{R}$$

$\langle 4 \rangle$ El límite por la derecha y por la izquierda y sus valores coinciden

$$\lim_{x \to {x_1}^+} f(x) = \lim_{x \to {x_1}^-} f(x)$$

$\langle 5 \rangle$ Si existen el límite por la derecha y por la izquierda y sus valores coinciden, la función tiene límite en este punto:

$$\lim_{x \to {x_1}^+} f(x) = \lim_{x \to {x_1}^-} f(x) = \lim_{x \to x_1} f(x)$$

$\langle 6 \rangle$ Existen $f(x_1)$:

$\exists f(x_1)$:

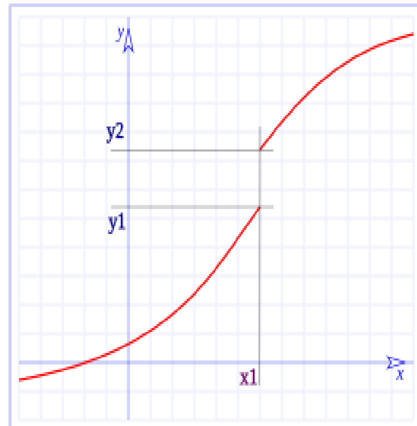
$\langle 7 \rangle$ El límite y el valor de la función coinciden:

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = f(x_1)$$

Se dice que una función es continua en un intervalo si es continua en todos sus puntos.

Si $f(x_1)= y_1$, la continuidad en x_1 se expresa así:

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = y_1$$



En lenguaje coloquial, cuando "x" se aproxima a "x_1", f(x) se aproxima a "***y_1***". Por definición de los límites, esto significa que para todo intervalo abierto J, centrado en y_1, existe un intervalo abierto I, centrado en x_1, tal que $f(I) \epsilon J$

Si **f** no es continua en un punto, el teorema cae en falta. En efecto, no todo intervalo **I** alrededor de **x_1** tiene su imagen en un intervalo **J** centrado en **y_1**, con un radio inferior al salto de **f**, no importa lo pequeño que este intervalo sea, hay valores de **x** del intervalo **I** alrededor de **x_1** que tiene su imagen en un intervalo **K** centrado en **y_2**, siendo **y_1** y **y_2** valores distintos, esto es: **x** tiene imágenes que se salen de **J**.

La ventaja de esta definición es que se puede generalizar a cualquier espacio..

Continuidad lateral

Una función f es continua por la izquierda en el punto x_1 si el límite lateral por la izquierda y el valor de la función en el punto son iguales. Es decir:

$$\lim_{x \to x_1^-} f(x) = f(x_1)$$

como se visualiza en la figura.

Una función f es continua por la derecha en el punto x_1 si su límite lateral por la derecha y el valor de la función en el punto son iguales. Es decir:

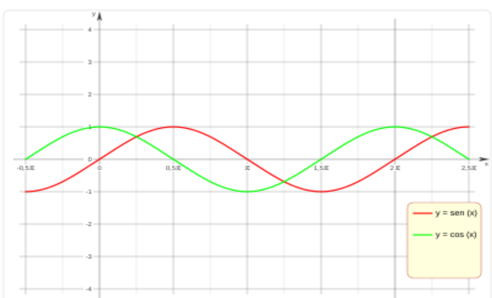
$$\lim_{x \to {x_1}^+} f(x) = f(x_1)$$

Una función f es continua en un punto si es continua por la izquierda y es continua por la derecha. Esto es:

$$\lim_{x \to {x_1}^-} f(x) = \lim_{x \to {x_1}^+} f(x) = f(x_1)$$

Algunas funciones continuas importantes

Las funciones polinómicas, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas son continuas en sus respectivos dominios de definición.
La función parabólica y polinómica, son un ejemplo de función continua a lo largo de todo el dominio real.



Funciones seno y coseno

En la gráfica se ve la función seno y coseno que es periódica, acotada y continua en todo el dominio real, dado su carácter periódico, con ver uno solo de los ciclos es suficiente para comprobar la continuidad, porque el resto de los ciclos son exactamente iguales

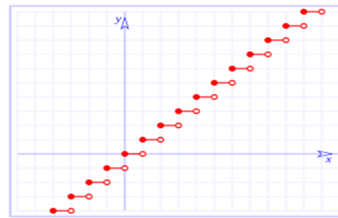
.

Funciones definidas por intervalos

Las funciones definidas para distintos intervalos de **x**, pueden ser discontinuas en los puntos de cambio de intervalo, como por ejemplo

La función parte entera de **x**, E(*x*), donde E(*x*) es el mayor numero entero inferior o igual a **x**, tal que:

$$:E(x) \leq x < E(x) + 1$$



. Su gráfica es una sucesión de segmentos horizontales a distintas alturas. Esta función no es continua en los enteros, pues los límites a la izquierda y a la derecha son diferentes, pero es continua en los segmentos abiertos (n, n+1) donde es constante.

Otras funciones definidas por intervalos son:

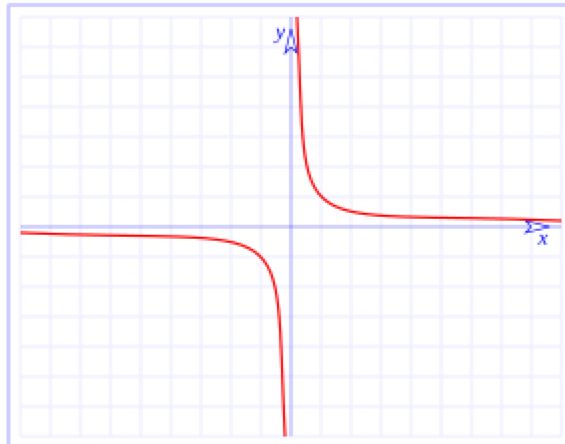
- Función escalón unitario
- Función signo

Función racional

Las funciones racionales son continuas en un intervalo adecuado. Un ejemplo de esto es la función inverso de **x**:

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Esta función es una hipérbola compuesta por dos tramos. **x** < 0 y **x** > 0. Como se puede ver, es continua en todo el dominio $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ porque no está definida en **x = 0**. Si se extiende el dominio de la función a **R** (dándole un valor arbitrario a f(0) la función será discontinua.



Teoremas sobre funciones continuas

Estos son algunos de los teoremas más importantes sobre funciones continuas.

1. Teorema de Weierstrass: Si *f* es continua en [a, b] entonces *f* tiene por lo menos un máximo y por lo menos un mínimo en dicho intervalo.
2. Teorema de Bolzano: Si *f* es continua en (a, b) y f(a) < 0 < f(b) o f(b) < 0 < f(a) entonces existe c є (a, b) tal que f(c) = 0
3. Teorema del valor intermedio. Si *f* es continua en [a, b] y k: f(a)< k < f(b) entonces existe c є (a, b) tal que f(c) = k
4. Acotación: Si *f* es una función sobre un conjunto compacto entonces, la función tiene un máximo o un mínimo (sobre un conjunto abierto se tiene el siguiente contra ejemplo la función $f(x) = {}^{1}/_{x}$ es continua sobre (0, 1) pero no es acotada).

Ejemplos de Continuidad de funciones

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones:

1.- $f(x) = 5$

Respuesta:

Esta función es polinómica de grado cero. Cuyo dominio es $Dom\ f$ ¿ $\mathbb{R}$. Luego esta función es continua en todos sus puntos.

2.- $f(x) = e$

Respuesta:

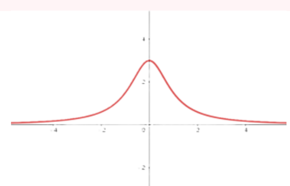
Esta función es polinómica de grado cero. Cuyo dominio es $Dom\ f = \mathbb{R}$. Luego esta función es continua en todos sus puntos

3.- $f(x) = 5x - 2$

Respuesta:

Esta función es polinómica de grado cero. Cuyo dominio es $Dom\ f = \mathbb{R}$. Luego esta función es continua en todos sus puntos

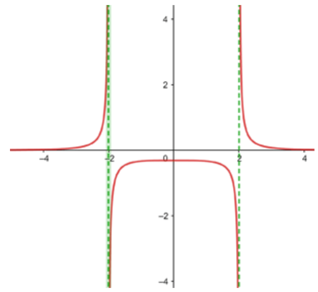
4.- $f(x) = \dfrac{5}{x^4 + 2}$



Respuesta:

Esta función es Racional cuyo denominador es un polinómica de grado cuatro (4). Su Dominio es $Dom\ f = \mathbb{R}$. ya que no posee limitación porque no existe número real que de cero- Luego esta función es continua en todos los puntos de su dominio

5.- $$f(x) = \frac{5}{x^2 - 4}$$



Respuesta:

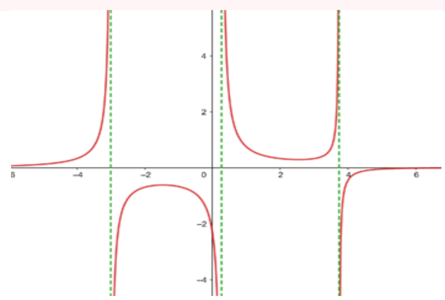
Esta función es Racional cuyo denominador es un polinómica de grado dos (2), la cual es continua en todos los puntos de los números reales menos en los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm\sqrt{4} \quad \Rightarrow \quad x \neq \pm 2$$

Ósea, $Dom\, f = \mathbb{R} - \{-2.2\}$

Esta funcion posee dos puntos de discontinuidad en los valores de x = -2 y x = 2.

6.- $$f(x) = \frac{x - 7}{x^3 - x^2 - 11x + 3}$$



Respuesta:

Esta función es Racional cuyo denominador es un polinómica de grado tres (3), la cual es continua en todos los puntos de los números reales menos en los valores que anulan el denominador; para determinar dichos puntos igualamos esta expresión (denominador) a cero y resolvemos la ecuación obtendremos

los puntos de discontinuidad

$$x^3 - x^2 - 11x + 3 = 0$$

Aplicamos Ruffini para obtener sus raíces

	1	−1	−11	3
−3		−3	12	−3
	1	−4	1	0

Como x = -3 ⇒ (x + 3) = 0; podemos seguir aplicando Ruffini u otro método (fractorizacion o resolvente cuadrática) para obtener las otras raices

Usando la resolvente cuadrática se tiene oara la expresión $x^2 - 4x + 1 = 0$

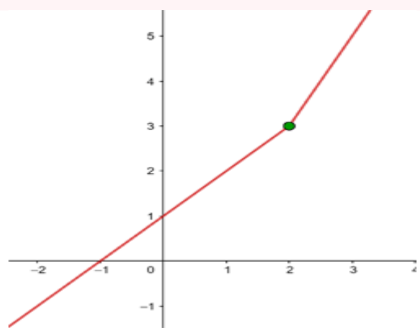
$$x_{a,b} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16-4}}{2}$$

$$x_{a,b} = \frac{4}{2} \pm \frac{\sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{3} \\ x = 2 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(x - 2 - \sqrt{3}\right) = 0 \\ \left(x - 2 + \sqrt{3}\right) = 9 \end{cases}$$

La función tiene tres puntos de discontinuidad en los valores de

$x = -3$, $x = 2 + \sqrt{3}$ y $x = 2 - \sqrt{3}$

7.- $f(x) = \begin{cases} x + 1; si\ x < 2 \\ 2x - 1, si\ x \geq 2 \end{cases}$



Respuesta:

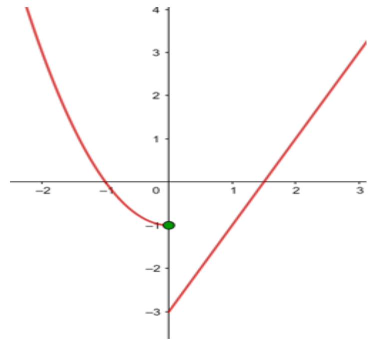
Estudiando la funcion según los intervalos, notamos

$f(2) = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$ $\qquad \lim_{x \to 2^-} (x + 1) = 2 + 1 = 3$

$\lim_{x \to 2^+} (2x - 1) = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$

La función es continua en toda $\mathbb{R}$

8.- $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1; si\ x \leq 0 \\ 2x - 3, si\ x > 2 \end{cases}$



Respuesta:

Estudiando la funcion según los intervalos o tramos de existencia, notamos

$f(0) = 0)^2 - 1 = 0 - 1 = -1$

$\lim_{x \to 0^-} (x^2 - 1) = 0 - 1 = -1$

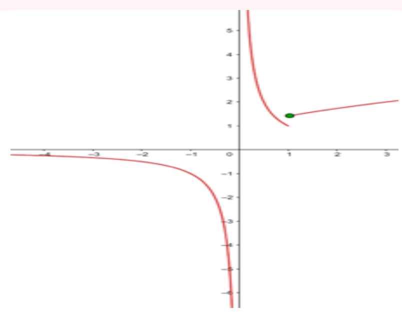
$\lim_{x \to 0^+} (2x - 3) = 2(0) - 3 = 0 - 3$

$= -3$

La función Salto =$|-1 - (-3)| =$ $|-1 + 3| = |2| = 2$

La función es discontinua inevitable de salto 2 en x = 0

9 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}; si\ 0 < x < 1 \\ \sqrt{x + 1}, si\ x \geq 1 \end{cases}$



Respuesta:

Estudiando la funcion según los intervalos o tramos de existencia, notamos

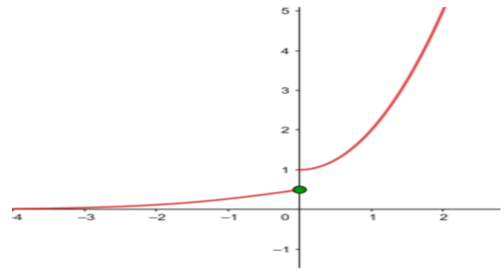
$f(1) = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1} = 1$

$\lim_{x \to 1^+} \sqrt{x + 1} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

La función en x = 1 es discontinua de salto finito

10 $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x+1}; si\ x \le 0 \\ x^2+1, si\ x > 0 \end{cases}$$



Respuesta:

Estudiando la funcion según los intervalos o tramos de existencia, notamos

$$f(0) = \frac{e^0}{e^0+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) = \left(\frac{e^9}{e^0+1}\right) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^2+1 = 0^2+1 = 1$$

La función es discontinua inevitable de Salto = $\left|\frac{1}{2}-1\right| = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ en x = 0

Calcular valores para garantizar la continuidad

1 Calcular el valor de a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+a}$$

Respuesta

La función es discontinua cuando $x^2+a=0$. Que solución solamente si a es negativa o cero. Por lo tanto, f(x) es continua si "a" es positiva.

2 Calcular el valor de "b" para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, si\ x \le 1 \\ 3-bx^2, si\ x > 1 \end{cases}$$

Respuesta

Estudiando la funcion según los intervalos o tramos de existencia, notamos

$$f(2) = (1)+1 = 2$$

$$\lim_{x\to 1^-}(x+1) = (1+1) = 2$$

$$\lim_{x\to 1^+}(3-bx^2) = 3-b(1)^2 = 3-b$$

Para que la función sea continua se

debe cumplir $3 - b = 2 \Rightarrow b = 1$

Calcular el valor de "b" para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, si\ x \leq -1 \\ 5 - bx, si\ x > -1 \end{cases}$$

Respuesta

Estudiando la funcion según los intervalos o tramos de existencia, notamos

$f(-1) = (-1) + 1 = -1 + 1 = 0$

$\lim_{x \to -1^-} (x + 1) = (-1 + 1) = 0$

$\lim_{x \to -1^+} (5 - bx) = 5 - b(-1) = 5 + b$

Para que la función sea continua se debe cumplir $5 + b = 0 \Rightarrow b = -5$

Autoevaluación

1. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

1. $$f(x) = \frac{2}{2 - x^2}$$

2. $$f(x) = 3^{-x}$$

3. $$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{x}}, si\ x > 0 \\ 0. si\ x = 0 \end{cases}$$

4. $$f(x) = \begin{cases} x. Sen\left(\frac{1}{x}\right), si\ x \neq 0 \\ 0. si\ x = 0 \end{cases}$$

5. $$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 25}{x - 5}, si\ x \neq 5 \\ 0. si\ x = 5 \end{cases}$$

6. $$f(x) = \frac{x + 2}{|x - 1|}$$

7. $$f(x) = \begin{cases} x^2, si\ 0 < x < 1 \\ x + 2, si\ 1 \leq x < 2 \\ x - 3, si\ 2 \leq x < 3 \end{cases}$$

8. $$f(x) = \frac{x - 2}{4 - x^2}$$

2. Calcular el valor de a para que la función siguiente sea continua

1. $$f(x) = \begin{cases} \sqrt{bx}, si\ 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{x^2 - 16}{x - 4}, si\ x > 4 \end{cases}$$

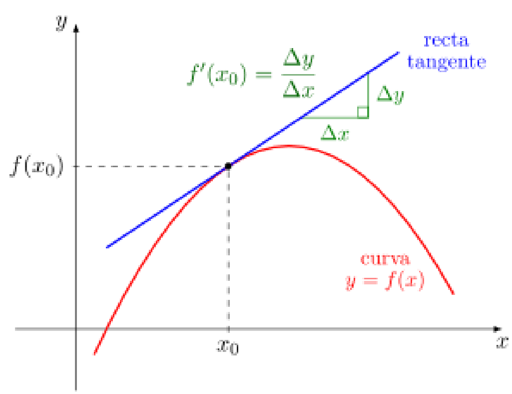
2. $$f(x) = \begin{cases} x^3, si\ x \leq 2 \\ bx^2 - 1, si\ x > 2 \end{cases}$$

Unidad 3

DERIVADAS DE FUNCIONES

La derivada de una función en un punto determinado nos indica la tasa de cambio o pendiente de la línea tangente a la función en dicho punto. Al estudiar el movimiento de un cuerpo; la diferencial dela función de posición para un momento dado, se obtiene la velocidad en dicho momento. Podemos concluir razonablemente que al conocer la derivada de la función en cada punto obtendríamos valiosa información del comportamiento de la función.

Pero, el proceso de hallar la derivada para algunos valores resulta en ocasiones incómodo. En esta etapa de estudio definiremos la función derivada y aprenderemos un proceso para encontrarla**.**



La derivada en la linea del tiempo.

Los problemas típicos que dieron origen al calculo infinitesimal se remonta a la época clásica de la Grecia antigua (siglo III A. C.), aunque su resolución sistemáticos se plantea diecinueve siglos después (en el siglo XVII) mediante los planteamientos desarrollados por Isaac Newton y Gottfried Leibniz.

Las derivadas posee dos conceptos de tipo geométrico que le dieron origen:

- El problema de la tangente a una curva (Apolonio de Perge))
- El Teorema de los extremos:;máximos y mínimos (Pierre de Fermat)

Estos dieron origen a lo que actualmente se conoce como calculo diferencial.

Los matemáticos del siglo XVII perdieron el miedo que los griegos les habían tenido a los infinitesimales; Johannes Kepler y Bonaventura Cavalieri iniciaron su aplicación, que en medio siglo llevo al descubrimiento del cálculo infinitesimal.

A mediados del siglo XVII las cantidades infinitesimales fueron cada vez más usadas para resolver problemas de cálculos de tangentes, áreas, volúmenes; los primeros darían origen al cálculo diferencial, los otros al integral.

Finalizando el siglo XVII se sintetizaron en dos conceptos los algoritmos usados por sus predecesores, en lo que hoy llamamos "derivada" e "integral". La historia de la matemática reconoce que Isaac Newton y Gottfried Leibniz son los creadores del cálculo diferencial e integral. Ellos desarrollaron reglas para manipular las derivadas (reglas de derivación) e Isaac Barrow demostró que la derivación y la integración son operaciones inversas.

Newton desarrolló en Cambridge su propio método para el cálculo de tangentes. En 1665 encontró un algoritmo para derivar funciones algebraicas que coincidía con el descubierto por Fermat. A finales de 1665 se dedicó a reestructurar las bases de su cálculo, intentando desligarse de los infinitesimales, e introdujo el concepto de fluxión, que para él era la velocidad con la que una variable «fluye» (varía) con el tiempo.

Gottfried Leibniz, por su parte, formuló y desarrolló el cálculo diferencial en 1675. Fue el primero en publicar los mismos resultados que Isaac Newton descubriera 10 años antes, de manera independiente. En su investigación conservó un carácter geométrico y trató a la derivada como un cociente incremental y no como una velocidad, viendo el sentido de su correspondencia con la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto.

Leibniz es el creador de diversos símbolos matemáticos. A él se deben los nombres de: calculo diferencial y calculo integral, así como los símbolos de derivada $\frac{dy}{dx}$ y el el símbolo de la integral $\int$.

Conceptos y aplicaciones

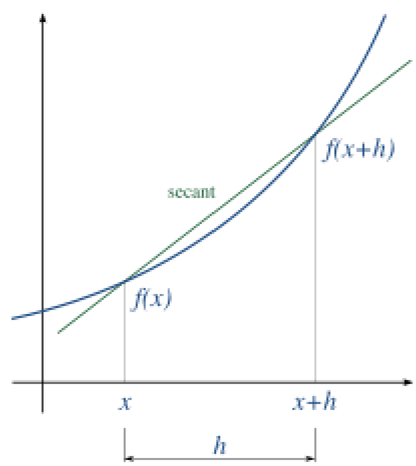
El concepto de derivada es uno de los conceptos básicos del análisis matemático. Según Albert Einstein, el mayor aporte que se obtuvo de las derivadas fue la posibilidad de formular diversos problemas de la física mediante ecuaciones diferenciales..

La derivada es un concepto que tiene variadas aplicaciones. Se aplica en aquellos casos donde es necesario medir la rapidez con que se produce el cambio de una magnitud o situación. Es una herramienta de cálculo fundamental en los estudios de Física, Química y Biología, o en ciencias sociales como la Economía y la Sociología. Por ejemplo, cuando se refiere a la grafica de dos dimensiones de *f*, se considera la derivada como la pendiente de la recta tangente del gráfico en el punto x. Se puede aproximar la pendiente de esta tangente como el limite cuando la distancia entre los dos puntos que determinan una recta secante tiende a cero, es decir, se transforma la recta secante en una recta tangente. Con esta interpretación, pueden determinarse muchas propiedades geométricas de los gráficos de funciones, tales como monotonía de una función (creciente o decreciente) y la concavidad o convexidad.

Algunas funciones no tienen derivada en todos o en alguno de sus puntos. Por ejemplo, una función no tiene derivada en los puntos en que se tiene una tangente vertical, una discontinuidad o un punto anguloso. Afortunadamente, gran cantidad de funciones que se consideran en las aplicaciones prácticas son continuas y su gráfica es una curva suave, por lo que es susceptible de derivación.

Las funciones que son diferenciables (derivables si se habla en una sola variable), son aproximables linealmente.

Derivada en un punto a partir de cocientes diferenciales



Recta secante entre *f*(*x*) y *f*(*x* + *h*)

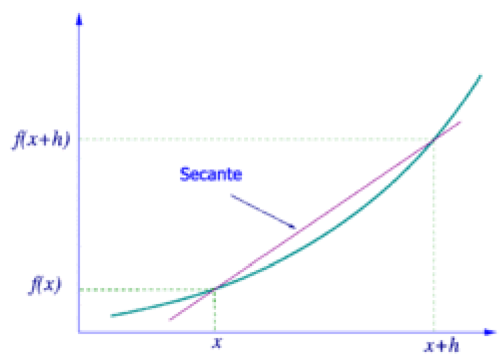
La derivada de una función *f* en el punto “a” es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto “a”. El valor de esta pendiente será aproximadamente igual a la pendiente de una recta secante a la gráfica que pase por el punto (a, f(a)) y por un punto cercano (x, f(x)), por conveniencia suele expresarse x = a + h, donde h es un número cercano a 0. A partir de estos dos puntos se calcula la pendiente de la recta secante como:

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(Esta expresión se denomina “cociente diferencial” o “cociente de Newton”) A medida que el número h se acerca a cero, el valor de esta pendiente se aproximará mejor al de la recta tangente. Esto permite definir la derivada de la función *f* en el punto “a” denotada como $f'(x)$, como el Limite de estos cocientes cuando h tiende a cero:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

No obstante, esta definición sólo es válida cuando el límite es un número real en los puntos ”a” donde el límite no existe, la función *f* no tiene derivada.



Inclinación de la secante de la curva *y* = *f*(*x*)

Derivada de una función

Dada una función *f*, se puede definir una nueva función que, en cada punto x, toma el valor de la derivada $f'(x)$. Esta función se denota f' y se deno mina función derivada *f* o simplemente derivada de *f*. Esto es, la derivada de *f* es la función dada por.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Esta función sólo está definida en los puntos del dominio de *f* donde el límite existe; en otras palabras, el dominio de f' está contenido en el de *f*.

Ejemplos

Considere la función cuadrática $f(x) = x^2$ definida para todo x є ℝ Se trata de calcular la derivada de esta función aplicando la definición

Solución:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - (x)^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h}$$

$$n$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} \lim_{h \to 0}(2x+h) = 2x$$

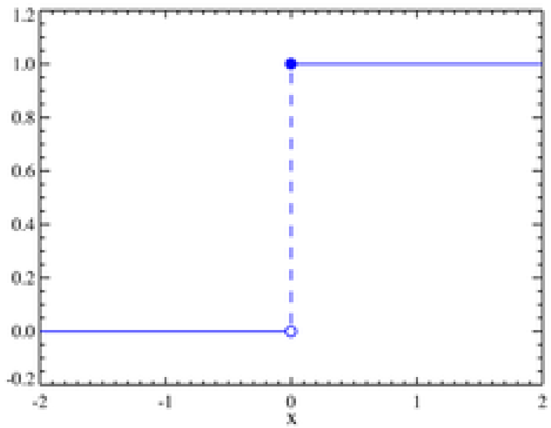
Continuidad y diferenciabilidad

La continuidad es necesaria

Para que una función sea derivable en un punto es necesario que también sea continua en ese punto: intuitivamente, si la gráfica de una función está "partida" en un punto, no hay una forma de trazar una recta tangente a la gráfica. Más precisamente, esto se debe a que, si una función *f* no es continua en un punto "a" entonces la diferencia entre el valor f(a) y el valor en un punto cercano f(a + h) no va a tender a 0 a medida que la distancia h entre los dos puntos tiende a 0; de hecho, el límite $\lim_{h \to 0} f(a + H) - f(a)$ no tiene por qué estar bien definido si los dos límites laterales no son iguales. Tanto si este límite no existe como si existe pero es distinto de 0, el cociente diferencial

$$\frac{f(a+H) - f(a)}{h}$$

no tendrá un límite definido.



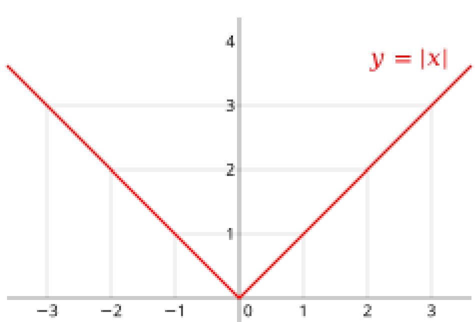
La función de Heaviside no es continua en x = 0

Por ejemplo la función de Heaviside no es continua, dicha función de define como

$$f(x) = \begin{cases} 1, & si\ x \geq 0 \\ 0, & si\ x < 0 \end{cases}$$

Esta función no es continua en x = 0 el valor de la función en este punto es 1, pero en todos los puntos a su izquierda la función vale 0. En este caso, el límite por la izquierda de la diferencia $f(a+H) - f(a)$ es igual a 1, por lo que el cociente diferencial no tendrá un límite bien definido.

La continuidad no es suficiente



La función valor absoluto no tiene derivada en el punto .

La relación no funciona a la inversa: el que una función sea continua no garantiza su derivabilidad. Es posible que los límites laterales sean iguales pero las derivadas laterales no; en este caso concreto, la función presenta un punto anguloso en dicho punto.

Por ejemplo es la función valor absoluto $f(x) = |x|$, que se define como.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & si\ x \geq 0 \\ -x, & si\ x < 0 \end{cases}$$

Esta función es continua en el punto: x = 0 en este punto la función toma el valor 0, y para valores de x infinitamente cercanos a 0, tanto positivos como negativos, el valor de la función tiende a 0. Sin embargo, no es derivable: la derivada lateral por la derecha de x = 0 es igual a 1, mientras que por la izquierda la derivada lateral vale -1. Como las derivadas laterales dan resultados diferentes, no existe derivada en x = 0 a pesar de que la función sea continua en dicho punto. De manera informal, si el gráfico de la función tiene puntas agudas, se interrumpe o tiene saltos, no es derivable. Sin embargo, la función f(x)=x|x| es diferenciable para todo x.

Notación

la derivada posee diversas formas de ser nombrada. Si *f* es una función, la derivada de la función *f* respecto a x, se escribe en varios modos.

Notación de Lagrange

La notación más simple para derivación, en uso actual, se debe a Lagrange.

La cual consiste en denotar la derivada de una función *f(x)* como $f'(x)$ se lee “f prima de x”. Esta notación se extiende a derivadas de orden superior, dando lugar a $f''(x)$(“f segunda de x” o “f dos prima de x”) para la derivada segunda, y a $f'''(x)$ para la derivada tercera. Las derivadas cuartas y siguientes se pueden denotar de dos formas:

- Con números romanos: $f^{IV}(x)$,
- Con números entre paréntesis: $f^{(IV)}(x)$,.

Esta última opción da lugar también a la notación para denotar $f^{(n)}(x)$ la derivada *n*-ésima de f

Notación de Leibniz

Otra notación común para la diferenciación es debida a Leibniz. Para la función derivada de *f*, se escribe:

$$\frac{d(f(x))}{dx}$$

También puede encontrarse como $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$, o $\frac{d}{dx}f(x)$. Se lee “derivada de y (*f o f* de x) con respecto a x”. Esta notación tiene la ventaja de sugerir a la derivada de una función con respecto a otra como un cociente de diferenciales.

Con esta notación, se puede escribir la derivada de *f* en el punto ”a” de dos modos diferentes:

$$\left.\frac{df}{dx}\right]_{xx=a} \left(\frac{d(f(x))}{dx}\right)(a)$$

Si y = f(x) se puede escribir la derivada como

$$\frac{dy}{dx}$$

Las derivadas sucesivas se expresan como

$$\frac{d^n f}{dx^n} \ o \ \frac{d^n y}{dx^n}$$

para la enésima derivada *de f* o de y respectivamente.

La notación de Leibniz es muy útil, por cuanto permite especificar la variable de diferenciación (en el denominador); lo cual es pertinente en caso de diferenciación parcial. También facilita recordar la regla de la cadena, porque los términos «d» parecen cancelarse simbólicamente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

En la formulación popular del cálculo mediante límites, los términos "d" *no pueden* cancelarse literalmente, porque por sí mismos son indefinidos; son definidos solamente cuando se usan juntos para expresar una derivada.

En análisis no estándar, no obstante, se pueden ver números infinitesimales que se cancelan. Ciertamente, Leibnitz (sí) consideró la derivada *dy/dx* como el cociente de dos "infinitésimos" *dy* y *dx*, llamados "diferenciales". Estos infinitésimos no eran números sino cantidades más pequeños que cualquier número positivo.

Notación de Newton

La notación de Newton para la diferenciación respecto al tiempo, era poner un punto arriba del nombre de la función:

$$\dot{x} = x'(t) \qquad \ddot{x} = x''(t)$$

y así sucesivamente.

Se lee "punto x" o "x punto". En la actualmente su uso está limitado al áreas de la física como la mecánica, donde otras notaciones de la derivada se pueden confundir con la notación de velocidad relativa. Se usa para definir la derivada temporal de una variable.

Esta notación de Newton se usa principalmente en mecánica, normalmente para derivadas que involucran la variable tiempo, como variable independiente; tales como velocidad y aceleración, y en teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias. Usualmente solo se emplea para las primeras y segundas derivadas.

Notación de Euler

$D_x f$ o $\partial_x f$ (Notaciones de Euler y Jacobi, respectivamente) se lee *"d sub x de f"*, y los símbolos D y ∂ deben entenderse como operadores diferenciales.

Cálculo de la derivada

La derivada de una función, puede ser calculada mediante la fórmula que la definición, realizando el cociente de diferencias y calculando su límite. Pero, en algunos casos esto puede resultar laborioso. En la práctica existen fórmulas precalculadas para las derivadas de las funciones más simples, mientras que para las funciones más complicadas se utilizan una serie de reglas que permitan reducir el problema al cálculo de la derivada de funciones más sencillas. Por ejemplo, para calcular la derivada de la función $Cos\,(x^2)$ bastaría con conocer: la derivada de x^2, la derivada de $Cos\,(x)$, y cómo derivar una composición de funciones.

Derivadas por definición

La derivada es un concepto fundamental en análisis matemático que describe la tasa de cambio instantáneo de una función en un punto dado.

En otras palabras, representa cómo una función cambia en respuesta a cambios infinitesimales en su variable independiente.

La derivada de una función *f(x)* en un punto $x = a$ se denota comúnmente por $f'(a)$. Matemáticamente, la derivada se define mediante el límite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Si este límite existe, la función es derivable o diferenciable en el punto $x = a$. Geométricamente, la derivada en un punto representa la pendiente de la recta tangente a la curva de la función en ese punto. A continuación, calcula, mediante la definición de derivada, la derivada de las funciones en los puntos que se indican.

Para los ejercicios siguientes, determine su derivada en el punto señalado.

1,. $f(x) = 2x^2 - 5\rfloor_{x=1}$

Solución

Sustituimos el valor de x en la función y en la definición de la derivada:

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(1+h)^2 - 5 - (2(1)^2 - 5)}{h}$$

Resolvemos las operaciones y calculamos el límite

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{2(1+2h + h^2) - 5 - (2 - 5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2 + 4h + 2h^2 - 5 - (-3)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{2h(2+h) - 3 + 3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h(2+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2(2+h) = 2(2) = 4$$

Finalmente

$$f'(1) = 4$$

2.. $f(x) = 5x^2 - 2x + 4$

Solución

Utilizando la definición de la derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(x+h)^2 - 2(x+h) + 4 - (5x^2 - 2x + 4)}{h}$$

Resolvemos las operaciones y simplificando.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{5(x^2 + 2xh + h^2) - 2x - 2h + 4 - 5x^2 + 2x - 4}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 - 2h - 5x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5h^2 + 10xh - 2h}{h}$$

Sacando factor común h, simplificando y luego evaluando se tiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(5h + 10x - 2)}{h} = \lim_{h \to 0}(5h + 10x - 2) = 5(0) + 10x - 2 = 10x - 2$$

Finalmente

$$f'(x) = 10x - 2$$

Derivadas de funciones elementales

La mayor parte de los cálculos de derivadas requieren tomar eventualmente la derivada de algunas funciones comunes. La siguiente tabla incompleta proporciona algunas de las más frecuentes funciones de una variable real usadas y sus derivadas.

Tabla de derivadas de las funciones básicas

Grupo	Función	Derivada
Función potencia	Función constante $f(x) = k, k \epsilon \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$
	Función identidad $f(x) = x$	$f'(x) = 1$
	Multiplicación por una constante: $f(x) = k\ g(x), k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = kg'(x)$
	Potencia de exponente natural: $f(x) = x^n;\ \mathrm{n} = 0, 1, 2, 3, \ldots$	$f'(x) = nx^{n-1}$

	Función raíz cuadrada $f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
	Función recíproca $f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
	Caso general $f(x) = x^r; \mathrm{r} \in \mathbb{R}$	$f'(x) = rx^{r-1}$
Función exponencial	Base e : $f(x) = e$	$f'(x) = e;$
	Caso general: $f(x) = a^x :\ \mathrm{r} \in \mathbb{R}, \mathrm{a} > 0$	$f'(x) = a^x\ L, n\ a$
Función Logarítmica	Logaritmo en base e: $f(x) = \ln \mathrm{x}$	$f'(x) = \frac{1}{x}; x > 0$
	Caso general: $f(x) = \log_a(x)\,;\ a \epsilon \mathbb{R};\ a > 0$	$f'(x) = \frac{1}{x\ Ln(a)}$
Funciones trigonométricas	Función seno: $f(x) = Sen\ (x)$	$f'(x) = Cos\ (x)$
	Función coseno: $f(x) = Cos\ (x)$	$f'(x) = -Sen\ (x)$
	Función tangente: $f(x) = Tan\ (x)$	$f'(x) = Sec^2(x)$
Funciones trigonométricas inversas	Función arcoseno: $f(x) = Sen^{-1}\ (x)$	$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	Función arcocoseno: $f(x) = Cos^{-1}\ (x)$	$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
	Función arcotangente: $f(x) = Tan^{-1}\ (x)$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$
Funciones hiperbólicas	Función seno hiperbólico: $f(x) = Senh\ (x)$	$f'(x) = Cosh\ (x)$

	Función coseno hiperbólico: $f(x) = Cosh\ (x)$	$f'(x) = Senh\ (x)$
	Función tangente hiperbólico: $f(x) = Tan\ (x)$	$f'(x) = Sech^2(x)$

Reglas usuales de derivación

En muchos casos, el cálculo de límites complicados mediante la aplicación directa del cociente de diferencias de Newton puede ser anulado mediante la aplicación de reglas de diferenciación. Algunas de las reglas más básicas son las siguientes:

- *Regla de la constante*: si *f*(*x*) es constante, entonces:

$$f' = 0$$

- *Regla de la suma*:

$(f + g)' = f' + g'$, para toda función *f* y *g* y todo número real α y β

- *Regla del producto*

$$(f.g)' = f'g + fg'$$

para toda función *f* y *g*. Por extensión, esto significa que la derivada de una constante multiplicada por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función. Por ejemplo=

$$(\pi r^2)' = (\pi)'r + \pi(r^2)' = (0)r + \pi(2r) = 2\pi r$$

- Regla del cociente:

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

para toda función *f* y *g* para todos aquellos valores tales que *g* ≠ 0.

- Regla de la cadena:

Si $f(x) = h(g(x))$, siendo g derivable en x, y h derivable en g(x), entonces
$f'(x) = h'\big(g(x)\big).g'(x)$,

Ejemplo del cálculo de derivadas

Hallar la derivada de

$$f(x) = x^4 + Sen(x^2) - Ln(x)e^x + 7$$

El segundo término se calculó usando la regla de la cadena y además en el tercero de esta suma algebraica debemos aplicar la regla del producto. La derivadas conocidas de funciones elementales x^2, x^4, Sen (x), ln (x) y exp (x) = e^x, así como la constante 7, también fueron usadas.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^{(4-1)} + \frac{d\left(x^2\right)}{dx}\cos(x^2) - \frac{d\left(\ln x\right)}{dx}e^x - \ln x\frac{d\left(e^x\right)}{dx} + 0 \\ &= 4x^3 + 2x\cos(x^2) - \frac{1}{x}e^x - \ln(x)e^x. \end{aligned}$$

Diferenciabilidad

Una función con dominio en un subconjunto de los reales es diferenciable en un punto x si su derivada existe en ese punto; una función es diferenciable en un intervalo abierto si es diferenciable en todos los puntos del intervalo.

Si una función es diferenciable en un punto x, la función es continua en ese punto. Sin embargo, una función continua en x, puede no ser diferenciable en dicho punto (punto crítico). En otras palabras, diferenciabilidad implica continuidad, pero no su recíproco.

La derivada de una función diferenciable puede ser, a su vez, diferenciable. La derivada de una primera derivada se llama derivada segunda. De un modo parecido, la derivada de una derivada segunda es la derivada tercera, y así sucesivamente. Esto también recibe el nombre de derivación sucesiva o derivadas de orden superior.

Función implícita

Una función definida en forma implícita, es cuando no aparece despejada la variable “y”, sino que la relación entre la variable independiente “x” y la variable dependiente “y” esta expresada mediante una ecuación de dos variable donde el segundo miembro es una constante.

- Una función explicita se presenta de la forma y = f(x), por ejemplo $y = 3x^4$
- Una función implícita se expresa como f(x y) = k, nuestro ejemplo anterior es$-3x^4 + y = 0$

Derivadas de funciones implícitas

Hallar la derivada en forma implícita no necesitamos despejar la variable dependiente “y”. expresamos la derivar ambos miembro derecho e izquierdo de la igualdad con respecto a la misma variable, y las reglas señaladas; se debe recordar que

:a) $\frac{d}{dx}x = x' = 1$ b) $\frac{d}{dx}x = x'$ c) $\frac{d}{dx}f(y(x)) = f'(y(x))y'(x)$

Las funciones más complejas se usa una regla prayica que facilitar su cálculo:

$F_x + F_y = 0.$

Expresad como derivada implícita de la siguiente manera.

$$F'_x + F'_y y' = 0$$

Despejando y' resulta la siguiente fórmula

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

Derivadas sucesivas de una función.

Si derivamos una función de variable real continua, se obtiene una nueva función, la cual se puede derivar nuevamente. A esta derivada de la derivada de una función se le llama segunda derivada y si continuamos derivando las derivadas obtenidas de una ya derivada, se le conoce como derivadas de orden superior o derivadas sucesivas, siendo la primera derivada la ordinaria.

Este tipo de derivadas orden superior son importante al ser una herramienta matemática muy versátil que permite evaluar el cambio en una función, y su aplicación depende mucho de las interpretaciones que se hagan de sus resultados. Muchos problemas requieren de la estimación de múltiples derivadas sucesivas.

Ejemplo:

1. Obtenga la cuarta derivada de la función

$$f(x) = 3x^8 + x^6 + 2x^5 - 5x^2 + 10x - 5$$

Su primera derivada de la función es:

$$D_x f(x) = f^{(1)}(x) = 24x^7 + 6x^5 + 10x^4 - 10x + 10$$

Su segunda derivada

$$D_x^2\ f(x) = f^{(2)}(x) = 168x^6 + 30x^4 + 40x^3 - 10$$

Su tercera derivada

$$D_x^3\ f(x) = f^{(3)}(x) = 1008x^5 + 120x^3 \mp 120x^2$$

Su cuarta derivada

$$D_x^4\, f(x) = f^{(4)}(x) = 5040x^4 + 360x^2 + 240x$$

Ejemplos de derivación

Realizar los siguientes ejercicios detallando lo más posible, aplicando las tablas de derivadas y sus operaciones

Ejemplos de derivadas usando sus propiedades

01,. Realizar $f(x) = Ln\left(Tan\ (x^3)\right)$

Solución

Para ello se emplea la regla de la cadena, dada la composición de tres funciones

$$h(g\left(f(x)\right))$$

su derivada es

$$\frac{d}{dx}\left(h\left(g\left(f(x)\right)\right)\right) = \frac{dh}{dg}\frac{dg}{df}\frac{df}{dx} = h'\left(g\left(f(x)\right)\right)g'\left(f(x)\right)f'(x)$$

En el ejercicio tenemos $h(x) = Ln\ (x),\ g(x) = Tan\ (x) y\ f(x) = x^3$ entonces, nuestra derivada es

$$f'(x) = \left[Ln\left(Tan\ (x^3)\right)\right]' = \frac{1}{\left(Tan\ (x^3)\right)}\left(\left(Tan\ (x^3)\right)\right)'$$

$$= \frac{1}{\left(Tan\ (x^3)\right)}Sec^2(x^3)(x^3)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(Tan\ (x^3)\right)}Sec^2(x^3)(3x^2) = \frac{3x^2 Sec^2(x^3)}{\left(Tan\ (x^3)\right)}$$

02,. Realizar $f(x) = Sen\ (2 - 5x)$

Solución

Para ello se emplea la regla de la cadena, dada la composición de dos funciones

$$g(f(x))$$

su derivada es

$$\frac{d}{dx}\left(g(f(x))\right) = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx} = g'(f(x))f'(x)$$

En el ejercicio tenemos $g(x) = Sen\ (x) y\ f(x) = (2 - 5x)$ entonces, nuestra derivada es

$$f'(x) = [Sen\ (2-5x)]' = Cos\ (2-5x)\left((2-5x)\right)' = Cos\ (2-5x)(-5)$$

$$f'(x) = -5Cos\ (2-5x)$$

03,. Realizar $f(x) = Cos\ \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

Solución

Para ello se emplea la regla de la cadena, dada la composición de dos funciones

$$g(f(x))$$

su derivada es

$$\frac{d}{dx}\left(g(f(x))\right) = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx} = g'(f(x))f'(x)$$

En el ejercicio tenemos $g(x) = Cos\ (x) y\ f(x) = \left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ entonces, nuestra derivada es

$$f'(x) = \left[Cos\ \left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right]' = -Sen\ \left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left(\frac{x-1}{x+1}\right)'$$

$$f'(x) = -Sen\ \left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left[\frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2}\right]$$

$$f'(x) = -Sen\ \left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left[\frac{1(x+1) - (x-1)1}{(x+1)^2}\right]$$

$$f'(x) = -Sen\ \left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left[\frac{x+1-x+1}{(x+1)^2}\right] = -Sen\ \left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left[\frac{2}{(x+1)^2}\right]$$

Por lo tanto

$$f'(x) = -Sen\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\left[\frac{2}{(x+1)^2}\right]$$

.

04,. Realizar

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 - Cos\, x}{1 + Cos\, x}}$$

Solución

Para ello se emplea la regla de la cadena, dada la composición de dos funciones

$$g\big(f(x)\big)$$

su derivada es

$$\frac{d}{dx}\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx} = g'\big(f(x)\big)f'(x)$$

En el ejercicio tenemos $g(x) = \sqrt{x}y\; f(x) = \left(\frac{1-Cos\, x}{1+Cos\, x}\right)$ entonces, nuestra derivada es

$$f'(x) = \left[\sqrt{\frac{1 - Cos\, x}{1 + Cos\, x}}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1 - Cos\, x}{1 + Cos\, x}}}\left(\frac{1 - Cos\, x}{1 + Cos\, x}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\frac{\sqrt{1 - Cos\, x}}{\sqrt{1 + Cos\, x}}}\left[\frac{(1 - Cos\, x)'(1 + Cos\, x) - (1 - Cos\, x)(1 + Cos\, x)'}{(1 + Cos\, x)^2}\right]$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1 + Cos\, x}}{2\sqrt{1 - Cos\, x}}\left[\frac{(Sen\, x)(1 + Cos\, x) - (1 - Cos\, x)(-Sen\, x)}{(1 + Cos\, x)^2}\right]$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1 + Cos\, x}}{2\sqrt{1 - Cos\, x}}\left[\frac{Sen(x) + Sen\,(x)\,Cos\,(x) + Sen\,(x) - Sen\,(x)Cos\,(x)}{(1 + Cos\, x)^2}\right]$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1 + Cos\, x}}{2\sqrt{1 - Cos\, x}}\left[\frac{2Sen(x)}{(1 + Cos\, x)^2}\right] = \frac{\sqrt{1 + Cos\, x}}{\sqrt{1 - Cos\, x}}\left[\frac{Sen(x)}{(1 + Cos\, x)^2}\right]$$

Racionalizando el numerador

$$f'(x) = \frac{\sqrt{1 + Cos\, x}}{\sqrt{1 - Cos\, x}} \left[\frac{Sen(x)}{(1 + Cos\, x)^2} \right] \frac{\sqrt{1 + Cos\, x}}{\sqrt{1 + Cos\, x}}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{(1 + Cos\, x)^2}}{\sqrt{(1 - Cos\, x)(1 + Cos\, x)}} \left[\frac{Sen(x)}{(1 + Cos\, x)^2} \right]$$

$$= \frac{(1 + Cos\, x)}{\sqrt{(1 - Cos^2\, x)}} \left[\frac{Sen(x)}{(1 + Cos\, x)^2} \right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{Sen^2\,(x)}} \left[\frac{Sen(x)}{(1 + Cos\, x)} \right] = \frac{1}{Sen\,(x)} \left[\frac{Sen(x)}{(1 + Cos\, x)} \right] = \frac{1}{(1 + Cos\, x)}$$

Por lo tanto

$$f'(x) = \frac{1}{(1 + Cos\, x)}$$

Otros ejemplos de derivadas

Realizar los siguientes ejercicios detallando lo más posible, aplicando las tablas de derivadas y sus operaciones

01,. Realizar $f(x) = Ln\left(Tan\,(x^3)\right)$

Solución

Para ello se emplea la regla de la cadena, dada la composición de tres funciones

$$h(g\left(f(x)\right))$$

su derivada es

$$\frac{d}{dx}\left(h\left(g\left(f(x)\right)\right)\right) = \frac{dh}{dg}\frac{dg}{df}\frac{df}{dx} = h'\left(g\left(f(x)\right)\right)g'\left(f(x)\right)f'(x)$$

En el ejercicio tenemos $h(x) = Ln\,(x),\ g(x) = Tan\,(x) y\ f(x) = x^3$ entonces, nuestra derivada es

$$f'(x) = \left[Ln\left(Tan\,(x^3)\right)\right]' = \frac{1}{\left(Tan\,(x^3)\right)}\left(\left(Tan\,(x^3)\right)\right)'$$

$$= \frac{1}{\left(Tan\,(x^3)\right)} Sec^2(x^3)(x^3)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{\left(Tan\ (x^3)\right)} Sec^2(x^3)(3x^2) = \frac{3x^2 Sec^2(x^3)}{\left(Tan\ (x^3)\right)}$$

02,. Realizar $f(x) = Sen\ (2 - 5x)$

Solución

Para ello se emplea la regla de la cadena, dada la composición de dos funciones

$$g\big(f(x)\big)$$

su derivada es

$$\frac{d}{dx}\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx} = g'\big(f(x)\big)f'(x)$$

En el ejercicio tenemos $g(x) = Sen\ (x) y\ f(x) = (2 - 5x)$ entonces, nuestra derivada es

$$f'(x) = [Sen\ (2 - 5x)]' = Cos\ (2 - 5x)\big((2 - 5x)\big)' = Cos\ (2 - 5x)(-5)$$

$$f'(x) = -5Cos\ (2 - 5x)$$

03,. Realizar $f(x) = Arc\ Sen\ (3 + 5x^2)$

Solución

Para ello se emplea la regla de la cadena, dada la composición de dos funciones

$$g\big(f(x)\big)$$

su derivada es

$$\frac{d}{dx}\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx} = g'\big(f(x)\big)f'(x)$$

En el ejercicio tenemos

$g(x) = Arc\ Sen\ (x) y\ f(x) = (3 + 5x^2)$ entonces, nuestra derivada es

$$f'(x) = [Arc\ Sen\ (3 + 5x^2)]' = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - (3 + 5x^2)^2}}\right)(3 + 5x^2)'$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1-(3+5x^2)^2}}\right)(10x)$$

Finalmente

$$f'(x) = \frac{10x}{\sqrt{1-(3+5x^2)^2}}$$

04,. Realizar $f(x) = e^{Arc\ Cos(x^3)}$

Solución

Para ello se emplea la regla de la cadena, dada la composición de tre funciones

$$h\left(g\big(f(x)\big)\right)$$

su derivada es

$$\frac{d}{dx}\left(h\left(g\big(f(x)\big)\right)\right) = \frac{dh}{dg}\frac{dg}{df}\frac{df}{dx} = h'\left(g\big(f(x)\big)\right)g'\big(f(x)\big)f'(x)$$

En el ejercicio tenemos $h(x) = e^x;\ g(x) = Arc\ Cos\ (x) y\ f(x) = (x^3)$, entonces, nuestra derivada es

$$f'(x) = \left[e^{Arc\ Cos(x^3)}\right]' = \left(e^{Arc\ Cos(x^3)}\right)'\big(Arc\ Cos(x^3)\big)'(x^3)'$$

$$f'(x) = e^{Arc\ Cos(x^3)}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-(x^3)^2}}\right)(3x^2)$$

Finalmente

$$f'(x) = -\frac{3x^2 e^{Arc\ Cos(x^3)}}{\sqrt{1-(x^3)^2}}$$

05,. Realizar $f(x) = Sen\ \big(Ln\ (x)\big)$

Solución

Para ello se emplea la regla de la cadena, dada la composición de dos funciones

$$g\big(f(x)\big)$$

su derivada es

$$\frac{d}{dx}\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx} = g'\big(f(x)\big)f'(x)$$

En el ejercicio tenemos $g(x) = Sen\ (x)\ y\ f(x) = Ln(x)$, entonces, nuestra derivada es

$$f'(x) = \big[Sen\ (Ln\ (x))\big]' = \big(Sen(Ln(x))\big)'(Ln(x))'$$

$$f'(x) = Cos\ (Ln(x))\left(\frac{1}{x}\right)$$

Finalmente

$$f'(x) = -\frac{Cos\ (Ln(x))}{x}$$

06,. Realizar $f(x) = Ln\ \big(Tan(2x)\big)$

Solución

Para ello se emplea la regla de la cadena, dada la composición de tres funciones

$$h\Big(g\big(f(x)\big)\Big)$$

su derivada es

$$\frac{d}{dx}\big(h(g\big(f(x)\big))\big) = \frac{dh}{dg}\frac{dg}{df}\frac{df}{dx} = h'(g\big(f(x)\big))g'\big(f(x)\big)f'(x)$$

En el ejercicio tenemos $h(x) = Ln(x);\ g(x) = Tan\ (x)\ y\ f(x) = 2x$, entonces, nuestra derivada es

$$f'(x) = \big[Ln\ \big(Tan(2x)\big)\ \big]' = \big(Ln\ \big(Tan(2x)\big)\ \big)'\big(Tan(2x)\big)'(2x)'$$

$$f'(x) = \left(\frac{1}{Tan(2x)}\right)Sec^2\ (2x)(2)$$

Finalmente usando identidades trigonométricas sevtiene

$$f'(x) = -\frac{2Sec^2\ (2x)}{Tan(2x)} = \frac{2}{Sen\ (2x)Cos\ (2x)} = \frac{4}{Sen\ (4x)}$$

Derivadas de forma implícita:

01) -3x + 5y = 2

Solución:

$$\frac{d}{dx}(-3\mathrm{x} + 5\mathrm{y}) = \frac{d}{dx}(2) \Rightarrow -3\frac{d}{dx}(\mathrm{x}) + 5\frac{d}{dx}(\mathrm{y}) = 0 \Rightarrow -3 + 5\mathrm{y}' = 0$$

Despejando la derivada

$$5\mathrm{y}' = 3 \Rightarrow \mathrm{y}' = \frac{3}{5}$$

02) $\frac{7}{5}\mathrm{x}^5 + 3\mathrm{y}^4 = 4$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{7}{5}\mathrm{x}^5 + 3\mathrm{y}^4\right) = \frac{d}{dx}(4) \Rightarrow \frac{7}{5}\frac{d}{dx}(\mathrm{x}^5) + 3\frac{d}{dx}(\mathrm{y}^4) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{7}{5}(5\,\mathrm{x}^4) + 3\,(4y^3)\mathrm{y}' = 0$$

Simplificando y despejando la derivada

$$7\mathrm{x}^4 + 12y^3\mathrm{y}' = 0 \Rightarrow 12y^3\mathrm{y}' = -7\mathrm{x}^4 \Rightarrow \mathrm{y}' = -\frac{7\mathrm{x}^4}{12y^3}$$

03) $2Sen^3\mathrm{x} + \frac{3}{2}Tan^4\mathrm{y} = 3$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left(2Sen^3\mathrm{x} + \frac{3}{2}Tan^4\mathrm{y}\right) = \frac{d}{dx}(3) \Rightarrow 3\frac{d}{dx}(Sen^3\mathrm{x}) + \frac{3}{2}\frac{d}{dx}(Tan^4\mathrm{y}) = 0$$

$$\Rightarrow 3(3\,Sen^2\mathrm{x})\frac{d}{dx}(\mathrm{Sen\,x}) + 3\,(4Tan^3y)\frac{d}{dx}(\mathrm{Tan\,y}) = 0$$

$$\Rightarrow 3(3\,Sen^2\mathrm{x})(\mathrm{Cos\,x}) + 3\,(4Tan^3y)(\mathrm{Sec}^2\,\mathrm{y})\mathrm{y}' = 0$$

Simplificando y despejando la derivada

$$\Rightarrow 9Sen^2\mathrm{xCos\,x} + 12\left(\frac{Sen^3y}{Cos^3y}\right)\left(\frac{1}{Cos^2y}\right)\mathrm{y}' = 0$$

$$\Rightarrow 12\left(\frac{Sen^3y}{Cos^3y}\right)\left(\frac{1}{Cos^2y}\right)\mathrm{y}' = -9Sen^2\mathrm{xCos\,x}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{-9Sen^2 x \operatorname{Cos} x \, Cos^5 y}{12Sen^3 y} \qquad \Rightarrow y' = \frac{-3\,Sen^2 x \operatorname{Cos} x \, Cos^5 y}{4Sen^3 y}$$

Autoevaluación

a) Calcule la derivada por definición de las siguientes funciones:

01. $f(x) = 5x^3 + 3$

02. $(x) = 2x^4 - 7x - 3$

03. $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 6x - 2$

04. $f(x) = \sqrt{2x}$

05. $f(x) = \frac{-2}{x^4}$

06. $f(x) = 3 + 2x^2 - 3x^3$

07 $f(x) = \frac{x+2}{x-3}$

08 $f(x) = 5x^2 + x - 3\rfloor_{x=1}$

09 $f(x) = x^2 + 3x - 8$

10 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x - 7$

11 $f(x) = \frac{1}{x+3}$

12 $f(x) = \sqrt{x^2 - 2}$

13 $f(x) = Sen\,(x)$

14 $f(x) = \frac{1}{(x+3)^2}$

Respuesta

1. $f'(x) = 15x^2$
2 $f'(x) = 8x^3 - 7$
3. $f'(x) = 3x + 6$
4. $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{2x}}$
5. $f'(x) = \frac{8}{x^5}$
6. $f'(x) = 4x - 9x^2$

b) Derive las siguientes funciones aplicando las reglas que corresponda.

1. $f(x) = x^2 + x + 6$
2. $f(x) = 3x^4 + 7$
3. $f(x) = \frac{5Sen\,(2x)}{(x-3)^2}$
4. $f(x) = \sqrt[3]{\frac{3}{4}\,x^2 + \frac{1}{3}}$
5. $f(x) = Ln\left(Tan\left(\sqrt{x}\right)\right)$
6. $f(x) = 3xCos^{-1}(5x)$
7. $f(x) = Arc\;Tan\left(2\sqrt{x}\right)$
8. $f(x) = Arc\;Tan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

9. $f(x) = Tan(Ln(1 - x^2))$ 10. $(x) = Ln\sqrt{\frac{1 - Sen\,(x)}{1 + Sen\,(x)}}$

11. $f(x) = Ln(\sqrt{Cos\,(4x - 1)}$ 12 $f(x) = Cos\,(x)^{Sen\,(x)}$

Derive a las siguientes ecuaciones implícitamente:

01 $\frac{5}{4}\mathrm{x} + 2\mathrm{y} = 6$ 02 $\frac{2}{3}\mathrm{x}^3 + \frac{3}{4}\mathrm{y}^5 = -3$

03 $Tan^2\,\mathrm{x} + 4Sec^5\mathrm{y} = 5$ 04 $\frac{1}{3}Cos^3\,(\mathrm{x} + \mathrm{Y}) + \frac{2}{5}Scn^5\mathrm{y} = 1$

Determina la derivada sucesiva indicada en cada caso :

1. $D_x^4\,f(x) =?$ $f(x) = 2x^5 - 2x^3$
2 $f^{(5)}(x) =?$ $f(x) = \cos(5x - 3)$
3. $f^{(2)}(x) =?$ $f(x) = Tan\,(3x - 2)$
4. $D_x^3\,f(x) =?$ $f(x) = \sqrt{Cos\,(2x + 1)}$
5. $f^{(5)}(x) =?$ $f(x) = \sqrt{4x^3 - 3}$
6. $D_x^2\,f(x) =?$ $f(x) = \sqrt{2x^2 + 6}$

Unidad 4

APLICACIONES DE LA DERIVADA

Regla de L'Hopital - Bernoulli

Es una regla que emplea las derivadas como herramienta para obtener los límites de funciones indeterminadas.

Esta regla nombrada en honor matemático francés del siglo XVII Guillaume Francois Antoine, marques de L'Hopital (1661 - 1704), quien dio a conocer la regla en su obra *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696), el primer texto que se ha escrito sobre calculo diferencial, aunque actualmente se sabe que quien la desarrolló y demostró fue Johann Bernoulli.

Enunciado

La regla de L'Hôpital es una consecuencia del Teorema del valor medio de Cauchy; que se da solo en el caso de las indeterminaciones del tipo $0/0$ o ∞/∞

"Sean *f* y *g* dos funciones continuas definidas en el intervalo [*a*, *b*], derivables en (*a*, *b*) y sea *c* perteneciente a (*a*, *b*) tal que $f(c) = g(c) = 0$ y $g'(x) \neq 0$ si $x = c$".

Si existe el límite *L* de $\frac{f'}{g'}$ en *c*, entonces existe el límite de $\frac{f}{g}$ (en *c*) y es igual a *L*. Por lo tanto

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demostración

Los argumento a seguir para demostrar la regla de L'Hôpital, no es rigurosa , pero en realidad, una demostración exacta necesita de argumentos de tipo épsilon – delta $\varepsilon - \delta$ más delicados.

- Como g(c) = 0 y g'(x) ≠ 0 si x ≠ c, se tiene que g(c) ≠ 0 si x ≠ c como consecuencia del Teorema de Rolle.
- Dado que *f*(*c*) = *g*(*c*) = 0, aplicando el Teorema del Valor Medio de Cauchy, para todo "*x*" en (*a*, *b*), con "*x*" distinto de *c*, existe t_x en el intervalo de extremos *a* y *b*, tal que el cociente *f*(*x*)/*g*(*x*) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(t_z)}{g'(t_z)}$$

- Cuando *x* tiende hacia *c*, igualando los valores de las igualdades de arriba, t_x también tiende hacia *c*, así que:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(t_z)}{g'(t_z)} = L$$

Nota: el último paso al límite, aunque es cierto, requeriría una justificación más rigurosa.

La regla de l'Hôpital se aplica para evitar indeterminaciones que resultan de reemplazar el valor numérico al llevar al límite las funciones dadas. La regla dice que se deriva el numerador y el denominador por separado; es decir: sean las funciones originales *f*(*x*)/*g*(*x*), al aplicar la regla se obtendrá: *f'(x)*/*g'(x)*.

Si al realizar lo anterior aun se mantiene la indeterminación pero la función sea *n* veces continua y derivable, la regla puede aplicarse *n* veces:

Ejemplos:

01. Realizar

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{Sen\ (x)}{x}$$

Evaluando

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{Sen\ (x)}{x} = \frac{Sen\ (0)}{0} = \frac{0}{0} \quad (IND)$$

Aplicando L'Hopital

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{Sen\ (x)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(Sen\ (x))'}{(x)'} = \lim_{x \to 0} \frac{Cos\ (x)}{1}$$

Evaluando esta expresión obtenida se tiene:

$$L = \frac{Cos\ (0)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

02. Realizar

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x} - 2x}{1 - Cos\ (x)}$$

Evaluando

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x} - 2x}{1 - Cos\ (x)} = \frac{e^{0} - e^{-0} - 2(0)}{1 - Cos\ (0)} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0} \quad (IND)$$

Aplicando L'Hopital

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x} - 2x}{1 - Cos\ (x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{x} - e^{-x} - 2x)'}{(1 - Cos\ (x))'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - (-e^{-x}) - 2}{-(-Sen\ (x))}$$

Evaluando esta expresión obtenida se tiene:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} + e^{-x} - 2}{Sen\ (x)} = \frac{e^{0} + e^{-0} - 2}{Sen\ (0)} = \frac{1 + 1 - 2}{0} = \frac{0}{0} \ (IND)$$

Aplicando L'Hopital nuevamente

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} + e^{-x} - 2}{Sen\ (x)} = \lim_{x \to 0} \frac{(e^{x} + e^{-x} - 2)'}{(Sen\ (x))'} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} + (-e^{-x})}{Cos\ (x)}$$

Evaluando esta expresión obtenida se tiene:

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x} - e^{-x}}{Cos\ (x)} = \frac{e^{0} - e^{-0}}{Cos\ (0)} = \frac{1 - 1}{1} = \frac{0}{1} = 0$$

Cuando las indeterminadas se presenta de la formas 0^0, ∞^0 y 1^∞; la función se expresa de la forma

$$[f(x)]^{g(x)}$$

Estas indeterminaciones se evitan aplicando primero la propiedades de los logaritmos; por ejemplo

Dada la función

$$y = [f(x)]^{g(x)}$$

Si aplicamos logaritmo natural o neperiano resulta

$$Ln\ (y) = Ln\big([f(x)]^{g(x)}\big) = g(x)Ln(f(x))$$

Luego se aplica la relación de la exponencial con su inversa

$$y = e^{Ln\ (x)} = \ e^{g(x)Ln(f(x))}$$

Entonces se obtiene

$$L = \lim_{x\to 0}[f(x)]^{g(x)} = \lim_{x\to 0} e^{g(x)Ln(f(x))} = e^{\lim_{x\to 0} g(x)Ln(f(x))}$$

Luego resolver el límite inicial, se realiza con obtener el límite de su logaritmo

$$\mathrm{p} = \lim_{x\to 0} g(x)Ln(f(x))$$

Finalmente el límite original será

$$L = \lim_{x\to 0}[f(x)]^{g(x)} = e^{p}$$

Ejemplo

01. Realizar

$$L = \ \lim_{x\to 0}(Cos\ (3x)^{\frac{2}{x^3}}$$

Evaluando

$$L = \ \lim_{x\to 0}(Cos\ (3x)^{\frac{2}{x^3}} = \big(Cos\ (3(0)\big)^{\frac{2}{(9)^3}} = (Cos\ (0))^{\frac{2}{0}} = 1^{\infty}\quad (IND)$$

Aplicando L'Hopital

$$L = \ \lim_{x\to 0}(Cos\ (3x)^{\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0} e^{(\frac{2}{x^3})Ln(Cos\ (3x))} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{2Ln(Cos\ (3x))}{x^3}\right)}$$

Evaluando el exponente de esta expresión obtenida se tiene:

$$p = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2Ln\big(Cos\ (3x)\big)}{x^3}\right) = \frac{2\text{Ln}\left(\text{Cos}\ \big(3(0)\big)\right)}{(0)^3} = \frac{2Ln(\cos(0))}{0} = \frac{2Ln(1)}{0}$$

$$p = \frac{0}{0}\ (IND)$$

Aplicando L'Hopital a esta expresión

$$p = \lim_{x\to 0}\left(\frac{2Ln(Cos\ (3x))}{x^3}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\big(2Ln(Cos\ (3x))\big)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0}\frac{2\,\frac{\big(Cos\ (3x)\big)'}{Cos\ (3x)}}{3x^2}$$

$$p = \lim_{x\to 0}\frac{2\big(-Sen\ (3x)\big)\frac{(3x)'}{Cos\ (3x)}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{(-2)(3)\,\frac{Sen\ (3x)}{Cos\ (3x)}}{3x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2Tan(3x)}{x^2}$$

Evaluando esta expresión obtenida se tiene:

$$p = \lim_{x\to 0}\frac{-2\ Tan(3x)}{x^2} = \frac{-2\ Tan(0)}{(0)} = \frac{0}{0}\ (IND)$$

Aplicando L'Hopital a esta expresión

$$p = \lim_{x\to 0}\left(\frac{-2Tan(3x)}{x^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\big(-2Tan(3x)\big)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0}\frac{-2Sec^2(3x)(3x)'}{x}$$

$$p = \lim_{x\to 0}\frac{-Sec^2(3x)(3)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-3Sec^2(3x)}{x}$$

Evaluando esta expresión obtenida se tiene

$$p = \lim_{x\to 0}\frac{-3Sec^2(x)}{x} = \frac{-3Sec^2(0)}{(0)} = \frac{-3}{0} = -\infty$$

Finalmente

$$L = \lim_{x\to 0}(Cos\ (3x)^{\frac{2}{x^3}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Ejemplo

02. Realizar

$$L = \lim_{x\to 0}\left(Cos^{\frac{5}{x}}\ (x)\right) = \lim_{x\to 0}(Cos\ (x))^{\frac{5}{x}}$$

Evaluando

$$L = \lim_{x\to 0}(Cos\ (x))^{\frac{5}{x}} = \left(Cos\ (0)\right)^{\frac{5}{0}} = 1^{\infty} \quad (IND)$$

Aplicando L'Hopital

$$L = \lim_{x\to 0}\left(Cos^{\frac{5}{x}}\ (x)\right) = \lim_{x\to 0} e^{(\frac{5}{x})Ln(Cos\ (x))} = e^{\lim_{x\to 0}\left(\frac{5Ln(Cos\ (x))}{x}\right)}$$

Evaluando el exponente de esta expresión obtenida se tiene:

$$p = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5Ln(Cos\ (x))}{x}\right) = \frac{5\text{Ln}(\text{Cos}\ (0)))}{0} = \frac{5Ln(1)}{0} = \frac{5(0)}{0} = \frac{0}{0}\ (IND)$$

Aplicando L'Hopital a esta expresión

$$p = \lim_{x\to 0}\left(\frac{5Ln(Cos\ (x))}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\left(5Ln(Cos\ (x))\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\left(Cos\ (x)\right)'}{Cos\ (4x)}}{1}$$

$$p = \lim_{x\to 0} 5\left(-Sen\ (x)\right)\frac{(x)'}{Cos\ (x)} = \lim_{x\to 0}(-5)(1)\frac{Sen\ (x)}{Cos\ (x)} = \lim_{x\to 0} -5Tan(x)$$

Evaluando esta expresión obtenida se tiene:

$$p = \lim_{x\to 0} -5\ Tan(x) = -5\ Tan(0) = -5(0) = 0$$

Finalmente

$$L = \lim_{x\to 0}\left(Cos^{\frac{5}{x}}\ (x)\right) = e^{0} = 1$$

Se presenta en ocasiones problemas donde deseamos determinar la "rápido" con que una función se van a infinito. En presencia de fracciones o racionales de diferentes índice, dichas fracciones, debe ser llevada a común denominador y radicales a índice común.

Ejemplo

01. Realizar

$$L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(Tan\ (x) - \frac{2}{x-\frac{\pi}{2}}\right) = \lim_{x\to 0}(Cos\ (x))^{\frac{5}{x}}$$

Evaluando

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(Tan\ (x) - \frac{2}{x - \frac{\pi}{2}} \right) = Tan\ \left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}} = \infty - \infty \quad (IND)$$

Realizando reemplazos trigonométricos, operaciones algebraicas y simplificando

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{Sen\ (x)}{Cos\ (x)} - \frac{2}{\frac{2x - \pi}{2}} \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{Sen\ (x)}{Cos\ (x)} - \frac{4}{2x - \pi} \right)$$

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{(2x - \pi)Sen\ (x) - 4Cos\ (x)}{(2x - \pi)Cos\ (x)} \right)$$

Evaluando se tiene

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{(2x - \pi)Sen\ (x) - 4Cos\ (x)}{(2x - \pi)Cos\ (x)} \right) = \frac{\left(2\frac{\pi}{2} - \pi\right) Sen\ \left(\frac{\pi}{2}\right) - 4Cos\ \left(\frac{\pi}{2}\right)}{\left(2\frac{\pi}{2} - \pi\right) Cos\ \left(\frac{\pi}{2}\right)}$$

$$= \frac{0}{0} \quad (IND)$$

Aplicando L'Hopital

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{(2x - \pi)Sen\ (x) - 4Cos\ (x)}{(2x - \pi)Cos\ (x)} \right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\left((2x - \pi)Sen\ (x) - 4Cos\ (x)\right)'}{\left((2x - \pi)Cos\ (x)\right)'}$$

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2Sen\ (x) + (2x - \pi)Cos\ (x) - 4\left(-Sen\ (x)\right)}{2Cos\ (x) + (2x - \pi)\left(-Sen\ (x)\right)}$$

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{2Sen\ (x) + (2x - \pi)Cos\ (x) + 4Sen\ (x)}{2Cos\ (x) - (2x - \pi)\left(Sen\ (x)\right)}$$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{6Sen\ (x) + (2x - \pi)Cos\ (x)}{2Cos\ (x) - (2x - \pi)\left(Sen\ (x)\right)}$$

Evaluando

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{6Sen\ (x) + (2x - \pi)Cos\ (x)}{2Cos\ (x) - (2x - \pi)\left(Sen\ (x)\right)} = \frac{6Sen\ \left(\frac{\pi}{2}\right) + \left(2\frac{\pi}{2} - \pi\right) Cos\ \left(\frac{\pi}{2}\right)}{2Cos\ \left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(2\frac{\pi}{2} - \pi\right)\left(Sen\ \left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

$$L = \frac{6\,(1) + (0)\,(0)}{2(0) - (0)(1)} = \frac{6}{0} = \infty$$

Finalmente

$$L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(Tan\,(x) - \frac{2}{x - \frac{\pi}{2}} \right) = \infty$$

La Indeterminación cero por infinito se puede evitar si mediante operaciones algebraica las transformamos a casos que ya estudiamos, como $0/0$ ó ∞/∞. Por ejemplo si tenemos que:

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0.\infty$$

Donde $\lim_{x \to a} f(x) = 0 \; y \; \lim_{x \to a} g(x) = \infty$; Entonces lo podemos reescribir de tal manera que sea más fácil sacar la derivada

$$\lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{0}{0} \qquad \text{o} \qquad \lim_{x \to a} f(x)g(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} = \frac{\infty}{\infty}$$

Teniendo esto se aplica la regla de L'Hôpital (se sugiere al alumn terminar los cálculos)

Teoremas del Cálculo Diferencial: Rolle, LaGrange y Cauchy

Teorema de Rolle.

Si f: [a, b] → ℝ es una función continua en un intervalo cerrado [a, b], derivable en el intervalo abierto (a, b) y f(a) = f(b), entonces existe al menos un punto c є (a, b) tal que: f’(c) = 0.

Demostración:

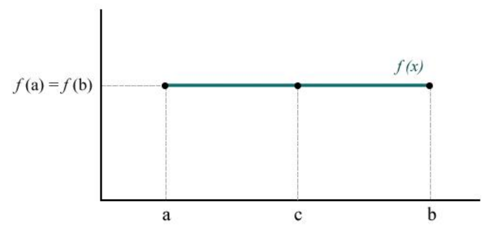
Existen tres posibilidades, 1) la función considerada es constante, 2) la función tiene algún punto “*x”* donde su valor es mayor y 3) la función tiene algún punto "*x"* donde su valor es menor que en los extremos. Para el primer caso es una solución trivial que en *algún punto* la función tiene derivada nula (en la definición de derivada el cociente incremental es cero).

- Por la continuidad de f la imagen de [a, b] es un conjunto conexo de $\mathbb{R}$ y por lo tanto es un intervalo, el intervalo imagen.
- La imagen por una función continua de un conjunto compacto es un conjunto compacto, y por lo tanto el intervalo imagen es cerrado y de longitud finita: es de la forma [*m*, *M*], con "m" el valor mínimo de f y M su valor máximo.
- Si m = M, la función es constante y cualquier punto c є (a, b) conviene. Descartado este caso, m ≠ M significa que uno de los dos no es igual a f(a) = f(b). Supongamos que sea M Entonces M > f(a) = f(b) y por lo tanto el máximo M se alcanza en el interior del intervalo.
- Sea c є [a, b] tal que f© = M. Por definición del máximo, $M = f(c) \geq f(x)$ para todo "*x"* de [*a*, *b*]. Entonces el cociente $\frac{(f(c) - f(x))}{(c - x)}$ es positivo cuando $x < c$ (porque su numerador es siempre positivo y su denominador es positivo no nulo), y es negativo cuando $x > c$ (el denominador se vuelve negativo no nulo). Pero $f'(c)$ es por definición el límite de este cociente cuando *x* tiende hacia *c*. El límite por la izquierda, $f'(c^-)$, tiene que ser igual al límite por la derecha, $f'(c^+)$. Por lo tanto este límite común es nulo, o sea f'(c) = 0.

La demostración es muy similar si es el mínimo el que se alcanza en .

Gráficamente

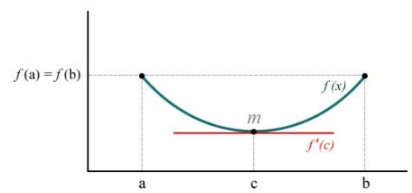
En el siguiente gráfico se observan las tres condiciones: la función es continua en el intervalo cerrado [a, b], es diferenciable en (a, b) y los valores que toma la función en los puntos a y b son iguales,es decir, f(a) = f(b) Existe al menos un punto c ϵ (a, b) en el cual la derivada de la función es igual a cero, esto es, f’(c) = 0. Vale observar que c es distinto de “a” y de “b”. No debemos confundir *c* con *f*(*c*), que sí puede ser igual a *f*(*a*) y *f*(*b*).



La grafica es una función constante, pero el teorema no solo se cumple en este caso. Se pueden dar tres casos en los que *f*(*c*) es distinto de *f*(*a*) y *f*(*b*), a saber:

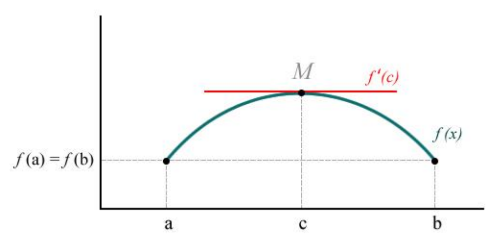
Caso 1

El punto máximo es *igual* a f(a) y f(b) y el punto mínimo es distinto de ambos, lo cual implica que la curva es convexa. El punto mínimo es m = f(c) y la derivada de la función en este punto es 0.



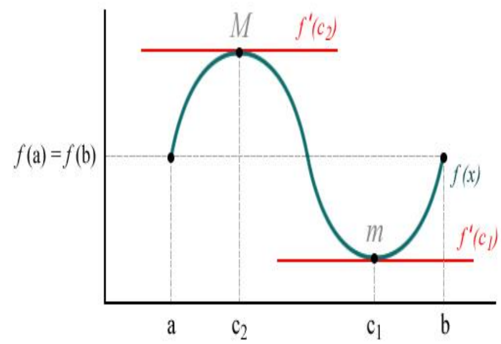
Caso 2

El punto mínimo es *igual* a f(a) y f(b) y el punto máximo es *distinto* de ambos, lo cual implica que la curva es cóncava. El punto máximo es m = f(c) y la derivada de la función en este punto es 0.



Caso 3

Tanto el punto mínimo como el punto máximo son *distintos* a f(a) y f(b). Esto significa que dentro del intervalo cerrado [a, b] la función alcanza un punto máximo $M = f(c_2)$, mayor al valor de la función en los extremos *a* y *b* y un punto mínimo $m = f(c_1)$ menor a los mismos- Tanto en el punto máximo como en el punto mínimo, la derivada de la función es nula. Es decir, $f\,'(c_1) = 0$ y $f\,'(c_2) = 0$.



Se le atribuye al matemático indio Bhäskara II (1114 –1185) el dar a conocer del teorema de Rolle, obtiene su nombre de Michel Rolle (1652 - 1719) matemático francés En 1691, Michel Rolle publicó la primera demostración formal conocida, que no usa el cálculo diferencial. En 1834, el alemán Moritz Wilhelm Drobisch y el italiano Giusto Bellavitis en 1846 fueron los primeros en usar el nombre de “Teorema de Rolle”.

El teorema de Rolle nos permite afirmar si una función f(x) tiene un punto crítico en un intervalo dado. Este teorema se enuncia como sigue:

Sea f(x) una función que

1.- Es continua en [a, b],

2,- Es derivable en (a, b),

3.- Cumple que f(a) = f(b).

Entonces existe algún punto c є (a, b) tal que f’© = 0 .

Ejemplos

1,- Verifica el cumplimiento las hipótesis del teorema de Rolle para la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} 3x, & si\ 0 \le x \le 1 \\ -x + 4, & si\ 1 < x \le 4 \end{cases} \quad \text{en el intervalo }]0, 4]$$

Solución

Se Debe verificar las tres hipótesis del teorema de Rolle:

1.- Comprobar que la función sea continua. Cada "trozo" de la función, por ser funciones polinómicas son continuas. Luego, falta verificar la continuidad en el punto $x = 1$. Para ello calculamos los limites laterales

a) El límite por la izquierda:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 3x = 3(1) = 3$$

b) El límite por la derecha:

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} -x + 4 = -1 + 4 = 3$$

Los límites son iguales (y la función también vale 3 cuando $x = 1$), se concluye que la función es continua.

Ahora verificamos que la función sea diferenciable en todo el intervalo (0, 4) . La función es diferenciable en los intervalos (0, 1) y (1, 4) ya que en esos trozos, la función está definida por polinomios. Luego, debemos comprobar que la función sea diferenciable en $x = 1$, para ello, calculamos las "derivadas laterales". Primero, encontramos la derivada de la función. Para el intervalo (0, 1) , tenemos:

f'(x) = 3 y para el intervalo (1, 4), la derivada es f'(x) = -1

Concluimos que $f'(1^-) = 3 \neq f'(1^+) = -1$. Por lo tanto, la derivada no está definida en $x = 1$ y la función no es diferenciable en todo el intervalo.

En nuestro caso, una de las hipótesis no se cumple. Por lo tanto, no podemos usar el teorema de Rolle para asegurar la existencia de un valor c ϵ (0, 4) tal que f' (c) = 0 (no existe ese valor).

2.- Utiliza el teorema de Rolla para comprobar que $x^7 + 3x + 3 = 0$ tiene una única raíz.(Ayuda: use el teorema de Rolle).

Solución

El polinomio $f(x) = x^7 + 3x + 3 = 0$ es impar, por lo tanto sabemos que debe tener al menos una raíz. Es decir, existe un valor c ϵ $\mathbb{R}$ tal que f(c) = 0.

Por reducción al absurdo, partiendo de supuesto de que el polinomio tiene dos o más raíces diferentes. Sean estas raíces a_1 y a_2, donde $a_1 < a_2$..

Sabemos que f(x) es un polinomio. Por lo tanto, es continuo y diferenciable en toda $\mathbb{R}$.

Por otro lado, como a_1 y $a_2$son raíces, entonces $f(a_1) = f(a_2) = 0$.
Por tanto, las hipótesis del teorema de Rolle se cumplen para el intervalo $[a_1, a_2]$. Así, por el teorema de Rolle, debe existir c ϵ (a_1, a_2) tal que f'(x) = 0.
pero, la derivada de f(x) es

$$f'(x) = 7x^6 + 3 > 0$$

la cual siempre es mayor a 0. Es decir, no existe $\mathbb{C}$ tal que f(c) = 0.

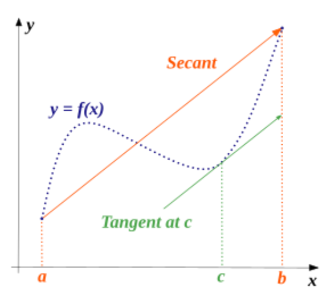
Entonces, tenemos una contradicción (decimos que $\mathbb{C}$ existe y que no existe).como esta contradicción surge de asumir que f(x) tiene dos o más raíces diferentes, entonces se puede concluir que f(x) tiene exactamente una raíz real.

Teorema de LaGrange – Teorema del valor medio

El teorema de valor medio (Teorema de Lagrange), teorema de los incrementos finitos, teorema de Bonnet – Lagrange o teoría del punto medio es una propiedad de las funciones derivables en un intervalo. Algunos matemáticos consideran que este teorema es el más importante del cálculo.

El teorema de valor medio puede usarse para demostrar el teorema de Taylor y el teorema de Rolle, ya que ambos son un caso especial.

De manera precisa el teorema enuncia que si f es una función continua en un intervalo cerrado [a, b] y diferenciable en el intervalo abierto (a, b) entonces existe un punto c en (a, b) tal que la recta tangente en el punto c es paralela a la recta secante que pasa por los puntos (a, f(a)) y (b, f(b)), esto es



$$\exists\ c\ \in\ (a,b)|\ f'(c) = \frac{f(b)-F(a)}{b-a}$$

El teorema del valor medio es una generalización del teorema de Rolle, las hipótesis son que si una función f: [a, b] → ℝ es continua en [a, b] y diferenciable en (a, b) y toma valores iguales en los extremos del intervalo, esto es, f8a) = F(b) entonces existe al menos algún punto c ϵ (a, b) tal que , esto es, el lado derecho de la expresión anterior es cero.

Demostración 1.

Primero se consideran dos puntos (a, f(a)) y (b, f(b)) pertenecientes al gráfico de la función. La ecuación de la recta que pasa por estos dos puntos es:

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Se define una función auxiliar:

$$g(x) = f(x) - y = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)\right]$$

Dado que f es continua en [a, b] y diferenciable en (a, b) entonces g también lo es. Además g satisface las condiciones del Teorema de Rolle en [a, b] ya que:

$$g(a) = f(a) - f(a)$$

$$g(a) = f(a) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = 0 - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(0) = 0$$

y

$$g(b) = f(b) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)}(b-a) = f(b) - f(a) - f(b) + f(a) = 0$$

Por el Teorema de Rolle, como g es diferenciable en (a, b), y g(a) = g(b) entonces existe un punto c ϵ (a, b) tal que g'(c) = 0 y por tanto:

$$0 = g'(c) = f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

y así:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

que es lo que se quería demostrar.

Demostración 2

Sea m_{ab}la pendiente de la recta secante entre [a, b] se define la ecuación punto-pendiente:

$$y = m_{ab}x + c_1, donde \;\; m_{ab} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

o también,

$$-m_{ab}x + y = c_1$$

De acuerdo al enunciado la función es derivable en (a, b), por lo que se puede escoger algún valor x = x en dicho intervalo tal que f'(c) existe y es la pendiente de la recta tangente en dicho punto y por ende la recta tangente tiene la forma (punto-pendiente):

$$y = f'(c)x + c_2$$

o también,

$$-f'(c)x + y = c_2$$

Se observa que se llega a un sistema lineal de 2x2

$$\begin{cases} -m_{ab}x + y = c_1 \\ -f'(c)x + y = c_2 \end{cases}$$

La matriz del sistema es:

$$A = \begin{bmatrix} -m_{ab} & 1 \\ -f'(c) & 1 \end{bmatrix}$$

y su determinante es:

$$\det(A) = f'(c) - m_{ab}$$

Para que el sistema no tenga solución se debe cumplir det(A) = 0, por lo tanto las rectas son paralelas en x = c, es decir f'(c) = m_{ab}

Entonces, existe al menos un punto que no da solución al sistema y además la recta tangente al mismo es paralela a la recta entre a y b, es decir:

$$f'(c) = m_{ab}$$

o también,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Con ello queda demostrado el teorema del valor medio.

Ejemplo

1. ¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange a la siguiente función en el intervalo dado?

$$f(x) = x^3; donde\ x \in [-1, 3]$$

de ser así, encuentra el valor de c.

Solución

Si se puede aplicar el teorema de Lagrange debido a que $f(x) = x^3$ es continua en [-1, 3] y derivable en el abierto (-1, 3). Luego de cumplir la hipótesis, existe un valor c є (-1, 3). Para proceder primero calculemos la derivada de f(x).

$$f'(x) = 3x^2$$

buscamos c aplicando

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$3(c)^2 = \frac{f(3) - f(1)}{3 - (-1)} = \frac{(3)^3 - (-1)^3}{3 + 1} = \frac{27 + 1}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

Luego

$$3c^2 = 7 \;\Rightarrow\; c^2 = \frac{7}{3} \;\Rightarrow\; c = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

Solo se toma la raíz positiva $c =$, ya que la raíz negativa su valor está fuera del intervalo $-\sqrt{\frac{7}{3}} < -1$.

2 ¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange a la siguiente función en el intervalo dado?

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 2, donde\ x \in [0, 3]$$

De ser así, encuentra el valor de $\mathbb{C}$.

Solución

Si podemos aplicar el teorema de Lagrange ya que cualquier polinomio es continua en cualquier intervalo cerrado y derivable en cualquier intervalo abierto. Por lo tanto se cumple la hipótesis, existe un valor c є (0, 3). Para determinarlo, hallamos primero la derivada de f(x)

$$f'(x) = 4x - 3$$

Con esto ya podemos proceder y buscar $\mathbb{C}$

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Calculamos

$$f(3) = 2(3)^2 - 3(3) + 2 = 18 - 9 + 2 = 11$$

$$f(0) = 2(0)^2 - 3(0) + 2 = 0 - 0 + 2 = 2$$

entonces

$$4c - 3 = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{11 - 2}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

resultando

$$4c - 3 = 3 \quad \Rightarrow \quad 4c = 3 + 3 \quad \Rightarrow \quad 4c = 6 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{6}{4} \Rightarrow \quad c = \frac{3}{2}$$

Teorema de Cauchy

Si *f* y *g* son funciones continuas en [a, b] y derivables en (a, b), existe un punto c є (a, b) tal que:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

donde los denominadores g(b) – g(a) y g'(c) son distintos de cero. El valor del primer miembro es constante por lo que tenemos:

$$k = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow f'(c) = k \,.\, g'(c)$$

La interpretación geométrica del teorema de Cauchy nos dice que existen dos puntos (c, f(c)) y (c, g(c)) de las curvas f(x) y g(x), tales que la pendiente de la tangente a la curva f(x) en el primer punto es k veces la pendiente de la tangente a la curva g(x) en el segundo punto.

Observe que en el caso particular cuando *g(x)* = *x*, la expresión se reduce al teorema de valor medio de Lagrange ; partiendo de él se puede demostrarse la regla de L'hopital, herramienta de mucha ayuda para el cálculo de límites con indeterminaciones 0/0 o ꝏ/ꝏ. .

Demostración

Sea *g(x*) una función definida como:

$$G(x) = [g(b)-g(a)].[f(x)-f(a)] - [f(b)-f(a)].[g(x)-g(a)]$$

donde *f(x)* y *g(x)* son funciones continuas en [*a*, *b*], derivables en (*a*, *b*). Se puede observar por simple inspección que *G(a) = 0* y *G(b) = 0*.

Por el Teorema de Rolle, existe un *c*, perteneciente al intervalo (*a*, *b*), tal que *G'(c) = 0*. Luego, derivando *G(x)* se obtiene:

$$G'(x) = [g(b)-g(a)].f'(x) - [f(b)-f(a)].g'(x)$$

sabemos que *G'(c)* es 0

$$0 = [g(b)-g(a)].f'(c) - [f(b)-f(a)].g'(c)$$

de donde se deduce que

$$[f(b)-f(a)].g'(c) = [g(b)-g(a)].f'(c)$$

Si *g(b) - g(a)* y *g'(c)* son distintos de 0, la expresión anterior puede ser escrita como:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Ejemplo:

Analizar si el teorema de Cauchy es aplicable en el intervalo [0, 3] a las funciones

$f(x) = x^3 - 5x^2 - 10x - 2$ y $g(x) = x^2 - 2x + 7$

Las funciones f(x) y g(x) son continuas y derivables en $\mathbb{R}$ por ser polinómicas, en particular, son continuas en [0, 3] y derivables en (0, 3).

Calculando g(0) y g(3) se cumple que g(0) ≠ g(3)

$g(0) = (0)^2 - 2(0) + 7 = 0 - 0 + 7$ $g(3) = (3)^2 - 2(3) + 7 = 9 - 6 + 7$

$g(0) = 7$ $g(3) = 10$

. Calculando f(0) y f(3)

$f(0) = (0)^3 - 5(0)^2 - 10(0) - 2$ $f(3) = (3)^3 - 5(3)^2 - 10(3) - 2$

$f(0) = -2$ $f(3) = 27 - 45 - 30 - 2 = -50$

Por lo tanto se verifica el teorema de Cauchy:

Aplicamos el teorema de Cauchy, para esto calculamos las derivadas de ambas funciones

$f'(x) = 3x^2 - 10x - 10$ $g'(x) = 2x - 2$

Evaluamos en la fórmula

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(3) - f(0)}{g(3) - g(0)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{-50 - 0}{10 - 7}$$

$$= \frac{3x^2 - 10x - 10}{2x - 2}$$

$$(3x^2 - 10x - 10)(3) = (2x - 2)(-50) \Rightarrow 9x^2 - 30x - 30 = -100x + 100$$

$$9x^2 - 30x + 100x - 30 - 100 = 0 \Rightarrow 9x^2 + 70x - 130 = 0$$

Aplicando resolvente cuadrática

$$c = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-70 \pm \sqrt{(70)^2 - 4(9)(-130)}}{2(9)} = \frac{-70 \pm \sqrt{4800 + 4680}}{18}$$

$$c = \frac{-70 \pm \sqrt{9480}}{18} = \frac{-70 \pm \sqrt{9480}}{18} = \frac{-35 \pm \sqrt{2370}}{9} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} c_1 = 1,52 \\ c_2 = -40,42 \end{matrix}$$

Las raíces son $c_1 = \frac{-35+\sqrt{2370}}{9} \approx 1,52 \, \epsilon \, (0,3)$ y

$$c_2 = \frac{-35 - \sqrt{2370}}{9} \approx -40,42 \, \notin \, (0,3)$$

Determinemos

$$g'(c_1) = g'\left(\frac{-35 + \sqrt{2370}}{9}\right) \approx g'(1,52) = 2(1,52) - 2 = 3,04 - 2 = 1,04$$

Como $g'(c_1) \neq 0$, concluimos que el valor buscado es

$$c = \frac{-35 + \sqrt{2370}}{9} \neq 1,52$$

Primeras derivadas de una sucesión

La derivada es un límite hacia el cual tiende el cociente entre el incremento de una función y el incremento arbitrario de la variable independiente, cuando este último tiende a cero.

Tomando un ejemplo de la vida real de la derivada es que al lanzar una cuerpo hacia arriba, la variación de su altura está dada por la expresión $h(t) = -5t^2$+30t; si derivamos esta expresión obtenemos la velocidad en cualquier instante de tiempo.

Al derivar una función f(x) , se obtiene la primera derivada, f'(x).

Si la derivamos nuevamente, se obtiene la segunda derivada, f''(x).

Si nuevamente la derivamos, se obtiene la tercera derivada, $f^{(3)}(x)$.

Si la derivamos nuevamente, se obtiene la cuarta derivada, $f^{(4)}(x)$. Y así sucesivamente.

Las derivada de las funciones y sus propiedades ya se explico antes, las cuales resumimos en un tabla.

Derivada enésima

Es realizar tantas derivadas sucesiva como sea posible hasta obtener una expresión que nos señale la tendencia general En algunos casos, podemos encontrar una fórmula general para cualquiera de las derivadas sucesivas (y para todas ellas). Esta fórmula recibe el nombre de derivada enésima, $f'^{n}(x)$.

Ejemplos

1.- Calcular la primera derivada de la función

$$f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2x + 3$$

Solución.

Por ser una función polinómica, derivamos cada término por separado

$$f'(x) = 3(5)x^{5-1} - 5(3)x^{3-1} + 2(1) + 0 = 15x^4 - 15x^2 + 2$$

2.- calcular la segunda derivada de la función.

$$f(x) = -x^4 + 8x^2 - 3x + 5$$

Solución:

Determinamos la primera derivada y como la función es polinómica, aplicamos la misma propiedad que en el ejemplo anterior; luego derivamos nuevamente para obtener la segunda derivada solicitada.

$$f'(x) = -1(4)x^{4-1} + 8(2)x^{2-1} - 3(1) + 0 = -4x^3 + 16x - 3$$

$$f''(x) = -4(3)x^{3-1} + 16(1) - 3(0) = -12x^2 + 16$$

3.- calcular la tercera derivada de la función.

$$f(x) = 5x^5 - 128x^3 - 10x - 5$$

Solución.

Determinamos la primera derivada y como la función es polinómica, aplicamos la misma propiedad que en el ejemplo anterior; luego derivamos nuevamente para obtener la segunda derivada y nuevamente derivamos el resultado que obtenemos para hallar la tercera derivada solicitada.

$$f'(x) = 5(5)x^{5-1} - 12(3)x^{3-1} - 10(1) + 0 = 25x^4 - 36x^2 - 10$$
$$f''(x) = 25(4)x^{4-1} - 36x^{2-1} - 0 = 100x^3 - 36x$$
$$f^{(3)}(x) = 100(3)x^{3-1} - 36(1) = 300x^2 - 36$$

4.- calcule la enésima derivada de la función racional

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Solución:

Calculamos la primera derivada. Por ser una función logarítmica

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Calculamos la segunda derivada. Por ser una función racional que transformamos en polinómica de exponente negativo.

$$f''(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = (-x^{-2})' = 2x^{-3} = \frac{1\,.\,2}{x^3} = \frac{2!}{x^3}$$

Calculamos la tercera derivada. Por la misma razón que el paso anterior

$$f^{(3)}(x) = \left(\frac{2!}{x^3}\right)' = (2!\,x^{-3})' = -2!\,.3\,x^{-4} = -\frac{3!}{x^4}$$

Calculamos la cuarta derivada. Por la misma razón que el paso anterior

$$f^{(4)}(x) = \left(-\frac{3!}{x^4}\right)' = (-3!\,x^{-4})' = -3!.\,(-4)\,x^{-5} = \frac{4!}{x^5}$$

Por ser una función racional y generalizando obtenemos la enésima derivada

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

5.- Calcular la enésima derivada de la función f(x) = Ln (x).

Solución

Calculamos la primera derivada. Por ser una función logarítmica

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

Calculamos la segunda derivada. Por ser una función racional que transformamos en polinómica de exponente negativo.

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

Calculamos la tercera derivada. Por la misma razón que el paso anterior

$$f^{(3)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' = (-x^{-2})' = 2x^{-3} = \frac{1\,.\,2}{x^3} = \frac{2!}{x^3}$$

Calculamos la cuarta derivada. Por la misma razón que el paso anterior

$$f^{(4)}(x) = \left(\frac{2!}{x^3}\right)' = (2!\,x^{-3})' = -2!\,.3\,x^{-4} = -\frac{3!}{x^4}$$

Por ser una función racional y generalizando obtenemos la enésima derivada

$$f^{(4)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

6.- Calcular la enésima derivada de la función f(x) = Sen (x).

Calculamos la primera derivada. Por ser una función trigonométrica y aplicando fórmulas de identidades

$$f'(x) = \left(Sen\,(x)\right)' = Cos\,(x) \equiv Sen\,\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

Calculamos la segunda derivada. Por ser una función trigonométrica y aplicando formulas de identidades.

$$f''(x) = \left(cos\,(x)\right)' = -Sen\,(x) \equiv -[-Sen\,(x + \pi)] = Sen\,\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right)$$

Calculamos la tercera derivada. Por ser una función trigonométrica y aplicando formulas de identidades

$$f^{(3)}(x) = \left(-\,sen\,(x)\right)' = -Cos\,(x) \equiv -Sen\,\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\left[-Sen\,\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$f^{(3)}(x) = Sen\,\left(x + 3\frac{\pi}{2}\right)$$

Por ser una función trigonométrica y generalizando obtenemos la enésima derivada

$$f^{(n)}(x) = Sen\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

7.- Calcular la enésima derivada de la función $f(x) = e^{-3x}$.

Calculamos la primera derivada. Como la función es exponencial se cumple.

$$f'(x) = (e^{-3x})' = -3(e^{-3x})$$

Calculamos la segunda derivada. Por la misma razón que al realizar la primera derivada se tiene:

$$f''(x) = (-3e^{-3x})' = 3^2(e^{-3x})$$

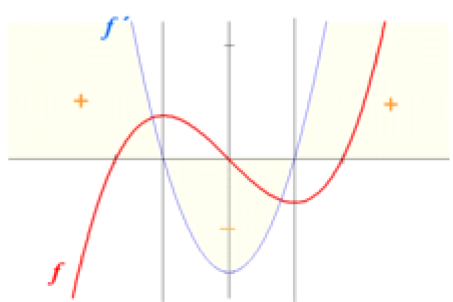
Calculamos la tercera derivada. Por la misma razón.

$$f^{(3)}(x) = (3^2e^{-3x})' = -3^3(e^{-3x})$$

Observando la forma del crecimiento de sus derivadas, al generalizar que obtenemos la enésima derivada

$$f^{(n)}(x) = (-3)^n e^{-3x}$$

Criterio de las derivadas



En la imagen obsrvamos la gráfica de una función f y su primera derivada f'. En ella se nota la relación entre el signo positivo (o negativo) de f' con el crecimiento (o. decrecimiento) de la función f.

En calculo, el criterio de derivadas (o prueba de derivadas) utiliza las derivadas de una funcion para ubicar sus puntos criticos y determinar si son un máximo local, un monimo local o un punto de silla. Los criterios de derivadas también pueden dar información sobre la concavidad de una función.

La utilidad de las derivadas para encontrar extremos se demuestra matemáticamente mediante el teorema de los puntos estacionarios de Fermat.

.

Criterio de la primera derivada

El criterio (también llamada prueba) de la primera derivada examina las propiedades de monotonía de una función (donde la función es creciente o decreciente), centrándose en un punto particular en su dominio. Si la función "cambia" de creciente a decreciente en el punto, entonces la función alcanzará un valor más alto en ese punto. De manera similar, si la función "cambia" de decreciente a creciente en el punto, alcanzará un valor mínimo en ese punto. Si la función no logra "cambiar" y sigue aumentando o disminuyendo, entonces no se alcanza el valor más alto o más bajo.

Se puede examinar la monotonía de una función sin usar técnicas de análisis o calculo infinitesimal. Sin embargo, el cálculo infinitesimal suele ser útil porque existen condiciones suficientes que garantizan las propiedades de monotonía anteriores, y estas condiciones se aplican a la gran mayoría de las funciones que se encuentran en la realidad.

Propiedades de monotonía

Dada una función real f definida en algún intervalo abierto que contiene un punto "*x*", y además f sea continua en "*x*".

- Si existe un número positivo k > 0 tal que *f* es creciente en (x − k, x] y decreciente en [x, x + k), entonces *f* tiene un máximo local en "*x*" .
- Si existe un número positivo k > 0 tal que *f* es estrictamente creciente en (x − k, x] y estrictamente creciente en [x, x + k), entonces *f* es estrictamente creciente en (x − k, x + k) y no tiene un máximo local o mínimo en "*x*" .

observe que en el primer caso, no se requiere que *f* sea estrictamente creciente o estrictamente decreciente a la izquierda o derecha de "*x*", mientras que en el segundo caso, se requiere que *f* sea estrictamente creciente o estrictamente decreciente. La razón es que en la definición de máximo y mínimo local, no se requiere que la desigualdad sea estricta: por ejemplo, cada valor de una función constante se considera tanto un máximo local como un mínimo local.

Aplicaciones

El criterio de la primera derivada es útil para resolver problemas de optimización en ingeniería, física y economía. Unido al teorema de valor extremo, para encontrar el máximo y el mínimo absolutos de una función de valor real definida en un intervalo cerrado y acotado. Junto con otra información como la concavidad, los puntos de inflexión y las asíntotas, se puede usar para dibujar la gráfica de una función.

Aplicación del Criterio de la primera derivada

EL criterio (o prueba) de la primera derivada depende de la "prueba creciente – decreciente", es una consecuencia del teorema del valor medio. Es una consecuencia directa de la forma en que se define la derivada y su conexión con el decrecimiento y crecimiento de una función localmente.

Sea *f* es una función de valor real de una variable real definida en algún intervalo que contiene el punto crítico "*a*". Sea, además, *f continua* en "*a*" y diferenciable en algún intervalo abierto que contiene "*a*", excepto posiblemente en "*a*" mismo.

- Si existe un número positivo $k > 0$ tal que para todo "*x*" en $(a - k, a)$ tenemos $f'(x) > 0$ y para todo "*x*" en $(a, a + k)$ tenemos $f'(x) < 0$ entonces *f* posee un máximo local en *a*.
- Si existe un número positivo $k > 0$ tal que para cada "*x*" en $(a - k, a) \cup (a, a + k)$ tenemos $f'(x) > 0$ entonces *f* es estrictamente creciente en "*a*" y no tiene un máximo o un mínimo local en "*a*".
- Si no se cumple ninguna de las condiciones anteriores, la prueba falla, existe funciones que no satisfacen ninguna de estas tres primeras condiciones, por ejemplo, $f(x) = x^2 \operatorname{Sen}(1/x)$.

Como se observa en los dos primeros casos sobre las propiedades de monotonía, no se requiere que la desigualdad sea estricta, mientras que en los dos siguientes sí se requiere una desigualdad estricta.

Aplicación del Criterio de la segunda derivada.

Después de establecer los puntos criticos de una función, la *prueba de la segunda derivada* usa el valor de la segunda derivada en esos puntos para determinar si dichos puntos son un máximo local o un minimo local. Si la función *f* es diferenciable dos veces en un punto crítico "*x*" (es decir, un punto donde $f'(x) = 0$), entonces:

- Si $f''(x) < 0$, entonces f tiene un máximo local en "x".
- Si $f''(x) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en "x".
- Si $f''(x) = 0$, la prueba no es concluyente.

En el último caso, el teorema de Taylo se puede usar a veces para determinar el comportamiento de *f* cerca de *x* usando derivadas superiores.

Demostración del criterio de la segunda derivada

Supongamos que tenemos f''(x) > 0 (la demostración para el caso f''(x) < 0 es análoga, cambiando *f* por - *f*). Por hipótesis, f'(x) = 0 . Entonces

$$0 < f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h)}{h}$$

Así, para *h* suficientemente pequeña obtenemos

$$\frac{f'(x+h)}{h} > 0$$

lo cual implica que f'(x + h) < 0 si h < 0 (intuitivamente, *f* es decreciente a medida que se aproxima a "x" desde la izquierda), y que f'(x + h) > 0 si h > 0 (Intuitivamente, *f* crece a medida que avanzamos a la derecha desde *x*). Ahora, por el criterio de la primera derivada, f tiene un mínimo local en "x".

Criterio de concavidad

Un uso relacionado pero distinto de las segundas derivadas es determinar si una función es cóncava hacia arriba o hacia abajo en un punto. Sin embargo, no proporciona información sobre los puntos de inflexión. Específicamente, una función dos veces diferenciable *f* es cóncava hacia arriba o convexa si f''(x) > 0 y cóncava hacia abajo o simplemente concava si f''(x) < 0 . Nótese que si $f(x) = x^4$ entonces x = 0 tiene segunda derivada nula, pero no es un punto de inflexión, por lo que la segunda derivada por sí sola no da suficiente información para determinar si un punto dado es un punto de inflexión.

Criterio de las derivadas para derivadas superiores

La *prueba de las derivada de orden superior* o *la prueba de la derivada general* puede determinar si los puntos críticos de una función son máximos, mínimos o puntos de inflexión para una variedad más amplia de funciones que la prueba de la derivada de segundo orden. Como se muestra a continuación, la prueba de la segunda derivada es matemáticamente idéntica al caso especial de *n* = 1 a la prueba de las derivadas de orden superior.

Sea *f* una función de valor real suficientemente diferenciable en un intervalo I ⊂ ℝ, sea c є I, y sea n ≥ 1 sea un numero natural. Supongamos que todas las derivadas de *f* en “*c”* son cero hasta la orden *n* (es decir, hasta la *n*-ésima derivada inclusive), pero siendo la derivada de orden (*n* + 1) en “*c”* distinta de cero:

$$f'(c) = \cdots = f^{(n)}(c) = 0 \;\; y \;\; f^{(n+1)}(c) \neq 0$$

Hay cuatro posibilidades, los dos primeros casos donde *c* es un extremo, los dos segundos donde “*c”* es un punto de silla (local):

- Si *n* es impar y $f^{(n+1)}(c) < 0$, entonces “*c”* es un máximo local.
- Si *n* es impar y $f^{(n+1)}(c) > 0$, entonces “*c”* es un mínimo local.
- Si *n* es par y $f^{(n+1)}(c) < 0$, entonces “*c”* es un punto de inflexión estrictamente decreciente.
- Si *n* es par y $f^{(n+1)}(c) > 0$, entonces “*c”* es un punto de inflexión estrictamente creciente.

Dado que *n* debe ser par o impar, esta prueba analítica clasifica cualquier punto estacionario de *f*, siempre que finalmente aparezca una derivada distinta de cero.

Ejemplo

Digamos que queremos realizar la prueba de la derivada general en la función $f(x) = x^6 + 5$ en el punt x = 0. Para hacer esto, calculamos las derivadas de la función y luego las evaluamos en el punto de interés hasta que el resultado sea distinto de cero

. $f'(x) = 6x^5 \ \Rightarrow \ f'(0) = 0$ $\qquad f''(x) = 30x^4 \ \Rightarrow \ f''(0) = 0$

$f^{(3)}(x) = 120x^3 \ \Rightarrow \ f^{(3)}(0) = 0$ $\qquad f^{(4)}(x) = 360x^2 \ \Rightarrow \ f^{(4)}(0) = 0$

$f^{(5)}(x) = 720x \ \Rightarrow \ f^{(5)}(0) = 0$ $\qquad f^{(8)}(x) = 720 \ \Rightarrow \ f^{(6)}(0) = 720$

Como se muestra arriba, en el punto x = 0 , la función $x^6 + 5$ tiene todas sus derivadas en 0 iguales a 0, excepto la 6ª derivada, que es positiva. Así *n* = 5, y por la prueba, hay un mínimo local en 0.

Máximos y mínimos de una función.

En esta etapa de nuestro estudio, analizaremos la optimización matemática y las estrategias necesarias para resolver problemas que involucran encontrar los valores máximos y mínimos de funciones.

Los problemas de máximos y mínimos se encuentran en diversas áreas, en el desarrollo de las ciencias como la física, la economía, la ingeniería y muchas otras. La resolución de los ejercicios consiste en hallar los puntos críticos de una función, donde la pendiente es cero, y determinar si esos puntos que corresponden a máximos o mínimos locales.

Debemos aprender a identificar las características clave de una función que nos permiten determinar sus máximos y mínimos. Este habilidad lo lograremos con la resolución de varios ejemplos tipos, que resolveremos usando el criterio de la segunda derivada.

El objetivo es desarrollar tu capacidad para encontrar soluciones óptimas, fortaleciendo el razonamiento analítico de las matemáticas.

Utilizar el criterio de la segunda derivada para calcular los máximos y mínimos locales de las siguientes funciones:

En los siguiente ejercicios determine los minimos y máximos locales, sus puntos críticos, concavidad o convexidad de existir y grafica dicha función;

1.- $f(x) = x^3 - 3x + 2$

Solución

Primero hallamos la primera y la segunda derivada de la función dada:

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

La igualamos a cero y resolvemos para determinar los puntos críticos

$$3x^2 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{3}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_a = 1 \\ x_b = 1 \end{matrix}$$

Evaluamos es la función original para determinar las coordenadas de dichos puntos

$$y_a = f(x_a) = f(1) \qquad y_b = f(x_b) = f(-1)$$

$$= (1)^3 - 3(1) + 2 \qquad = (-1)^3 - 3(-1) + 2$$

$$y_a = 1 - 3 + 2 = 0 \qquad y_b = -1 + 3 + 2 = 4$$

$$A(1,0) \qquad B(-1,4)$$

Determinamos la segunda derivada

$$f''(x) = 6x$$

Finalmente evaluamos la segunda derivada f’’(x) en los puntos críticos hallados para determinar el signo de esta segunda derivada (positiva o negativa):

$$f''(x) > 0 \text{ ó } f''(x) < 0$$

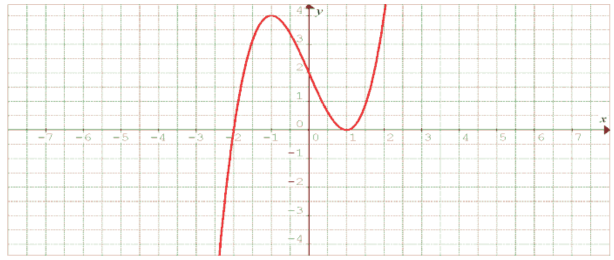
Tenemos entonces que

$$f''(x_a) = f''(1) = 6(1) = 6 > 0 \qquad f''(x_b) = f''(-1) = 6(-1) = -6 < 0$$

Entonces por el criterio de la segunda derivada, la función f(x) tiene un mínimo local en

La siguiente Figura muestra la gráfica de la función f(x) propuesta.

punto A(1, 0) y un máximo local en B(-1, 4). Los valores correspondientes de la función son:



2.- $f(x) = 3x - x^3$

Solución

Primero hallamos la primera y la segunda derivada de la función dada:

$$f'(x) = 3 - 3x^2$$

La igualamos a cero y resolvemos para determinar los puntos críticos

$$3 - 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{3}{3} \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{1} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_a = 1 \\ x_b = 1 \end{matrix}$$

Evaluamos es la función original para determinar las coordenadas de dichos puntos

$y_a = f(x_a) = f(1) = 3(1) - (1)^3$ $\qquad$ $y_b = f(x_b) = f(-1) = 3(-1) - (-1)^3$

$y_a = 3 - 1 = 2$ $\qquad$ $y_b = -3 - 1 = -4$

$A(1, 2)$ $\qquad$ $B(-1, -4)$

Determinamos la segunda derivada

$$f''^{(x)} = -6x$$

Finalmente evaluamos la segunda derivada f''(x) en los puntos críticos hallados para determinar el signo de esta segunda derivada (positiva o negativa):

$$f''(x) > 0 \text{ ó } f''(x) < 0$$

Tenemos entonces que

$f''(x_a) = f''(1) = -6(1) = -6 < 0$ $\qquad$ $f''(x_b) = f''(-1) = -6(-1) = 6 > 0$

Entonces por el criterio de la La siguiente Figura muestra la segunda derivada, la función f(x) tiene un mínimo local en punto A(1, 2) y un máximo local en B(-1, -4). Los valores correspondientes de la función son:

gráfica de la función f(x) propuesta.

3.- $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$

Solución

Primero hallamos la primera y la segunda derivada de la función dada:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x$$

La igualamos a cero y resolvemos para determinar los puntos críticos

$$4x^3 - 16x = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x(x^2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad 4x(x-2)(x+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} x_a = -2 \\ x_b = 0 \\ x_c = 2 \end{matrix}$$

Evaluamos es la función original para determinar las coordenadas de dichos puntos

$$y_a = f(x_a) = f(-2) \; = (-2)^4 - 8(-2)^2 + 3 = 16 - 32 + 3 = -13$$

$$\Rightarrow A(-2, -13)$$

$$y_b = f(x_b) = f(0) \; = (0)^4 - 8(0)^2 + 3 \; = 0 - 0 + 3 = 3 \quad \Rightarrow \quad B(0, 3)$$

$$y_c = f(x_c) = f(2) \; = (2)^4 - 8(2)^2 + 3 \; = 16 - 32 + 3 = -13 \quad \Rightarrow \quad C(2, -13)$$

Determinamos la segunda derivada

$$f''^{(x)} = 12x^2 - 16$$

Finalmente evaluamos la segunda derivada f’’(x) en los puntos críticos hallados para determinar el signo de esta segunda derivada (positiva o negativa):

$$f''(x) > 0 \text{ ó } f''(x) < 0$$

Tenemos entonces que

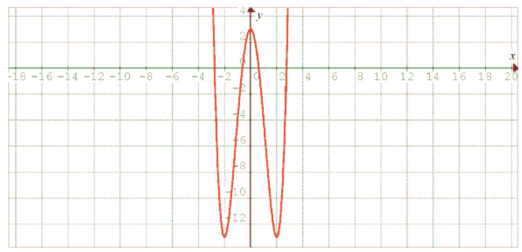
$$f''(x_a) = f''(-2) = 12(-2)^2 - 16 \; = 48 - 16 = 32 \quad \Rightarrow \; f''(x_a) > 0$$

$$f''(x_b) = f''(0) = 12(0)^2 - 16 = 0 - 16 = -16 \quad \Rightarrow \; f''(x_b) < 0$$

$$f''(x_c) = f''(2) = 12(2)^2 - 16 = 48 - 16 = 32 \qquad \Rightarrow \quad f''(x_c) > 0$$

Entonces por el criterio de la segunda derivada, la función f(x) tiene un máximo local en x = 0; punto $B(0,3)$ y dos mínimos locales en x = 2; punto $A(-2,-13)$ y x = - 2; punto $C(2,-13)$

La Figura muestra la gráfica de la función f(x) propuesta



. 4.- $$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 9}$$

Solución

Primero hallamos la primera y la segunda derivada de l''¿a función dada:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 6x + 9}\right)'$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - x - 2)'(x^2 - 6x + 9) - (x^2 - x - 2)(x^2 - 6x + 9)'}{((x-3)^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)(x^2 - 6x + 9) - (x^2 - x - 2)(2x - 6)}{(x-3)^4}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 - 12x^2 + 18x - x^2 + 6x - 9 - 2x^3 + 6x^2 + 2x^2 - 6x + 4x - 12}{(x-3)^4}$$

$$f'(x) = \frac{-5x^2 + 22x - 21}{(x-3)^4} = \frac{(5x - 7)(3 - x)}{(3 - x)^4} = \frac{(5x - 7)}{(x-3)^3}$$

La igualamos a cero y resolvemos para determinar los puntos críticos

$$5x - 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad 5x = 7 \quad \Rightarrow \quad x_a = \frac{7}{5}$$

Evaluamos es la función original para determinar las coordenadas de dichos puntos

$$y_a = f(x_a) = f\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{\left(\frac{7}{5}\right)^2 - \left(\frac{7}{5}\right) - 2}{\left(\frac{7}{5}\right)^2 - 6\left(\frac{7}{5}\right) + 9} = \frac{\frac{49}{25} - \frac{7}{5} - 2}{\frac{49}{25} - \frac{42}{5} + 9}$$

$$y_a = \frac{\frac{49 - 35 - 50}{25}}{\frac{49 - 210 + 225}{25}} = \frac{-36}{64} = -\frac{9}{16} \Rightarrow A\left(\frac{7}{5}, -\frac{9}{16}\right)$$

Determinamos la segunda derivada siguiendo el mismo procedimiento que usamos para calcular la primera derivada

$$f''(x) = \frac{2(5x - 3)}{(x - 3)^4}$$

Finalmente evaluamos la segunda derivada f''(x) en los puntos críticos hallados para determinar el signo de esta segunda derivada (positiva o negativa):

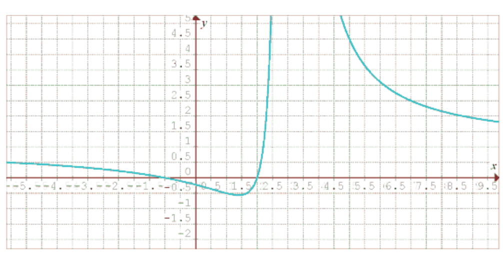
$$f''(x) > 0 \text{ ó } f''(x) < 0$$

Tenemos entonces que

$$f''\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{2\left(5\left(\frac{7}{5}\right) - 3\right)}{\left(\frac{7}{5} - 3\right)^4} = \frac{2(7 - 3)}{\left(\frac{7 - 15}{5}\right)^4} = \frac{8(625)}{(8)^4} = \frac{625}{512} > 0$$

Entonces por el criterio de la segunda derivada, la función f(x) tiene un mínimo local en el punto $A\left(\frac{7}{5}, -\frac{9}{16}\right)$

La siguiente Figura muestra la gráfica de la función f(x) propuesta.



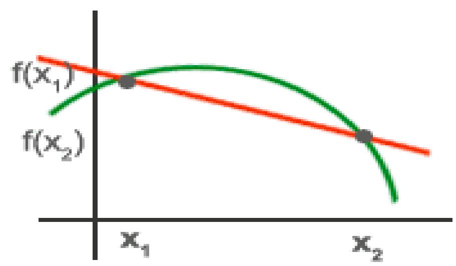
Criterio de Concavidad y convexidad

Tomando como referencia la naturaleza, la forma de las figura que se obtiene de una función se denota el criterio de que si tiene forma de un valle es convexa y su forma asemeja a una montaña es cóncava.

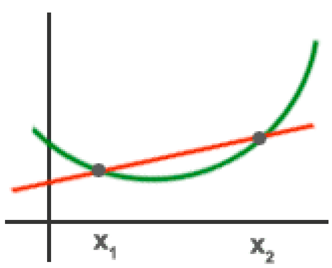
Definiendo de forma matemática:

Una función es cóncava en un intervalo de su dominio si:

Dados dos puntos cualesquiera de dicho intervalo x_1 y x_2, el segmento que une los puntos $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2, f(x_2))$ queda por debajo de la gráfica.



Una función es convexa en un intervalo de su dominio cuando:



Dados dos puntos cualesquiera de dicho intervalo x_1 y x_2, el segmento que une los puntos $A(x_1, f(x_1))$ y $B(x_2, f(x_2))$ queda por encima de la gráfica.

Intervalos de concavidad y convexidad

Los intervalos la concavidad y convexidad de una función se determina seguiremos los siguientes pasos:

a) Hallamos la segunda derivada y calculamos sus raíces.
b) Formamos intervalos abiertos con los ceros (raíces) de la derivada segunda y los puntos de discontinuidad (si los hubiese).
c) escogemos un valor de cada intervalo, y hallamos el signo que tiene en la derivada segunda.

Si f''(x_a) > 0 ⇒ es convexa	Si f''(x_a) < 0 ⇒ es cóncava.

d) Escribimos los intervalos.

Ejemplo

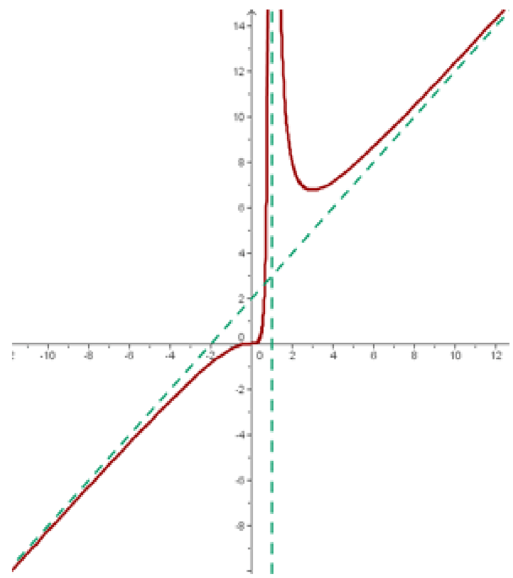
a) Determine la concavidad o convenida de:

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$$

Determinemos su dominio

$$(x-1)^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 1 \quad \Rightarrow Dom\, f = \mathbb{R} - \{1\}$$

Grafica de la función



Hallamos la primera derivada y sus puntos críticos. (Dejamos los pasos al alumno)

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^3 - 3x^2}{(x-1)^3} = 0$$

$$x^3 - 3x^2 = 0 \ \Rightarrow \ x^2(x-3) = 0$$

$$x_a = 0 \ \wedge \ x_b = 3$$

Calculamos la segunda derivada

$$f''^{(x)} = \frac{6x}{(x-1)^4} \quad \Rightarrow \quad \frac{6x}{(x-1)^4} = 0$$

Determinamos el signo de esta derivada en su dominio

x	(-∞, 0)	(0, 1)	(1,∞)
f''(x)	-	+	+
imagen	∩	∪	∪
forma	Cóncava	Convexa	Convexa

Autoevaluación

a) Realizar los ejercicios aplicando la regla de L'Hôpital

01 $L = \lim_{x \to 0} \frac{Tan\ (2x+4)}{Tan\ (4x^2+3)}$

02. $L = \lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x - Sen\ (x)}$

03. $L = \lim_{x \to 1} \frac{\left(Ln(x)\right)^2}{1 - Cos\ (x-1)}$

04. $L = \lim_{x \to 0} (Sen\ (x))^{Tan\ (x)}$

05. $L = \lim_{x \to 0} (Tan\ (x))^{\ x}$

06. $L = \lim_{x \to 3} \left(\frac{3}{x}\right)^{\frac{1}{x-3}}$

07. $L = \lim_{x \to 0} \left(CTg\ (x) - \frac{1}{x}\right)$

08. $L = \lim_{x \to 0} \left(Csc\ (x) - \frac{1}{x}\right)$

09. $L = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(Sec\ (x) - \frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}\right)$

10. $L = \lim_{x \to 0^+} xLn\ (x)$

11. $L = \lim_{x \to 0^+} Sen(x)Ln\ (x)$

12. $L = \lim_{x \to 0^+} Tan(x)Ln\ (x)$

b) Sobre la aplicación del Teorema de Rolle:

1.- ¿Se puede utilizar el teorema de Rolle en la función $f(x) = Ln\ (3 – x^2)$ para el intervalo [-1, 1] ?

2.- Utiliza el teorema de Rolla para comprobar si $x^5 + 3x + 3 = 0$ posee en el intervalo [-1, 3].

3.- Verificar si la función f(x) = x – 1 satisface las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0. 2].

4.- Verificar si la función $f(x) = - x^3 + x$ satisfacen las hipótesis del teorema de Rolle en los intervalos [-1, 0] y [o, 1]. En caso afirmativo, encuentra los valores c tales que f’(c) = 0 .

5.- Demuestra que la ecuación $4x^3 + 3x^2 + 2x +1 = 0$ tiene una única solución.

6- Hallar las soluciones (raíces) de $x^3 + 6x^2 + 15x - 25 = 0$

7- Demuestre que la ecuación $2x^3 - 6x + 1 = 0$ tiene una única solución real en el intervalo (0, 1).

c) Realizar usando el Teorema de Lagrange

1.- ¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange a la siguiente función en el intervalo dado?

$$f(x) = 4x^2 - 5x + 1 \; en \; x \in [0, 2]]$$

de ser así, encuentra el valor de .

2. ¿Se puede aplicar el teorema de Lagrange a la siguiente función en el intervalo dado?

$$f(x) = \frac{1}{x}, \; x \in [0,2]$$

De ser así, encuentra el valor de .

3. Calcular un punto del intervalo [1, 3] en el que la tangente a la curva

$$f(x) = x^3 - x^2 + 2$$

sea paralela a la recta determinada por los puntos (1, f(1)) = (1, 2) y (3, f(3)) = (3, 20). ¿Qué teorema garantiza la existencia de dicho punto?

d) Realizar usando el Teorema de Cauchy

1. Analizar si el teorema de Cauchy es aplicable en el intervalo [1, 4] a las funciones:

$f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = x^3 - 7x^2 + 20x - 5$

En caso afirmativo, aplicarlo.

2. Analizar si el teorema de Cauchy es aplicable en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ a las funciones:

f(x) = Sen (x) y g(x) = Cos (x)

En caso afirmativo, aplicarlo.

e) Calcular las derivadas señaladas en cada caso

1.- $f(x) = 5x^3 + 3x^2 - 2x - 4$ f'(x) 2.- $f(x) = -2x^4 + x^2 - 4x - 8$ f''(x)

3.- $f(x) = 2x^6 - 3x^4 - 10x$ $f^{(3)}(x)$ 4.- $f(x) = Ln(x^2)$ $f^{(n)}(x)$

5.- $f(x) = Cos\ (x)$ $f^{(n)}(x)$ 6.- $f(x) = 2^x$ $f^{(n)}(x)$

f) Determine los puntos crítico, valor máximo y mínimo, construya la graficó, de cada una de las siguientes funciones

1.- $f(x) = e^x(x^2 - x + 6)$ 2.- $f(x) = x + LN(x^2 - 4)$

3.- $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 8x^2 + 4}$ 3.- $f(x) = e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 2x + 6)$

g) Determine los puntos crítico, valor máximo y mínimo, construya la graficó, de cada una de las siguientes funciones

1.- $f(x) = e^x(x^2 - x + 6)$ 2.- $f(x) = x + LN(x^2 - 4)$

3.- $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 8x^2 + 4}$ 3.- $f(x) = e^{\frac{x}{2}}(x^2 - 2x + 6)$

h) Determinar la concavidad y convexidad de las siguientes funciones:

1.- $f(x) = x^3 - 4x + 6$ 2.- $f(x) = 2x - 8x^3$

3.- $f(x) = \dfrac{x^2}{x + 1}$ 4.- $f(x) = Sen\ (x) + Cos\ (x), 0 < x < 2\pi$

RECURSOS INTERACTIVOS

- https://www.youtube.com/watch?v=JhFpTmYzGUs
- https://www.youtube.com/watch?v=P3SkX4JoaFM
- https://www.youtube.com/watch?v=SLMnQjcmp6o
- https://www.youtube.com/watch?v=zxZgf36kgT8
- https://www.youtube.com/watch?v=yMqxSHfabpY
- https://www.youtube.com/watch?v=z3rgAMPdjs4
- https://www.youtube.com/watch?v=nTaiyaoyJhw
- https://www.youtube.com/watch?v=SCbkQD9LcRs
- https://www.youtube.com/watch?v=ZEAPl6VN4JU
- https://www.youtube.com/watch?v=UsfRAEY3Rs8
- https://www.youtube.com/watch?v=U7onW7mMzLM
- https://www.youtube.com/watch?v=L0BZlkBbZmI
- https://www.youtube.com/watch?v=RAzsJFsIzzQ
- https://www.youtube.com/watch?v=u0BP7ZMRsms
- https://www.youtube.com/watch?v=AnERoXNdyRg
- https://www.youtube.com/watch?v=izGTzSy5X10
- https://www.youtube.com/watch?v=yagG6p7rdgU
- https://www.youtube.com/watch?v=QvBTwZwPqsA
- https://www.youtube.com/watch?v=KYvTWs54EgE
- https://www.youtube.com/watch?v=x1ZPbkMvPPw
- https://www.youtube.com/watch?v=LO_H7Vab-DM
- https://www.youtube.com/watch?v=RaLvXK3dZ-s

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Apostol, Tom M. (1960). *Análisis matemático: Introducción moderna al cálculo superior*. Reverté. ISBN 84-291-5000-5.
- Sullivan, J. (2006). Polinomios y funciones racionales. Álgebra y Trigonometría. Pearson Educación 7ª edición
- http://es.wikipedia.or
- Rey Pastor, Julio (1985). *Análisis matemático: Teoría de ecuaciones; cálculo infinitesimal de una variable*. Kapelusz. ISBN 950-13-3301-9.
- Ayres, F. (1972). Cálculo diferencial e integral. Editorial McgGhill. México
- Larson, R. (1999). Cálculo con Geometría Analítica. México. Edición 8va. Editorial Mcgrawhill.
- Leithold, L. (1994). Cálculo ec7. México. Editorial Oxford