TEMA 4

PRODUCTOS NOTABLES

Los productos notables son **expresiones algebraicas que vienen de un producto que conocemos** porque sigue reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación. Estas operaciones son fáciles de recordar sin necesidad de efectuar la multiplicación correspondiente.

1. Cuadrado de la suma de dos cantidades

$(a+b)^2$

Cuando tenemos dos cantidades **a** y **b**, cuya suma está elevada al cuadrado, lo que realmente se pide es que se multiplique la suma por sí misma: Ejemplo

$(a+b)^2 = (a+b).(a+b)$, Esta multiplicación se realiza de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{(a+b)^2 = (a+b).(a+b) = (a.a + a.b + b.a + b,b) = a^2 + 2ab + b^2}$$

Por lo tanto. $(a+b)^2 = \boldsymbol{a^2 + 2ab + b^2}$

Regla del cuadrado de la suma de dos cantidades

El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, más dos veces la primera cantidad por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

Ejemplo: $(X+5)^2 = X^2 + 2.X.5 + 5^2 = \boldsymbol{X^2 + 10X + 25}$

Ejercicio. Desarrolle $\boldsymbol{(X+10)^2} =$

2. Cuadrado de la diferencia de dos cantidades

Cuando tenemos dos cantidades **a** y **b**, cuya resta está elevada al cuadrado, lo que realmente se pide es que se multiplique la resta por sí misma:

$(a-b)^2 = (a-b).(a-b)$, Esta multiplicación se realiza de la siguiente forma:

$$\boldsymbol{(a-b)^2 = (a-b).(a-b) = \big(a.a + a.(-b) + (-b).a + (-b),(-b)\big) = a^2 - 2ab + b^2}$$

Por lo tanto. $(a-b)^2 = \boldsymbol{a^2 - 2ab + b^2}$

Recordemos que dos números negativos cuando se multiplican, el signo resultante es positivo: $(-\boldsymbol{b}).(-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b^2}$

Regla del cuadrado de la resta de dos cantidades
El cuadrado de la resta de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera cantidad, menos dos veces el primer término por el segundo término, más el cuadrado de la segunda cantidad.

Ejemplo: $(X-3)^2 = (X-3).(X-3) = X^2 - 2.X.3 + 3^2 = X^2 - 6X + 9$;

Entonces. $(X-3)^2 = \boldsymbol{X^2 - 6X + 9}$

Desarrolle: $(\boldsymbol{m-4})^2 =$

3. Producto de la suma por la diferencia de dos cantidades

$(\boldsymbol{a+b}).(\boldsymbol{a-b}) = \boldsymbol{a.a + a.(-b) + b.a + b.(-b)} = \boldsymbol{a^2 - b^2}$, por lo tanto

$(\boldsymbol{a+b}).(\boldsymbol{a-b}) = \boldsymbol{a^2 - b^2}$

Ejemplo: $(X+3)(X-3) = X.X + X.(-3) + 3.X + 3.(-3) = X^2 - 3X + 3X - 9 = X^2 - 9$

Aplicando el producto notable : $(X+3)(X-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$

Ejercicios propuesto:

1) $(\boldsymbol{m+7})^2 =$
2) $(\boldsymbol{3m+5})^2 =$
3) $(\boldsymbol{a^2 + 4})^2=$
4) $(\boldsymbol{a - 2b})^2=$
5) $(\boldsymbol{3a^2 - b})^2=$
6) $(2x^2 - a^2)^2 =$
7) (7a − b)(7a + b)=
8) (3x + y)(3x − y) =
9) (2x − 5)(2x + 5) =
10) (5x + 10y)(5x −10y) =

4.- Producto de un binomio que tienen un término común:

$(x \pm a)(x \pm b) = x^2 + (a \pm b)x + (a)(b)$, siendo (x) el termino común y (a,b) términos no comunes.

Enunciado: El cuadrado del término común (x), más la suma algebraica de los términos no comunes (a y b), más el producto de los no comunes (a)(b) con sus respectivos signos.
Se pueden presentar cuatro situaciones diferentes:
$(x+a)(x+b)$ $(x+a)(x-b)$ $(x-a)(x+b)$ $(x-a)(x-b)$

Ejemplo

1) : $(\boldsymbol{x}+\mathbf{2})(\boldsymbol{x}+\mathbf{3}) = x^2 + (2+3)x + (2.3) = \boldsymbol{x^2}+\mathbf{5}\boldsymbol{x}+\mathbf{6}$

2) $(\boldsymbol{a}+\mathbf{3})(\boldsymbol{a}-\mathbf{4}) = a^2 + \left(3+(-4)\right)a + \left(3.(-4)\right) =$

$= a^2 + (-1)a + (-12) = \boldsymbol{a^2}-\boldsymbol{a}-\mathbf{12}$

5.- Producto de dos binomios sin términos comunes: Se procede hacer las multiplicaciones como en la propiedad distributiva.

$$(x+2)(y+5) = (x)(y)+(x)(5)+(2)(y)+(2)(5) = xy+5x+2y+10$$

Ejercicios:

1) $(a+3)(b+2) =$
2) $(2x+4)(y-6) =$

6. Cubo de la suma de dos cantidades $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3$

Enunciado: El cubo del primer término más el triple producto del primer término al cuadrado por el segundo más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo término.

$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^3 = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2.(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ desarrollamos el producto

$\boldsymbol{(a+b)^2.(a+b) = (a^2+2a.b+b^2).(a+b) =}$

$\boldsymbol{(a^2.a+a^2.b+2ab.a+2ab.b+b^2.a+b^2.b) = a^3+3a^2b+3b^2a+b^3}$

$$\boldsymbol{(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3b^2a+b^3}$$

Ejemplo: $\boldsymbol{(a+2)^3 = a^3+3(a^2.2)+3(a.2^2)+2^3 = a^3+6a^2+12a+8}$

Ejercicio: $\boldsymbol{(2+X^2)^3} =$

7) Cubo de la resta de dos cantidades $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^3$

Enunciado: El cubo del primer término menos el triple producto del primer término al cuadrado por el segundo más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo menos el cubo del segundo término.

$$\boldsymbol{(a-b)^3 = a^3-3a^2.b+3.a.b^2-b^3}$$

Ejemplo: $(2x - y)^3 = (2x)^3 - 3(2x)^2 . y + 3(2x).(y)^2 - y^3 =$

= $8x^3$ - $3(4). x^2 + 6xy^2 - y^3$ = = $8x^3$ - $12x^2 + 6xy^2 - y^3$

Ejercicios:

1) $(3a - 2b)^3 =$
2) $(x^2 - 2y)^3 =$

Refuerza con los siguientes videos.

https://www.youtube.com/watch?v=G-ym95yl3Es
https://www.youtube.com/watch?v=lihyC7Xglgs
https://www.youtube.com/watch?v=_b5ur5CHmHw
https://www.youtube.com/watch?v=z8QWgWI63MU

FACTORIZACION

Es el proceso algebraico o aritmético de descomponer una expresión (número o polinomio) en el producto de factores más simples que al multiplicarse resultan en la expresión original.

Ejemplo; El número 15 al factorizar se puede escribir como la multiplicación de dos factores, 3 . 5 = 15, donde 3 y 5 son factores de 15, cabe señalar, que al factorizar un numero o una expresión algebraica el resultado siempre será una multiplicación.

Ejemplo: 12 = 2 . 2 . 3 ó 4.3 = 12

5x = 5 . x ; $6x^2 = 2 . 3 . x . x$

Métodos de factorización

1) **Factor común:** Este es el caso de factorización que consiste en buscar un factor común y multiplicar todo por ese factor, ejemplo . **2x + 3xy ,** observa que (x) aparece multiplicando en los dos término de la expresión esto indica que (x) es el factor común de dicha expresión, por lo tanto, al factorizar, 2x + 3xy = x(2 + 3y)

Ejercicio: 1) $x^2 - 5xy =$ 2) $3x^2(a - b) + 2y(a - b) - 5(a - b) =$

2) **Diferencia de cuadrados perfectos**

Es una expresión algebraica formada por la resta de dos términos, donde cada uno es un cuadrado perfecto $a^2 - b^2$ Se factoriza como el producto de binomios conjugados: $(a+b)(a-b)$, calculando la raíz cuadrada de ambos términos y colocándolos en dos paréntesis con signos opuestos.

Ejemplo: Factorizar , $\boldsymbol{x^2-4}=\boldsymbol{x^2-\ 2^2=\ (x+2\ )(x-2)}$

Factorizar: 1) $\boldsymbol{a^2-16}=$ 2) $\boldsymbol{y^2-81=}$ 3) $\boldsymbol{4x^2-25=}$

3) **Suma de cubos perfectos**

La suma de cubos es un producto notable factorizable mediante la fórmula $a^3+\ b^3=\ (a+b)(a^2-\ a.b+\ b^2)$, donde a y b son las raíces cúbicas de los términos. Se descompone en un binomio por la suma de las raíces y un trinomio (cuadrado de la primera, menos producto de ambas, más cuadrado de la segunda). Ejemplo: Factoriza. $\boldsymbol{x^3+8=}$ $\boldsymbol{\sqrt[3]{x^3}=x}$; $\boldsymbol{\sqrt[3]{8}=2}$

$\boldsymbol{x^3+8=\ (x+2)\ (x^2-2.x+\ 2^2)}=\boldsymbol{(x+2)(x^2-2x+4)}$

Factorizar: 27$\boldsymbol{a^3+8=}$

4) **Diferencia de cubos perfectos**

La diferencia de cubos perfectos es un caso de factorización de binomios donde ambos términos tienen raíces cúbicas exactas y se restan, siguiendo la fórmula $a^3-\ b^3=\ (a-b\ )(a^2+ab+b^2)$

. El resultado es el producto de un binomio (raíces cúbicas restadas) por un trinomio (cuadrado de la primera raíz, más producto de raíces, más cuadrado de la segunda). Ejemplo: $\boldsymbol{x^3-\ 27=\ x^3-\ 3^3}=\boldsymbol{(x-3)(x^3+3.x+\ 3^2)}$

$$\boldsymbol{x^3-27=\ (x-3\ )(x^2+3x+9)}$$

Factorizar: 125$\boldsymbol{x^3\ -27y^3\ =}$

5) **Trinomios de cuadrados perfectos:**
se identifica por tener tres términos, de los cuales dos tienen raíces cuadradas exactas, y el restante equivale al doble producto de las raíces del primero por el segundo.

a) $\boldsymbol{a^2+2ab+b^2=\ (a+b)^2}$
b) $\boldsymbol{a^2-\ 2ab+\ b^2=\ (a-b)^2}$

Para solucionar un trinomio cuadrado perfecto debemos reordenar los términos dejando el primero y de tercero los términos que tengan raíz cuadrada, o también podemos organizarlos ascendente o descendente (tanto el primero como el tercer término deben ser positivos); luego extraemos la raíz cuadrada del primer y tercer término y los escribimos en un paréntesis, separándolos por el signo que acompaña al segundo término, este debe ser el doble del producto de la raíz cuadrada del primer término por el segundo término; al cerrar el paréntesis elevamos todo el binomio al cuadrado. Ejemplo: $\boldsymbol{x^2+4x+4=}\quad (\boldsymbol{x+2})^2$

Primer término $\boldsymbol{x^2}$; $\sqrt{\boldsymbol{x^2}}=\boldsymbol{x}$ Tercer término, 4 ; $\sqrt{\boldsymbol{4}}=\boldsymbol{2}$

$$\boldsymbol{x^2+2.x.2+2^2=\ x^2+4x+4=\ (x+2)^2}$$

1) Factorizar : $\boldsymbol{x^2+6x+9}=$

6) Trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2+bx+c}$

El trinomio de la forma $\boldsymbol{x^2+bx+c}$ se caracteriza por tener tres términos, donde el primero es una variable al cuadrado ($\boldsymbol{x^2}$) con coeficiente 1, el segundo es lineal (bx) y el tercero es un término independiente (c). Se factoriza buscando dos números que multiplicados den (c) y sumados den (b), resultando en (x+p)(x+q).

Ejemplo: $\boldsymbol{x^2+5x\ 6}$ = se extrae la raíz cuadra del primer término y luego se buscan dos números que multiplicados den 6 y sumados den 5, $\sqrt{\boldsymbol{x^2}}$ =x
$\boldsymbol{x^2+5x+6=\ (x+3)(x+2)}$

1) **Factorizar:** $\boldsymbol{x^2+11x+24}=$ se extrae la raíz cuadrada del primer término y se buscan dos números que multiplicados den 24 y sumado 11., $\boldsymbol{x^2+11x+24\ =\ (x\ +8\ )(x+3\ )}$
2) **Factorizar:** $\boldsymbol{x^2-6x+8=}\ \ (\boldsymbol{x-}\ \ )(\boldsymbol{x\ -}\ \ )=$ se busca dos números que multiplicados den 8 y sumados den -6. $(\boldsymbol{-4})(\boldsymbol{-2})=\boldsymbol{8}$; $(\boldsymbol{-4-2=-6})$
x^2+11x+24 = $(\boldsymbol{x-4})(\boldsymbol{x-2})$

3) **Factorizar:** $\boldsymbol{x^2+9x+18}=$

7) Trinomio de la forma $\boldsymbol{ax^2+\ bx+c}$

El trinomio de la forma ax^2+bx+c es una expresión algebraica de tres términos, donde el coeficiente principal 'a' es diferente de 1. Se factoriza comúnmente multiplicando y dividiendo todo el trinomio por 'a', buscando dos números que multiplicados den a.c y sumados den b **,** para luego agrupar y simplificar, obteniendo factores lineales.
Ejemplo: $2x^2$ + 7x + 3 =
Se multiplica y divide toda la expresión por 2, $\frac{2\left(2x^2+7x+3\right)}{2}=\frac{(2)2x^2+7.2x+2.3}{2}=$ $\frac{(2x)^2+7.(2x)+6}{2}=\frac{(2x+\ )(2x+\ )}{2}=$ se busca dos números que multiplicados de (6) y sumados den (7), estos son 6 y 1. $\frac{(2x+6)(2x+1)}{2}=$ se saca factor común en el numerador $\frac{2(x+\ 3\ )(2x+\ 1)}{2}$ = $(\boldsymbol{x+3})(\boldsymbol{2x+1})$
Factorizar: $\boldsymbol{3x^2+11x+6}$ **=**

Factorizar: $\boldsymbol{x^2-2x-15=\frac{8\left(8x^2-2x-15\right)}{8}=\frac{(8x)^2-2.(8x)-8.15}{8}=\frac{(8x)^2-2.(8x)-120}{8}}$ **=** $\boldsymbol{\frac{(8x-\ )\ (8x+\ )}{8}}$**=** Se buscan dos números que multiplicados den 120 y restado -2, estos son (12 y 10) $\frac{(8x-12)\ (8x+10)}{8}=\frac{4(2x-3)\ 2(4x+5)}{8}=\frac{8(2x-3)\ (4x+5)}{8}=\boldsymbol{(2x-3)(4x+5)}$

8) **Factorización de Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ utilizando el método de la resolvente.**

Cuando se tienen polinomios o ecuaciones de segundo grado que no podemos factorizar a través de los casos anteriores, se puede proceder como una simple ecuación de segundo grado y se utiliza la resolvente.

X= $\frac{-b\pm\left(\sqrt{b^2-4.a.c}\right)}{2.a}$: $x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$: $x = \frac{-b-\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a}$

Ejemplo: $x^2 + 2x - 3 = 0$ se iguala a cero el trinomio y se toman los valores de los coeficiente de cada termino. a= 1 , b= 2 y c= -3

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a} = \frac{-2+\sqrt{2^{\,2}-4.(1)(-3)}}{2.1} = \frac{-2+\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2+\sqrt{16}}{2} = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Entonces , x=1 = (x -1)=0

$$x = \frac{-b+\sqrt{b^2-4.a.c}}{2.a} = \frac{-2-\sqrt{2^{\,2}-4.(1)(-3)}}{2.1} = \frac{-2-\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2-\sqrt{16}}{2} = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = 3$$

Entonces, x=-3: (x + 3)=0

Factorizando $\boldsymbol{x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)}$

Ejercicios: 1) x 2 + 2x + 1 = **2**) 4x2 + 7x – 2 = **3**) x 2 – 5x + 6 =

FACTORIZACION POR EL METODO DE RUFFINI

Pasos para la Factorización por Ruffini:

1. **Ordenar y completar:** El polinomio debe estar ordenado de mayor a menor grado. Si faltan términos, se coloca cero en su lugar.
2. **Encontrar divisores:** Buscar los divisores del término independiente (el número sin (x)).
3. **Aplicar Ruffini:** Colocar los coeficientes en una tabla y probar los divisores (raíces) hasta obtener cero en el resto.
4. **Escribir el factor:** Si a es la raíz, (x – a) es un factor.
5. **Repetir:** Usar el cociente obtenido para repetir el proceso hasta llegar a un polinomio de primer o segundo grado.

Ejemplo: Factorizar $X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = 0$

El polinomio esta ordenado y está completo.

Los divisores de -6 son: $\pm1, \pm2\,, \pm3\; y\; \pm 6$

Se realiza la tabla con los coeficientes del polinomio

1	1	-6	11	-6	
		1	-5	6	**x=1; (x -1) =0**
:					
	1	-5	6	0	
2		2	-6		x=2; (x -2) =0
	1	**-3**	**0**		
3		**3**			**x=3 ; (x – 3)=0**
	1	**0**			

Al factorizar $X^3 - 6X^2 + 11X - 6 = (\boldsymbol{x - 1})(\boldsymbol{x - 2})(\boldsymbol{x - 3})$

Refuerza con el siguiente el video

https://www.youtube.com/watch?v=dfWMHwO9cmo

FACTORIZA APLICANDO MÉTODO DE RUFFINNI

1) $\boldsymbol{2x^3 - 7x^2 + 8x - 3}$**=**
2) $\boldsymbol{x^3 - x^2 - 4 =}$
3) $\boldsymbol{x^3 + 3x^2 - 4x - 12 =}$

RACIONALIZACION MONÓMICA Y BINÓMICA

La racionalización de un monomio consiste en eliminar los radicales (raíces) del denominador de una fracción, multiplicando tanto el numerador como el denominador por una expresión radical adecuada que convierta el denominador en un número racional

a) **Racionalización** del tipo $\dfrac{a}{b\sqrt{c}}$

Se multiplica el numerador y el denominador por $\sqrt{c}$.

$$\frac{a}{b\sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b\sqrt{c} \cdot \sqrt{c}} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b\left(\sqrt{c}\right)^2} = \frac{a \cdot \sqrt{c}}{b \cdot c}$$

Ejemplo: Racionalizar la expresión, $\frac{2}{\sqrt{2}}$**,** en este caso se multiplica el numerador y el denominador por el radical del denominador ya que es una raíz cuadrada, luego se aplica las propiedades de los radicales.

$$\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2}$$

Racionaliza: $\frac{3}{2\sqrt{3}} =$

b) **Racionalización** del tipo $\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$

Se multiplica numerador y denominador por $\sqrt[n]{c^{n-m}}$.

$$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b \cdot \sqrt[n]{c^m} \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b \cdot \sqrt[n]{c^m \cdot c^{n-m}}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b \cdot \sqrt[n]{c^n}} = \frac{a \cdot \sqrt[n]{c^{n-m}}}{b \cdot c}$$

Ejemplo: $\frac{3}{2\sqrt[5]{4}} = \frac{3}{2\sqrt[5]{4}} \cdot \frac{\sqrt[5]{4^4}}{\sqrt[5]{4^4}} = \frac{3.\sqrt[5]{4^4}}{2.\sqrt[5]{4^5}} = \frac{3\sqrt[5]{4^4}}{2.4} = \frac{3\sqrt[5]{256}}{8}$

c) **Racionalización** del tipo $\frac{a}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}$

Y en general cuando el denominador sea un **binomio con al menos un radical.**

Se multiplica el numerador y denominador por el conjugado del denominador.

El conjugado de un binomio es igual al binomio con el signo central cambiado:

$$a + b \quad \rightarrow \quad a - b$$

$$-a + b \quad \rightarrow \quad -a - b$$

$$a - b \quad \rightarrow \quad a + b$$

$$-a - b \quad \rightarrow \quad -a + b$$

También tenemos que tener en cuenta que: "**suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados**".

$$(a+b)(a-b)=a^2 - b^2$$

Racionalizar: $\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$

$$\frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} \cdot \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2}+\sqrt{5})} = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{2-5} = \frac{3(\sqrt{2}+\sqrt{5})}{-3}$$

$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{-1} = -(\sqrt{2}+\sqrt{5})$$

Ejercicios: Racionalizar

1) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

2) $\frac{2}{3\sqrt[3]{2}}$

3) $\frac{5}{2+\sqrt{3}}$

https://www.youtube.com/watch?v=F8gyJQkRKpA

https://www.youtube.com/watch?v=f-lXcjKHe9Q&t=190s

https://www.youtube.com/watch?v=9YT83Uzl6nw