TEMA 6

MATRICES Y DETERMINANTES

Una matriz en matemáticas es un conjunto bidimensional de números o símbolos organizados en filas (horizontales) y columnas (verticales), dispuestos en forma rectangular y generalmente delimitados por corchetes o paréntesis [ ] o ( ). Se definen por su dimensión o tamaño (mxn) (filas x columnas) y se utilizan para resolver sistemas de ecuaciones lineales, transformaciones geométricas y en álgebra lineal.

$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$, a y c primera fila, b d segunda fila, ayb primera columna y c d segunda columna

Los elementos organizados horizontalmente (a y c) pertenecen a la primera fila, (b y d) a la segunda fila y los elementos organizados verticalmente (a , b) pertenecen a la primera columna y (c ,d) a la segunda columna.

Elementos (a_{ij}): Son los números individuales. El primer subíndice (i) indica la fila y el segundo (j) la columna donde se encuentran ubicados. En este caso (a_{11}), (c_{12}), (b_{21}) y (d_{22}).

Dimensión (Orden): Indica en una matriz (m×n) el número de filas y columnas que la conforma Ejemplo una matriz 2 x 2, posee dos filas y dos columnas. Ejemplo:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x & n \\ y & m \end{pmatrix}_{2x2}$ $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}$3x3

Matriz Cuadrada: Tiene el mismo número de filas que de columnas (m=n).

$\begin{pmatrix} x & n \\ y & m \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}_{3x3}$

Matriz Identidad: Una matriz identidad (I) es una matriz cuadrada que tiene unos (1) en la diagonal principal y ceros (0) en el resto de las posiciones

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

TIPOS DE MATRICES

MATRIZ FILA: Una matriz fila está constituida por una sola **fila**. Por ejemplo:

(a b c d), (1 2 1 0), (x y), (m n s)

MATRIZ COLUMNA: La matriz columna tiene una sola **columna. Ejemplo**

$\begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{-4} \\ \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{3} \end{pmatrix}$

MATRIZ RECTANGULAR: La matriz rectangular tiene distinto número de filas que de columnas, su dimensión es $m \times n$, siendo m el número de filas y n el de columnas. Por ejemplo

$\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$ m = 2 y n= 3, m x n = 2 x 3

MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR: Elementos por debajo de la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

MATRIZ TRIANGULAR INFERIOR: Elementos por encima de la diagonal principal son cero.

$$A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

MATRIZ TRASPUESTA: Dada una matriz A, se llama matriz traspuesta de A a la matriz que se obtiene
cambiando ordenadamente las filas por las columnas. Por ejemplo

$$A= \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix} \ , \quad A = \begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & 2 & 2\\ 3 & 5 & 1\end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 1 & 2 & 5\\ 4 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

OPERACIONES PRINCIPALES CON MATRICES

SUMA Y RESTA (A + B): Solo es posible si las matrices tienen el mismo orden (mismo número de filas y columnas). Se suman o restan los elementos en las mismas posicione. Ejemplo: Hallar A + B

$$A= \begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \quad B= \begin{pmatrix}1 & 4\\ 3 & 2\end{pmatrix}, \quad A + B = \begin{pmatrix}2+1 & 1+4\\ 1+3 & 1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 5\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$

$$A= \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix} \quad B= \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix}2-1 & 3-2\\ 3-3 & 2-4\\ 4-2 & 1-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

- **PRODUCTO DE UN ESCALAR (k.A):** Se multiplica cada elemento de la matriz (A)

  por el número real (k). Ejemplo Sea k= 3 y A=$\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, hallar k.A .

  $$3x\begin{pmatrix}2 & 4\\ 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.2 & 3.4\\ 3.1 & 3.3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6 & 12\\ 3 & 9\end{pmatrix}$$

- **MULTIPLICACION DE MATRICES (A.B):** El número de columnas de la primera matriz debe coincidir con el número de filas de la segunda. El elemento resultante c_{ij} es la suma de los productos de los elementos de la fila i de A por la columna j de B (A.B). **No es conmutativa** (A.B ≠ B.A), Ejemplo:

A.B = C

A= $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ Hallar A . B, $\begin{pmatrix} 2.3+4.1 & 2.2+4.3 \\ 3.3+1.1 & 3.2+1.3 \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} 6+4 & 4+12 \\ 9+1 & 6+3 \end{pmatrix}$= C= $\begin{pmatrix} 10 & 16 \\ 10 & 9 \end{pmatrix}$

Ejemplo: Sea A= $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, B= $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, A.B = $\begin{pmatrix} 1.1+1.2 & 1.3+1.2 \\ 1.1+0.2 & 1.3+0.2 \\ 3.1+2.2 & 3.3+2.2 \end{pmatrix}$= $C = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$

https://www.youtube.com/watch?v=HOb-U8kHDY0

https://www.youtube.com/watch?v=Tjrm3HsqBXE

MATRICES Y SISTEMA ECUACIONES

Las matrices son arreglos rectangulares de números organizados en filas y columnas, fundamentales para representar y resolver sistemas de ecuaciones lineales de forma eficiente mediante la matriz de coeficientes (A), el vector de incógnitas (X) y el vector de términos independientes (B), expresado comúnmente como AX = B. Permiten utilizar métodos como la eliminación de Gauss-Jordan para encontrar soluciones, clasificando los sistemas en compatibles (determinados/indeterminados) o incompatibles.

Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican principalmente por el número de soluciones que poseen en tres tipos: **compatibles determinados** (una solución única), **compatibles indeterminados** (infinitas soluciones) e **incompatibles** (sin solución)

- **Matriz de Coeficientes:** Matriz que contiene solo los valores numéricos que acompañan a las variables en el sistema.
- **Matriz Aumentada:** Matriz que incluye los coeficientes y la columna de términos independientes, facilitando la resolución mediante operaciones elementales de fila.
- **Representación Matricial:** Un sistema AX = B , donde (A) es la matriz de coeficientes [(X) la columna de incógnitas y (B) la columna de los resultados o termino independiente.

Ejemplo:

5x – 2y –z=0	completamos el sistema	5x – 2y – z=0
3x + z =-5		3x +0y + z =-5
-x + 4y -2z = 1		-x + 4y -2z = 1

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \end{array}\right)$ Representación matriz aumentada del sistema

METODO GAUSS

El método de Gauss para matrices es una técnica de eliminación utilizada para resolver sistemas de ecuaciones lineales, Consiste en transformar la matriz ampliada original en una matriz escalonada (triangular superior) mediante operaciones elementales de fila (intercambiar filas, multiplicar por un escalar, sumar/restar filas). Hay que intentar hacer ceros todos los elementos por debajo de la diagonal principal. Una vez conseguido esto, basta volver a recomponer el sistema que queda obteniéndose un sistema escalonado, es decir, un sistema donde cada ecuación tiene una incógnita más que la anterior.
Ejemplo:

Sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=16 \\ x-4y+5z=3 \\ 3x+y+3z=11 \end{cases}$$

Construimos la matriz ampliada con los coeficientes de las ecuaciones

$$\begin{array}{ccc} x & y & z \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 16 \\ 1 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$ intercambiamos F1 con F2 $$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 16 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$$

Procedemos a convertir en la matriz triangular superior

-2F1 + F2 $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 3 \\ \mathbf{0} & 11 & -6 & 10 \\ 3 & 1 & 3 & 11 \end{pmatrix}$,para convertir en cero el primer elemento de la segunda fila, multiplicamos por -2 fila 1 y le sumamos fila 2

-3F1+F3 $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 3 \\ \mathbf{0} & 11 & -6 & 10 \\ \mathbf{0} & 13 & -12 & 2 \end{pmatrix}$, para convertir en cero el primer elemento de la tercera fila ,multiplicamos por -3 fila 1 y le sumamos fila 3

13F2 -11F3 $\begin{pmatrix} 1 & -4 & 5 & 3 \\ \mathbf{0} & 11 & -6 & 10 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 54 & 108 \end{pmatrix}$, para convertir en cero el segundo elemento de la tercera fila, multiplicamos por 13 la fila2 y por 11 la fila 3 y luego las restamos.

Ya tenemos la matriz triangular superior, procedemos a hallar los valores de las variables (x,y ,z) de abajo hacia arriba., tomando los valores de la matriz

1) Tercera fila, 54z = 108 , z =$\frac{108}{54} = 2$, $\boldsymbol{z = 2}$
2) Segunda fila, 11y -6z = 10, 11y -6(2) = 10 , 11y – 12 = 10, 11y = 10 +12
   11y = 22 , y=$\frac{22}{11} = 2$, $\boldsymbol{y = 2}$
3) Primera fila, x – 4y + 5z = 3 , x – 4(2) + 5(2) = 3 , x – 8 + 10 = 3
   X = 3 +8 – 10 , **x =1**

   Solución: x = 1 , y=2 , z= 2

https://www.youtube.com/watch?v=iMCkKatIAw8

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

El determinante es un valor escalar único asociado a una matriz cuadrada (mxn), calculado mediante operaciones algebraicas de sus elementos. Se utiliza para resolver sistemas lineales, calcular matrices inversas y determinar si una matriz es singular (det=0). Su símbolo es $|A|$ o det(A).

Métodos de Cálculo:

- **Matriz 2 x 2 :** det $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a.b - c.b$
- **Matriz 3 x3 :** Se usa la **Regla de Sarrus** (sumar productos de diagonales principales y restar diagonales secundarias) o expansión por cofactores (Laplace).
- **Matrices mx n :** Expansión de Laplace o eliminación gaussiana para triangular la matriz y multiplicar los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo MATRIZ 2X2: calcular el determinante $[A] = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ = 3.2 -4.5 = 6 – 20 = -14 , $[A] = -14$

Calcular el determinante de B = $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, C= $\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, D = $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

MATRIZ 3X3 : A = $\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{d} & \boldsymbol{e} & \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{g} & \boldsymbol{h} & \boldsymbol{i} \end{vmatrix}$ aplicando la **Regla de Sarrus**

A = $\begin{vmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{vmatrix}$ =**a.e.i + b.f.g + c.d.h – (g.e.c + h.f.a + i.d.b) =**

se amplía la matriz escribiendo a la derecha las dos primeras columnas o las dos primeras filas debajo de tercera fila, se realiza la suma de los productos de los elementos de la diagonal principal y luego se resta la suma de los productos de los elementos de la diagonal secundaria.

Ejemplo: calcular el determinante A = $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

Aplicamos la Regla de Sarrus A = . $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & -6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

A=$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 4 & 5 & -3 & 4 \\ 2 & -4 & -6 & 2 & -4 \end{bmatrix}$ = (-2)(4)(-6) + (1)(5)(2) + (3)(-3)(-4) - $[(2)(4)(3)+(-4)(5)(-2)+(-6)(-3)(1) = 48+10+36-(24+40+18] = 94-82 = 12$ **, solución,** $[\boldsymbol{A}] = \mathbf{12}$

2) Ejercicio: Calcular el determinante de B= $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -9 & 3 & 0 \end{bmatrix}$=

REGLA DE CRAMER

Este método, basado en el uso de determinantes, es una herramienta algebraica eficaz para encontrar soluciones de sistemas cuadrados (es decir, con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas), siempre que el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de cero.

Recordemos que un sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial como AX = B , Donde (A) es la matriz de los coeficientes del sistema,(X) es la matriz con las incógnitas y (B) la matriz de los términos independientes de las ecuaciones.

Para poder aplicar la regla de Cramer, la matriz A tiene que ser cuadrada y regular (determinante distinto de 0).

Bajo estas condiciones, la **regla de Cramer** es la siguiente:

La incógnita x_i del sistema AX=b es $x_i = \frac{[Ai]}{[A]}$ donde A_i es la matriz A, pero cambiando la columna i de A por la columna de términos independientes, b. ejemplo:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - 3y = 2} \\ \boldsymbol{x + 5y = 10} \end{cases}$$

$\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ Matriz de los coeficientes

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ Matriz de las incógnitas

$\begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix}$ Matriz de los términos independientes

Hallamos el determinante de la matriz de los coeficientes de las ecuaciones para verificar si es una matriz regular es decir $[A] \neq 0$

A = $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$ = 1. 5 – 1.(-3) = 5+3 = 8 $[\boldsymbol{As}] = \mathbf{8}$ aplicamos la regla de cramer

Ax = $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{10} & \mathbf{5} \end{bmatrix}$ para hallar el valor de (x), cambiamos los coeficientes de la incógnita (x) en la matriz (A) y calculamos el determinante. $\begin{bmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{10} & \mathbf{5} \end{bmatrix} = \mathbf{2.5} - 10(-3) = 10 + 30 = 40$, **x=** $\frac{[Ax]}{[As]}$ **, x=** $\frac{\mathbf{40}}{\mathbf{8}}$ **, solución x= 5**

Ay = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$, para hallar el valor de (y), cambiamos los coeficientes de la incógnita (y) en la matriz (A) y calculamos el determinante.

Ay = $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} = 1.10 - 1.2 = 10 - 2 = 8$ **[Ay] = 8**

y = $\frac{[Ay]}{[As]}$, y = $\frac{8}{8} = 1$ **solución y=1, Solución del sistema: x=5 ,y=1**

2)Ejercicio: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + y = 1} \\ \boldsymbol{2x + y = 0} \end{cases}$$

SISTEMA DE ECUACION 3X3

$\begin{cases} \boldsymbol{X + Y - Z = 0} \\ \boldsymbol{3X + Y - Z = 2} \\ \boldsymbol{4X - 2Y + Z = 3} \end{cases}$ Matriz de los coeficientes **A=** $\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$ **,** Hallamos el valor del determinante

$$|As| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{4} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = 1 - 4 + 6 - [-4 + 2 + 3] = 3 - 1 = 2, |\boldsymbol{A}| = \mathbf{2}$$

$|\boldsymbol{Ax}| = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} \end{vmatrix}$ Cambiamos los coeficientes de la incógnita (x) por los coeficientes del termino independiente, luego hallamos el valor del determinante.

$\begin{vmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{-2} \end{vmatrix} = \mathbf{0} - \mathbf{3} + \mathbf{4} - (\mathbf{-3}$ + 0 + 2) = -3 + 4 + 3 – 2= 2 **,** $|\boldsymbol{Ax}| = \mathbf{2}$

x = $\frac{|\boldsymbol{Ax}|}{|\boldsymbol{As}|}$ **, x=** $\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}}$ **, solución x = 1**

$|Ay| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ Cambiamos los coeficientes de la incógnita (y) por los coeficientes del termino independiente, luego hallamos el valor del determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 9 - (-8 - 3 + 0) = 2 - 9 + 8 + 3 = 4 \quad |Ay| = 4$$

y = $\frac{|Ay|}{|As|}$ **y = $\frac{4}{2}$, solución y= 2**

$|Az| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ Cambiamos los coeficientes de la incógnita (z) por los coeficientes del termino independiente, luego hallamos el valor del determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 + 8 + 0 - (0 - 4 + 9) = 3 + 8 + 4 - 9 = 6 \quad |Az| = 6$$

z = $\frac{|Az|}{|As|}$ **y = $\frac{6}{2}$, solución z= 3 , Solución del sistema x=1 , y=2, z= 3**

2) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando regla de cramer

1) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$

https://www.youtube.com/watch?v=lLPcHVAqY80