Derivada de una constante

$f(x) = k \qquad f'(x) = 0$

Derivada de x

$f(x) = x \qquad f'(x) = 1$

Derivada de la función lineal

$f(x) = ax + b \qquad f'(x) = a$

Derivada de una potencia

$f(x) = u^k \qquad f'(x) = k \cdot u^{k-1} \cdot u'$

Derivada de una raíz cuadrada

$f(x) = \sqrt{u} \qquad f'(x) = \dfrac{u'}{2 \cdot \sqrt{u}}$

Derivada de una raíz

$f(x) = \sqrt[k]{u} \qquad f'(x) = \dfrac{u'}{k \cdot \sqrt[k]{u^{k-1}}}$

EJEMPLOS:

1. $f(x) = -2$

$f'(x) = 0$

2. $f(x) = -5x$

$f'(x) = -5$

3. $f(x) = -\dfrac{7}{2}x - 3$

$f'(x) = -\frac{7}{2}$

4. $f(x) = x^4$

$f'(x) = 4x^3$

5. $f(x) = x^{-4}$

$f'(x) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$

6. $f(x) = \left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$

$f'(x) = 3\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2 \cdot 2$

7. $f(x) = \sqrt{5x+2}$

$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x+2}}$

8. $f(x) = \sqrt[4]{2x-4}$

$f'(x) = \frac{2}{4\sqrt[4]{(2x-4)^3}}$

9. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

Derivada de una suma

$f(x)=u\pm v$ $\qquad$ $f'(x)=u'\pm v'$

Derivada de una constante por una función

$f(x)=k\cdot u$ $\qquad$ $f'(x)=k\cdot u'$

Derivada de un producto

$f(x)=u\cdot v$ $\qquad$ $f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'$

Derivada de una constante partida por una función

$f(x)=\frac{k}{v}$ $\qquad$ $f'(x)=\frac{-k\cdot v'}{v^2}$

Derivada de un cociente

$f(x)=\frac{u}{v}$ $\qquad$ $f'(x)=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$

Ejemplos

1. $f(x)=-2x^2$

$f'(x)=-4x$

2. $f(x)=-2x^2-5x+2$

$f'(x)=-4x-5$

3. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 5x + 2$

$f'(x) = 9x^2 - 4x - 5$

4. $f(x) = x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 5x + 2$

$f'(x) = 4x^3 + 9x^2 - 4x - 5$

5. $f(x) = \left(x^2 - 1\right)\left(x^3 + 3x\right)$

$f'(x) = 2x\left(x^3 + 3x\right) + \left(x^2 - 1\right)\left(3x^2 + 3\right)$

6. $f(x) = \dfrac{3\left(x^2 + 2\right)^3}{5} = \dfrac{3}{5}\left(x^2 + 2\right)^3$

$f'(x) = \dfrac{3}{5} \cdot 3\left(x^2 + 2\right)^2 \cdot 2x = \dfrac{18}{5} x \left(x^2 + 2\right)^2$

7. $f(x) = \dfrac{3x^3 + x + 2}{5x^2 + 1}$

$$f'(x) = \frac{\left(9x^2 + 1\right)\left(5x^2 + 1\right) - \left(3x^3 + x + 2\right)(10x)}{\left(5x^2 + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{15x^4 + 4x^2 - 20x + 1}{\left(5x^2 + 1\right)^2}$$

8. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+1}$

$$f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}(x+1)-\sqrt{x-1}}{(x+1)^2}=\dfrac{x+1-2(x-1)}{2(x+1)^2\sqrt{x-1}}$$

$$=\dfrac{-x+3}{2(x+1)^2\sqrt{x-1}}$$

9. $f(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\dfrac{-2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{x}=-\dfrac{1}{x\sqrt{x}}$$

Derivada de la función exponencial

$f(x)=a^u$ $\qquad$ $f'(x)=u'\cdot a^u\cdot\ln a$

Derivada de la función exponencial de base e

$f(x)=e^u$ $\qquad$ $f'(x)=u'\cdot e^u$

Ejemplos

1. $f(x)=2^{x^2-1}$

$$f'(x)=2x\cdot 2^{x^2-1}\cdot\ln 2$$

2. $f(x)=3^{\sqrt{x^2-1}}$

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\,3^{\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln 3=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,3^{\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln 3$$

3. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2}\,e^{\frac{1}{x}}$$

4. $f(x)=x^3\cdot e^{-3x}$

$$f'(x)=3x^2\cdot e^{-3x}+x^3\cdot(-3)\cdot e^{-3x}=3x^2\cdot e^{-3x}\,(1-x)$$

5. $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{x}}$

$$f'(x)=\frac{2\cdot e^{2x}\cdot\sqrt{x}-e^{2x}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{\dfrac{4xe^{2x}-e^{2x}}{2\sqrt{x}}}{x}=\frac{4xe^{2x}-e^{2x}}{2x\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{e^{2x}\,(4x-1)}{2x\sqrt{x}}$$

DERIVADA DE LA FUNCION LOGARITMICA

$f(x)=\log_a u$ $\qquad\qquad$ $f'(x)=\dfrac{u'}{u}\cdot\log_a e$

Como $\log_a e=\dfrac{\ln e}{\ln a}=\dfrac{1}{\ln a}$, también se puede expresar así:

$$f(x) = \log_a u \qquad f'(x) = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

Derivada con logaritmo neperiano

$$f(x) = \ln u \qquad f'(x) = \frac{u'}{u}$$

Ejemplos

1. $f(x) = \log_2 \left(x^4 - 3x\right)$

$$f(x) = \frac{4x^3 - 3}{\left(x^4 - 3x\right)} \cdot \log_2 e$$

2. $f(x) = \sqrt[3]{\log_4 3x}$

$$f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(\log_4 3x)^2}} \cdot \frac{3}{3x} \cdot \log_4 e = \frac{\log_4 e}{3x\sqrt[3]{(\log_4 3x)^2}}$$

3. $f(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

Aplicando las propiedades de los logaritmos tenemos:

$$f(x) = \ln(1-x) - \ln(1+x)$$

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x} - \frac{1}{1+x} = \frac{-1-x-1+x}{(1-x)(1+x)} = \frac{-2}{1-x^2}$$

4. $f(x) = \log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

Aplicando las propiedades de los logaritmos tenemos:

$$f(x)=\frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\left[\log(1+x)-\log(1-x)\right]$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}\cdot\log e+\frac{1}{1-x}\cdot\log e\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)\log e=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1-x+1+x}{1-x^2}\right)\log e=\frac{1}{1-x^2}\cdot\log e$$

5. $f(x)=x^5\cdot\ln x$

$$f'(x)=5x^4\cdot\ln x+x^5\cdot\frac{1}{x}=5x^4\cdot\ln x+x^4=x^4(5\ln x+1)$$

6. $f(x)=\ln^5 3x=(\ln 3x)^5$

$$f'(x)=5\cdot(\ln 3x)^4\cdot\frac{3}{3x}=\frac{5}{x}\cdot\ln^4 3x$$

Derivada de la función seno

$f(x)=sen\,u$ $\qquad$ $f'(x)=u'\cdot\cos u$

Derivada de la función coseno

$f(x)=\cos u$ $\qquad$ $f'(x)=-u'\cdot sen\,u$

Derivada de la función tangente

$f(x)=tg\ u$ $\qquad$ $f'(x)=\dfrac{u'}{\cos^2 u}=u'\cdot\sec^2 u=u'\cdot(1+tg^2 u)$

Derivada de la función cotangente

$$f(x) = \cot g\, u \qquad f'(x) = -\frac{u'}{sen^2 u} = -u' \cdot co\sec^2 u = -u' \cdot (1 + cotg^2 u)$$

Derivada de la función secante

$$f(x) = \sec u \qquad f'(x) = \frac{u' \cdot sen u}{\cos^2 u} = u' \cdot \sec u \cdot tg\, u$$

Derivada de la función cosecante

$$f(x) = \operatorname{cosec} u \qquad f'(x) = -\frac{u' \cdot \cos u}{sen^2 u} = -u' \cdot \operatorname{cosec} u \cdot \operatorname{cotg} u$$

Ejemplos

1. $f(x) = sen\ 4x$

$f'(x) = 4 \cos 4x$

2. $f(x) = sen\ x^4$

$f'(x) = 4x^3 \cos x^4$

3. $f(x) = sen^4\ x = (sen\, x)^4$

$f'(x) = 4\, sen^3\ x\ \ \cos x$

4. $f(x) = \frac{\cos x}{5}$

$f'(x) = -\frac{1}{5} sen\, x$

5. $f(x) = \cos\left(3x^2 + x - 1\right)$

$f'(x) = -(6x+1)\,sen\left(3x^2 + x - 1\right)$

6. $f(x) = \frac{1}{2}\cos^2 5x = \frac{1}{2}(\cos 5x)^2$

$f'(x) = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \cos 5x \cdot (-sen\,5x)\cdot 5 = -5\cos 5x \cdot sen\,5x$

7. $f(x) = tg\sqrt{x}$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\cos^2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\cdot\cos^2\sqrt{x}}$

8. $f(x) = \operatorname{cotg} 4x^2$

$f'(x) = -\frac{8x}{\operatorname{sen}^2 4x^2}$

9. $f(x) = \operatorname{cotg}^2 4X = (\operatorname{cotg} 4X)^2$

$f'(x) = -\frac{2\cdot 4\cdot \operatorname{cotg} 4X}{\operatorname{sen}^2 4x} = -\frac{8\cdot \operatorname{cotg} 4X}{\operatorname{sen}^2 4x}$

10. $f(x) = \sec 5x$

$$f'(x) = \frac{5 \cdot \operatorname{sen} 5x}{\cos^2 5x}$$

11. $f(x) = \operatorname{cosec}\left(\frac{x}{2}\right)$

$$f'(x) = -\frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Derivada de la función arcoseno

$f(x) = arc\ \operatorname{sen} u$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Derivada de la función arcocoseno

$f(x) = arc\ \cos u$ $\qquad$ $f'(x) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Derivada de la función arcotangente

$f(x) = arc\ tg\ u$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{u'}{1+u^2}$

Derivada de la función arcocotangente

$f(x) = arc\ \cot g\ u$ $\qquad$ $f'(x) = -\frac{u'}{1+u^2}$

Derivada de la función arcosecante

$f(x) = arc\ \sec u$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2 - 1}}$

Derivada de la función arcocosecante

$$f(x) = \text{arc cosec}\, u \qquad f'(x) = -\frac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2 - 1}}$$

Ejemplos

1. $f(x) = arc\ sen\,(2x - 3)$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1 - (2x - 3)^2}}$$

3. $f(x) = arc\ tg\ 3x^2$

$$f'(x) = \frac{6x}{1 + 9x^4}$$

3. $f(x) = arc\ \cos\ x^2$

$$f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1 - \left(x^2\right)^2}} = -\frac{2x}{\sqrt{1 - x^4}}$$