TEMA 8

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS ECUACIONES LINEALES

Los métodos principales para resolver sistemas de ecuaciones lineales incluyen **sustitución, igualación, reducción (suma y resta), método gráfico, y métodos matriciales como Gauss o Cramer**. Todos buscan transformar el sistema en una ecuación de primer grado con una incógnita, obteniendo la misma solución independientemente del método utilizado.

Métodos Analíticos (Algebraicos)

1) **METODO DE SUSTITUCION**. Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir la expresión resultante en la otra ecuación, reduciendo el sistema a una ecuación con una sola incógnita.
2) **METODO DE IGUALACION**: despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones y luego se igualan las expresiones obtenidas, eliminando así esa incógnita.
3) **METODO DE REDUCION**: multiplica una o ambas ecuaciones por números adecuados para que los coeficientes de una de las incógnitas sean opuestos, permitiendo sumarlas o restarlas para eliminar esa incógnita.

1) **METODO DE SUSTITUCION. SISTEMA DE ECUACIONES 2X2**
(2 Ecuaciones y 2 Incógnitas)

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x + 2y = 1 \ \ (1) \\ x - 5y = \ 6 \ \ (2) \end{cases}$

a) Despejamos una letra o incógnita (x) en una de las ecuaciones, en este caso escogemos la ecuación (2) , x – 5y = 6. Despejamos: **x = 5y + 6** ,
b) Sustituimos o reemplazamos esa letra en la otra ecuación (1).
3x + 2y = 1, sustituimos, 3(5y + 6) + 2y = 1, resolvemos 15y + 18 + 2y = 1 =>
17y = 1 – 18 => 17y = -17 , y = $\frac{-17}{17} \boldsymbol{=> y = -1}$
c) Una vez encontrado el valor de la incógnita (y) los sustituimos en cualquiera de las ecuaciones para hallar el valor de la incógnita (x**).**
Y = -1 este valor lo sustituimos en la ecuación (2): x - 5y = 6, x - 5(-1) = 6 =>resolvemos, x + 5 = 6 => x = 6 – 5 => **x = 1 .**
d) Verificamos si se cumple la igualdad sustituyendo los valores encontrados en cualquiera de las ecuaciones (2).
Sustituimos, x = 1 , y = -1 en la ecuación x – 5y = 1 => 1 - 5(-1) = 6 =>
1+ 5 = 6 => **6 = 6**

Resolver: $\begin{cases} \boldsymbol{x - 2y = \ -4 \ \ (1)} \\ \boldsymbol{3x + y = 9 \quad (2)} \end{cases}$

a) Despejamos la incógnita (x) en la ecuación (1) x – 2y = - 4 =>

X= 2y – 4

b) Sustituimos (x) en la ecuación (2) 3x +y = 9 => 3 (2y – 4) +y =9
Resolvemos, 6y – 12 = 9 => 6y= 9 + 12 , 6y =21 => y =$\frac{21}{6}$; $\boldsymbol{y = \frac{7}{2}}$

c) Sustituimos el valos de (y) en la ecuación (1): x – 2y = -4
X - 2$\left(\frac{7}{2}\right)$ = - 4 => x – 7 = - 4 , x = - 4 + 7 => **x = 3**

d) Verificamos la igualdad en (1) x – 2y = - 4 , sustituimos x= 3 , y= $\frac{7}{2}$
3 - 2$\left(\frac{7}{2}\right) = -4$ => $3 - 7 = -4$ => **- 4 = - 4**

2) **METODO DE SUSTITUCION. SISTEMA DE ECUACIONES 3X3 (3 Ecuaciones y 3 Incógnitas)**

Resolver $\begin{cases} \boldsymbol{3x + 2y + z = 1 \ \ (1)} \\ \boldsymbol{5x + 3y + 4z = 2 \ \ (2)} \\ \boldsymbol{x + y - z = 1 \ \ \ \ (3)} \end{cases}$

a) Despejamos (x) en la ecuación (1) x + y – z = 1 => **x = 1 – y + z**

b) Sustituimos el valor de (x) en las ecuaciones (2) y (1)
En (2) 5(1- y + z) + 3y + 4z = 2 , 5- 5y + 5z + 3y +4z = 2 => - 2y + 9z = 2 -5 ,
-2y + 9z = -3
En (1), 3(1 – y + z) +2y +z = 1, => 3 - 3y + 3z + 2y + z = 1
3 –y + 4z = 1 => -y + 4z = 1 -3 => **-y + 4z = -2**
De los resultados formamos un sistema 2x2
$\begin{cases} \boldsymbol{-2y + 9z = -3 \ (1)} \\ \boldsymbol{-y + 4z = -2 \ (2)} \end{cases}$
a) En este nuevo sistema despejamos (y) en la ecuación (2)
-y + 4z = -2 => **y = 4z + 2**
b) Sustituimos el valor de (y) en la (1) ecuación. -2y + 9z = - 3
-2(4z +2) +9z = - 3 => -8z – 4 + 9z = -3 => z = -3 +4 **, z = 1**
c) sustituimos el valor de (z) en la ecuación (2), - y + 4 z = - 2
- y + 4(1) = -2=> -y + 4 = -2 , -y = -4 -2 => **y = 6**
Ahora escogemos el primer despeje **x= 1 – y +z, sustituimos los valores de y , z para encontrar el valor de (x) => x = 1 – 6 + 1 =>**
X = 2 – 6 => x = -4
Solución del sistema x = -4 , y =6 y z = 1

Observación: Cuando un sistema tiene más incógnitas (variables) que **numero de ecuaciones**, entonces el sistema tiene **soluciones infinitas**, es decir, cada variable puede tomar diferentes valores, tal que cumplan siempre con la ecuación, la cantidad de valores que puede tomar cada variable es infinita.

Ejemplo: x + y = 5 , en este caso hay una ecuación 2 incógnitas, este sistema tiene infinitas soluciones ya que (x) y (y) pueden tener infinitos valores y se mantiene la igualdad.

2) **METODO DE IGUALACCION. SISTEMA DE ECUACIONES 2X2 (2 Ecuaciones y 2 Incógnitas)**
   El **método de igualación** es una técnica eficaz para resolver sistemas de **ecuaciones lineales**, especialmente aquellos que involucran dos variables.

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2X - 4Y = 6 \; (1) \\ 3X - 2Y = 5 \quad (2) \end{cases}$

a) Despejamos las mismas incógnitas en las dos ecuaciones
   Ecuación (1) 2x - 4y = 6, en este caso despejamos a (x), 2x = 6 + 4y =>
   X = $\frac{\mathbf{6+4y}}{\mathbf{2}}$ **=>**simplificamos dividendo entre 2, **x= 3 + 2y**
b) Ecuación (2) 3x - 2y = 5, despejamos a (x), 3x = 5 + 2y=> **X=**$\frac{\mathbf{5+2y}}{\mathbf{3}}$
   Igualamos los dos resultados para despejas la incógnita (y)
   $\mathbf{3 + 2y} = \frac{5+2y}{3}$ resolvemos, 3(3 + 2y) = 5 + 2y) => 9 + 6y = 5 +2y
   Agrupamos términos 6y - 2y = 5 - 9=> 4y =-4 => **y =** $-\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{4}}$ **=> y = -1**
c) Para hallar el valor de (x) sustituimos el valor de y=-1 en la ecuación
   X= 3 + 2y => x = 3 +2 (-1) => x=3 -2 , **x = 1**

   Solución del sistema: y = -1 , x = 1

3) **METODO DE IGUALACCION. SISTEMA DE ECUACIONES 3X3 (3 Ecuaciones y 3 Incógnitas)**

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} X - Y + Z = 2 \quad (1) \\ X + Y + Z = 4 \; (2) \\ 2X + 2Y - Z = -4 \quad (3) \end{cases}$

En este caso aplicamos el método de igualación, despejando la misma incógnita en las tres ecuaciones. Despejaremos (z)

1) X – y + z = 2 => **z= 2 –x + y** (a)
2) X + y + z = 4 => **z= 4 – x – y (b)**
3) 2x + 2y –z = -4 => **z = 4 +2x+2y (c)**

   Igualamos a y b , a y c para obtener un sistema de 2 ecuación con 2 incógnitas.
   2 –x + y = 4 – x - y=> -x +y +x +y =4 -2 => 2y = 2 , y = $\frac{2}{2}$ => **y = 1**

Igualamos a y c, 2 – x +y = 4 +2 x +2y => -x +y -2x – 2y = 4 -2=>

-3x – y = 2 => -3x = 2 + y , como **y-=1** lo sustituimos en la ecuación -3x= 2 + 1

-3x = 3 =>x = $\frac{3}{-3}$ => **x = -1.**

En este caso podemos observar que x = -1 y y = 1, entonces estos valores lo podemos sustituir en las ecuaciones a, b ó c para hallar el valor de (z).

Sustituimos estos valores en la ecuación (a) **z = 2 – x + y =>** z = 2 – (-1) +1 ,

Z= 2 + 1 + 1 => **z = 4**

Solución: x=-1, y= 1 , z= 4

2) METODO DE REDUCCION. SISTEMA DE ECUACIONES 2X2 (2 Ecuaciones y 2 Incógnitas)

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de reducción seguiremos los siguientes pasos:

1 Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por un numero tal que las ecuaciones resultantes tengan un coeficiente en común

2 Realizamos una resta (o suma según sea el caso de los signos de los coeficientes) para desaparecer (**eliminar**) una de las incógnitas

3 Se resuelve la ecuación resultante

4 El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve

5 Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema

Ejemplo, resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \ \ (1) \\ 2x + 4y = 16 \ \ (2) \end{cases}$

En este caso los coeficientes de la incógnita (y) son iguales y con signos opuesto, lo cual podemos restar estos valores y reducir el sistema a una ecuación con una incógnita,

$$\begin{array}{l} 3x - \cancel{4y} = -6 \\ 2x + \cancel{4y} = 16 \\ \hline \end{array}$$

5x + 0y = 10 => 5x = 10 => x=$\frac{10}{5}$ => **x = 2**

Sustituimos el valor de (x) en la ecuación (1) para hallar el valor de (y),

3x – 4y = -6 => 3(2) – 4y =- 6 => 6 – 4y = -6 => 6 + 6 = 4y => 12 = 4y

$\frac{12}{4} = y$ => **y = 3** **solución: x = 2 , y =3**

2) Resolver el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 6x - 5y = -9 \ (1) \\ 4x + 3y = 13 \ (2) \end{cases}$

Multiplicamos la ecuación (1) por (-2) y la ecuación (2) por (3)

$\begin{cases} -2(6x - 5y = -9) \ (1) \\ 3(4x + 3y = 13) \ (2) \end{cases}$ => $\begin{cases} -\cancel{12x} + 10y = 18 \ (1) \\ \cancel{12x} + 9y = 39 \ (2) \end{cases}$ restamos las incógnitas

0x + 19y= 57 => 19y = 57 , **y =$\frac{57}{19}$ = y = 3**

Sustituimos el valor de (y) en la ecuación (1) para hallar el valor de (x),

6x -5y = -9 => 6x -5(3) = -9 > 6x - 15 = -9 => 6x = 15 -9 => 6x = 6

6x = $\frac{6}{6}$ => **x = 1 , solución: x =1 , y= 3**

3) METODO DE REDUCCION. SISTEMA DE ECUACIONES 3X3 (3 Ecuaciones y 3 Incógnitas)

Resolver el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x + 4y - z = 6 \quad (1) \\ 2x + 5y - 7z = -9 \quad (2) \\ 3x - 2y + z = 2 \quad (3) \end{cases}$

En este caso escogemos la Ec. (1) y la Ec. (3) para eliminar la incógnita (z)

x + 4y – z = 6 (1)
3x – 2y + z = 2 (3)
4x + 2y = 8 (4)

como los coeficientes de la incógnita (z) son iguales pero con signos diferentes la eliminamos. Obtenemos la Ec. (4)

Relacionamos las Ec. (2) y (3), multiplicamos la Ec.(3) por (7) para eliminar a la incógnita (z)

2x + 5y -7z=-9 => 2x + 5y - $\cancel{7z}$ = - 9
(7)(3x -2y + z = 2) =>21x – 14y + $\cancel{7z}$ = 14
23x - 9y =5 (5)

Aplicamos el método de reducción en las ecuaciones (4) y (5), multiplicamos la ecuación (4) por 9 y la ecuación (5) por 2.

4x + 2y =8 => 9(4x + 2y =8) => 36x +$\cancel{18y}$ = 72
23x – 9y = 5 => 2(23x – 9y = 5) , 46x – $\cancel{18y}$ =10
82x = 82 => 82x = 82 => x = $\frac{82}{82}$ = 1

X=1, sustituimos este valor de x en la ecuación (4) para hallar el valor de (y).

4x + 2y = 8 => 4(1) + 2y = 8 => 4 + 2y = 8 => 2y = 8 -4 => 2y= 4 , y= $\frac{4}{2}$, **y =2**

Una vez encontrado los valores de (x), (y), sustituimos estos valores en cualquiera de las ecuaciones (1) ,(2) ó (3) para hallar el valor de (z). en este caso seleccionamos la ecuación (1) y sustituimos los valores de x, y..

X + 4y – z = 6 => sustituimos los valores de x. y. (1) +4(2) – z = 6 => 1 + 8 –z =6

9 – z = 6 => -z = 6 -9 : -z = -3 => **z = 3**

Solución: x = 1 , y = 2 y z = 3

Ejercicios:

1) **Resolver por el método de igualación.** $\begin{cases} 6x + 4y - 5z = -1 \\ -2x + 8y + 3z = 4 \\ 4x - 4y - 7z = -6 \end{cases}$

2) **Resolver por el método de igualación.** $\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$

3) **Resolver por el método de sustitución.** $\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 1 \\ 3x + y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$

4) **Resolver por el método de sustitución** $\begin{cases} x + y = 4 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$

5) **Resolver por el método de reducción** $\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 4x + 3y - 3z = 1 \end{cases}$

6) **Resolver por el método de reducción** $\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$

https://www.youtube.com/watch?v=bNZ_7qzgPrI

https://www.youtube.com/watch?v=cNIV-ltkpBM

https://www.youtube.com/watch?v=QLH9_pgbu1M