

1

LA INTEGRAL INDEFINIDA

JOHANN BERNOULLI
(1.667-1.748)

1.1 LA ANTIDERIVADA

1.2 INTEGRACION POR SUSTITUCION

1.3 INTEGRACION POR PARTES

JOHANN BERNOULLI (1.667 – 1.748)



Johann Bernoulli nació en Basilea, Suiza, en 1.667. Estudió medicina en la universidad de Basilea, donde se graduó en 1.794, con una tesis donde aplica la matemática a los movimientos musculares. Fue el tronco principal de una familia, única en la historia, que ha producido eminentes matemáticos durante el siglo XVIII. Por lo menos 9 miembros de esta familia, repartidos en tres generaciones, fueron matemáticos de primera línea. En la primera generación se encuentran Johann I (del cual nos estamos ocupando) y sus hermanos Jacob I y Nicolaus I. En la segunda generación tenemos a Nicolaus II, hijo de Nicolaus I; a Nicolaus III, Daniel y Johann II, hijos de Johann I. En la tercera generación se cuentan Johann III y Jacob II, hijos de Johann II. El gran Leonardo Euler fue amigo de infancia de Daniel. Ambos recibieron lecciones de matemáticas de Johann I, quien también fue maestro de Guillaume G. A. de L'Hôpital.

ACONTECIMIENTOS PARALELOS

Durante la vida de Johann Bernoulli, en América y en el mundo sucedieron los siguientes hechos notables. En 1.661, el rey francés Luis XIV inicia la construcción del palacio de Versalles, a donde se muda con su corte en 1.682. En este mismo año, el cuáquero William Penn funda la ciudad de Filadelfia. En 1.687, Isaac Newton publicó una de las obras científicas más grandes producidas por la humanidad "Principios Matemáticos de la Filosofía Natural". Pocos años antes, Newton y Leibniz ya habían inventado el Cálculo. En 1.701 se funda la Universidad de Yale, en New Haven, Connecticut. En 1.705, el inglés Edmund Halley (1.656–1.742) dió a conocer el famoso cometa que ahora lleva su nombre. En 1.714 el físico holandés Gabriel Daniel Fahrenheit (1.686–1.736) inventó el termómetro de mercurio.

SECCION 1.1

LA ANTIDERIVADA

Iniciamos esta sección haciendo una breve introducción al concepto de diferencial. Este tema es tratado en forma más extensa en nuestro texto de Cálculo Diferencial, con el cual el lector debe estar familiarizado.

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable. Según la notación de Leibnitz, el símbolo $\frac{dy}{dx}$ representa a la derivada de y respecto a x . El concepto de diferencial da significado propio tanto a dx como a dy en tal forma que $\frac{dy}{dx}$ puede ser vista como un cociente de dy sobre dx .

Si Δx es cualquier incremento de x , entonces

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

es el correspondiente incremento de y . Sabemos que $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$.

Luego, si Δx es pequeño, la razón incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ es una aproximación a la derivada $f'(x)$. Este hecho lo expresamos así $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f'(x)$. De aquí obtenemos:

$$\Delta y \approx f'(x) \Delta x \quad (1)$$

Esta expresión nos dice que cuando Δx es pequeño, la expresión $f'(x)\Delta x$ está próximo al incremento de Δy . Por este motivo es conveniente fijar la atención en esta expresión. A continuación le damos un nombre y nos ocupamos de ella.

DEFINICION . Sea $y = f(x)$ una función diferenciable y Δx un incremento de x . Llamaremos **diferencial de y** , que se denota con dy ó df , a

$$dy = f'(x) \Delta x$$

Notar que dy es función de dos variables, x y Δx .

EJEMPLO 1. Si $y = x^3 - 2x^2 + x + 3$, hallar

- a. dy b. Evaluar dy cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0,03$

Solución

a. $dy = \frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + x + 3) \Delta x = (3x^2 - 4x + 1)\Delta x$

b. Cuando $x = 2$ y $\Delta x = 0,03$, se tiene

$$dy = [3(2)(2)^2 - 4(2) + 1] 0,03 = 0,15$$

Si $y = x$ entonces, $dy = dx$. Además, $dy = \frac{dx}{dx} \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Luego,

$$dx = \Delta x$$

Esta igualdad nos dice que la diferencial de la variable independiente es igual al incremento. Gracias a este resultado casi siempre usaremos dx en lugar de Δx . Así, la expresión para la diferencial de $y = f(x)$ se escribe así:

$$dy = f'(x) dx$$

En esta nueva expresión si $dx \neq 0$ dividimos entre dx para obtener $\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

Esto nos dice que el símbolo $\frac{dy}{dx}$, que es derivada de y respecto a x , se le puede pensar también como el cociente de la diferencial dy entre la diferencial dx .

EJEMPLO 2.

La diferencial de $y = \sqrt{x+1}$ es

$$dy = \frac{d}{dx}(\sqrt{x+1}) dx = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} dx = \frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$$

TEOREMA 1.1

Sean u y v funciones diferenciables de x si c una constante, entonces

$$1. dc = 0$$

$$2. d(cu) = c du$$

$$3. d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$4. d(uv) = u dv + v du$$

$$5. d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

$$6. du^n = nu^{n-1} du$$

Demostración

Cada una de estas igualdades viene de las correspondientes fórmulas de derivación. Aquí probaremos sólo (4), dejando las otras como ejercicio.

4. Sabemos por definición que:

$$du = \frac{du}{dx} dx \quad \text{y} \quad dv = \frac{dv}{dx} dx$$

Por otro lado, por la regla de la derivada de un producto, sabemos que:

$$\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

Luego,

$$d(uv) = \frac{d}{dx}(uv) dx = \left(u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \right) dx = u \frac{dv}{dx} dx + v \frac{du}{dx} dx = u dv + v du$$

ANTIDERIVADA

La operación inversa de la derivación se llama **integración**. Mediante la integración encontraremos la función cuya derivada es dada. La función que se encuentra se llama **antiderivada** o **integral indefinida**.

Durante el resto de curso nos ocuparemos de las integrales y sus aplicaciones. Por esta razón, a esta parte de la materia, se la llama **Cálculo Integral**.

DEFINICION. Una función F es una **antiderivada** o una **primitiva** de la función f en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$

EJEMPLO 3. Las funciones siguientes son antiderivadas de $f(x) = 3x^2$:

$$F(x) = x^3 + 1 \quad \text{y} \quad G(x) = x^3 - 5$$

En efecto:

$$F'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2 = f(x) \quad \text{y} \quad G'(x) = 3x^2 - 0 = 3x^2 = f(x)$$

Observar que si C es una constante cualquiera, entonces $H(x) = x^3 + C$ es una antiderivada de $f(x) = 3x^2$, ya que

$$H'(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2 = f(x)$$

El siguiente teorema nos dice que cualquier antiderivada se obtiene sumando una constante a una antiderivada conocida.

TEOREMA 1.2 Forma General de la Antiderivada

Si F es una antiderivada de f en el intervalo I , entonces

G es una antiderivada de f en $I \iff \exists C$, constante, tal que

$$G(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in I$$

Demostración

(\Rightarrow) Sea $H(x) = G(x) - F(x)$. Tenemos que:

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

Sabemos que si la derivada de una función es idénticamente 0 en un intervalo, entonces la función es una función constante. Esto es, existe una constante C tal que

$$H(x) = C, \quad \forall x \in I$$

Luego,

$$G(x) - F(x) = C, \quad \forall x \in I \Rightarrow G(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in I$$

(\Leftarrow) $G(x) = F(x) + C, \quad \forall x \in I \Rightarrow G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Luego, G es una antiderivada de f en I .

NOTACION PARA LA ANTIDERIVADA

El teorema anterior nos dice lo siguiente:

1. Si una función f tiene una antiderivada, entonces tiene una familia muy numerosa de ellas.
2. Si F es una antiderivada conocida de f , entonces cualquier otro miembro de la familia de antiderivadas de f se obtiene a partir de F agregándole una constante adecuada, $F(x) + C$.

A la familia $F(x) + C$ de antiderivadas de f la llamaremos la **antiderivada general de f** o **integral indefinida de la función f** , y la denotaremos así:

$$\int f(x) dx .$$

Esto es, si F es una antiderivada de f en un intervalo I , entonces

$$\int f(x) dx = F(x) + C, \text{ donde } C \text{ es una constante.} \quad (1)$$

El símbolo \int es llamado **símbolo de la integral**. Este símbolo se obtuvo alargando la letra S. Esto es debido a que, como veremos más adelante, la integral está emparentada con la suma.

En $\int f(x) dx$, la función f es el **integrando**. El símbolo dx se usa para indicar que x es la variable de integración. Esta variable puede cambiarse por cualquier otra. Así, la expresión (1) se escribe también del modo siguiente:

$$\int f(t) dt = F(t) + C \quad \text{ó} \quad \int f(u) du = F(u) + C$$

La **integración** es el proceso de hallar la **integral indefinida** o sea la antiderivada general. De la discusión anterior obtenemos:

$$(2) \quad \frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x) \quad (3) \quad \int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

El símbolo dx que acompaña al integrando lo podemos interpretar también la diferencial de x . Esto no es una coincidencia. La expresión (1) puede interpretarse en términos de diferenciales. En efecto, se tiene que:

$$dF = F'(x) dx = f(x) dx$$

Luego, (1) puede escribirse así:

$$\int dF = F(x) + C \quad (4)$$

EJEMPLO 4. Hallar $\int 2x \, dx$

Solución

La función $F(x) = x^2$ es una antiderivada de $2x$, ya que $F'(x) = 2x$. Luego,

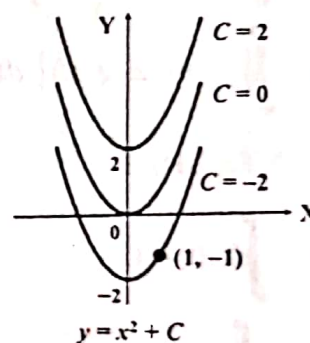
$$\int 2x \, dx = x^2 + C$$

SIGNIFICADO DE LA CONSTANTE C

La integral indefinida representa a toda la familia de las antiderivadas del integrando. Cada valor que asignemos a la constante de integración, nos proporciona un miembro de la familia.

Geoméricamente esta familia está representada por un conjunto de curvas paralelas obtenidas por traslación vertical del gráfico de una de las antiderivadas.

En la figura siguiente se han graficado algunos miembros de la familia $y = x^2 + C$, que es la integral indefinida del ejemplo anterior.



EJEMPLO 5. Hallar una función G cuya tangente tenga como pendiente $2x$ para cada x , y que su gráfico pase por el punto $(1, -1)$.

Solución

La pendiente de G está dada por su derivada. Luego, se debe cumplir que

$$G'(x) = 2x$$

Esto nos dice que G es una antiderivada de $2x$. Por el ejemplo anterior sabemos que $G(x) = x^2 + C$. Como la gráfica de G pasa por $(1, -1)$, debemos tener:

$$-1 = G(1) = 1^2 + C$$

Luego $C = -2$ y $G(x) = x^2 - 2$.

La gráfica de esta función aparece en la figura anterior.

LINEALIDAD DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

TEOREMA 1.3 Si a es una constante, entonces

$$1. \int a f(x) \, dx = a \int f(x) \, dx$$

$$2. \int [f(x) \pm g(x)] \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

Demostración

$$1. \frac{d}{dx} \left(a \int f(x) dx \right) = a \frac{d}{dx} \left(\int f(x) dx \right) = af(x)$$

$$2. \frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \pm \int g(x) dx \right] = \frac{d}{dx} \int f(x) dx \pm \frac{d}{dx} \int g(x) dx = f(x) \pm g(x)$$

Presentamos el primer grupo básico de integrales indefinidas. Las dos primeras fórmulas fueron probadas en el teorema anterior. La validez de estas integrales descaza en la fórmula de la derivada dada a la derecha

INTGRALES BASICAS. TABLA I.

$$1. \int af(x) dx = a \int f(x) dx$$

$$2. \int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

INTEGRAL

DERIVADA

$$3. \int 0 du = C$$

$$\frac{d}{du} [C] = 0$$

$$4. \int du = u + C$$

$$\frac{d}{du} [u] = 1$$

$$5. \int u^n du = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + C, n \neq -1$$

$$\frac{d}{du} \left[\frac{1}{n+1} u^{n+1} \right] = u^n$$

$$6. \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C$$

$$\frac{d}{du} [\ln |u|] = \frac{1}{u}$$

$$7. \int e^u du = e^u + C$$

$$\frac{d}{du} [e^u] = e^u$$

$$8. \int a^u du = \frac{1}{\ln a} a^u + C$$

$$\frac{d}{du} \left[\frac{1}{\ln a} a^u \right] = a^u$$

$$9. \int \text{sen } u dx = -\cos u + C$$

$$\frac{d}{du} [-\cos u] = \text{sen } u$$

$$10. \int \cos u du = \text{sen } u + C$$

$$\frac{d}{du} [\text{sen } u] = \cos u$$

$$11. \int \sec^2 u du = \tan u + C$$

$$\frac{d}{du} [\tan u] = \sec^2 u$$

$$12. \int \text{cosec}^2 u du = -\cot u + C$$

$$\frac{d}{dx} [-\cot u] = \text{cosec}^2 u$$

$$13. \int \sec u \tan u \, du = \sec u + C \quad \frac{d}{du}[\sec u] = \sec u \tan u$$

$$14. \int \operatorname{cosec} u \cot u \, du = -\operatorname{cosec} u + C \quad \frac{d}{du}[-\operatorname{cosec} u] = \operatorname{cosec} u \cot u$$

EJEMPLO 6. De acuerdo a la fórmula 5 (regla de la potencia) con $u = x$ ó $u = t$:

$$a. \int x^4 \, dx = \frac{1}{4+1} x^{4+1} + C = \frac{x^5}{5} + C \quad (n = 4)$$

$$b. \int \frac{1}{t^3} \, dt = \int t^{-3} \, dt = \frac{1}{-3+1} t^{-3+1} + C = \frac{t^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2t^2} \quad (n = -3)$$

$$c. \int \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx = \int x^{-1/2} \, dx = \frac{1}{-1/2+1} x^{-1/2+1} + C = 2x^{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C \quad (n = -1/2)$$

EJEMPLO 7.

$$a. \int 3x^2 \, dx = 3 \int x^2 \, dx = 3 \left(\frac{1}{3} x^3 + C_1 \right) = x^3 + 3C_1 = x^3 + C. \quad \text{por 1, 5 y } C = 3C_1$$

$$b. \int 8e^x \, dx = 8 \int e^x \, dx = 8(e^x + C_1) = 8e^x + 8C_1 = 8e^x + C. \quad \text{por 1, 7 y } C = 8C_1$$

$$c. \int \frac{5}{x} \, dx = 5 \int \frac{1}{x} \, dx = 5(\ln |x| + C_1) = 5 \ln |x| + 5C_1 = 5 \ln |x| + C. \quad \text{por 1, 6, } C = 5C_1$$

EJEMPLO 8. $\int \left(\frac{3}{\sqrt[4]{t}} - 2^t \right) dt = \int (3t^{-1/4} - 2^t) dt = 3 \int t^{-1/4} dt - \int 2^t dt \quad \text{por 1 y 2}$

$$= 3 \frac{t^{-1/4+1}}{-1/4+1} + C_1 - \frac{2^t}{\ln 2} + C_2 \quad \text{por 5 y 8}$$

$$= 3 \frac{4}{3} t^{3/4} - \frac{2^t}{\ln 2} + C_1 + C_2$$

$$= 4t^{3/4} - \frac{2^t}{\ln 2} + C, \quad C = C_1 + C_2$$

Se demuestra fácilmente por inducción, que la fórmula 2 es válida para cualquier número $n \geq 2$ de sumandos,

EJEMPLO 9.

$$\begin{aligned}
\int \left(x - \frac{2}{x}\right)^2 dx &= \int \left(x^2 - 4 + \frac{4}{x^2}\right) dx = \int x^2 dx - 4 \int dx + 4 \int x^{-2} dx \\
&= \frac{x^2+1}{2+1} + C_1 - 4(x + C_2) + 4 \left(\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C_2 \right) \\
&= \frac{x^3}{3} + C_1 - 4(x + C_2) + 4 \left(-\frac{1}{x} + C_3 \right) \\
&= \frac{x^3}{3} - 4x - \frac{4}{x} + C. \quad (C = C_1 - 4C_2 + 4C_3)
\end{aligned}$$

NOTA. De aquí en adelante sólo escribiremos la constante C más general y no las parciales C_1, C_2 , etc.

EJEMPLO 10.

Hallar $\int \frac{x^3 - x + 4}{x^2} dx$

Solución

El integrando es una función racional impropia. Para casos como este, antes de integrar se divide el numerador entre el denominador.

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3 - x + 4}{x^2} dx &= \int \left(x - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right) dx = \int x dx - \int x^{-1} dx + 4 \int x^{-2} dx \\
&= \frac{x^2}{2} - \ln|x| + 4 \frac{x^{-1}}{-1} + C = \frac{x^2}{2} - \ln|x| - \frac{4}{x} + C
\end{aligned}$$

EJEMPLO 11. Hallar $\int (\tan u - \cot u)^2 du$

Solución

$$\begin{aligned}
\int (\tan u - \cot u)^2 du &= \int (\tan^2 u - 2 \tan u \cot u + \cot^2 u) du \\
&= \int ((\sec^2 u - 1) - 2 + (\operatorname{cosec}^2 u - 1)) du \\
&= \int (\sec^2 u - 4 + \operatorname{cosec}^2 u) du \\
&= \int \sec^2 u du - \int 4 du + \int \operatorname{cosec}^2 u du \\
&= \tan u - 4u + C
\end{aligned}$$

$$y' = 10x^{3/2} - 2 \Rightarrow y = \int (10x^{3/2} - 2) dx = 4x^{5/2} - 2x + C_2 \quad y$$

$$y(1) = -1 \Rightarrow 4(1)^{5/2} - 2(1) + C_2 = -1 \Rightarrow C_2 = -3$$

La curva buscada es $y = 4x^{5/2} - 2x - 3$

En economía, la palabra **marginal** es usada para referirse a la derivada. Así, si $R(x)$ es la función ingreso, el ingreso marginal es su derivada $R'(x)$.

PROBLEMA 4. El ingreso marginal de una compañía es $R'(x) = 18 - 0,02x$

- Hallar la función ingreso.
- Hallar la ecuación de demanda del producto que vende la compañía.

Solución

a. Tenemos que:

$$R(x) = \int R'(x) dx = \int (18 - 0,02x) dx = 18x - 0,01x^2 + C$$

Si no se vende ninguna unidad, el ingreso debe ser nulo. Esto es, $R(0) = 0$. De esta ecuación obtenemos que $C = 0$. Luego, la función ingreso es

$$R(x) = 18x - 0,01x^2$$

b. Una ecuación de demanda es una ecuación que relaciona la cantidad demandada x de un producto con el precio del mismo. Puede venir en dos formas:

- Función demanda: $x = D(p)$
- Función precio: $p = f(x)$

Si el precio de cada unidad es p , entonces el ingreso es $R(x) = px$.

En nuestro caso tenemos que:

$$18x - 0,01x^2 = px \Rightarrow (18 - 0,01x)x = px \Rightarrow 18 - 0,01x = p$$

En consecuencia, la ecuación de demanda es

$$p = 18 - 0,01x$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.1

En los problemas del 1 al 34 hallar la integral indefinida indicada.

1. $\int 5 dx$

Rpta. $5x + C$

2. $\int x^8 dx$

Rpta. $\frac{1}{9}x^9 + C$

3. $\int 3x^{-4} dx$

Rpta. $-\frac{1}{x^3} + C$

4. $\int \sqrt[3]{t} dt$

Rpta. $\frac{3}{4}t^{4/3} + C$

5. $\int z \ln 2 \, dz$ Rpta. $\frac{\ln 2}{2} z^2 + C$ 6. $\int \frac{dx}{x^2}$ Rpta. $-\frac{1}{x} + C$
7. $\int (4u^5 - 5u^4) \, du$ Rpta. $\frac{2}{3}u^6 - u^5 + C$
8. $\int (r-2)^2 \, dr$ Rpta. $\frac{r^3}{3} - 2r^2 + 4r + C$
9. $\int (u^2 + 3u + 5) \, du$ Rpta. $\frac{u^3}{3} + \frac{3u^2}{2} + 5u + C$
10. $\int (1+x+x^2+x^3) \, dx$ Rpta. $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + C$
11. $\int \left(\frac{1}{z} + \frac{3}{z^2} + \sqrt{z} \right) \, dz$ Rpta. $\ln |z| - \frac{3}{z} + \frac{2}{3}z^{3/2} + C$
12. $\int (x+3)(x-1) \, dx$ Rpta. $\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + C$
13. $\int \left(t + \frac{1}{t} \right)^2 \, dt$ Rpta. $\frac{1}{3}t^3 + 2t - \frac{1}{t} + C$
14. $\int \left(\frac{1}{x} - x \right)^3 \, dx$ Rpta. $-\frac{1}{2x^2} - 3\ln|x| + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4 + C$
15. $\int (x^{2/3} - \sqrt{x}) \, dx$ Rpta. $\frac{3}{5}x^{5/3} - \frac{2}{3}x^{3/2} + C$
16. $\int \sqrt{x}(x^2 - 2x) \, dx$ Rpta. $\frac{2}{7}x^{7/2} - \frac{4}{5}x^{5/2} + C$
17. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 \, dx$ Rpta. $\frac{1}{2}x^2 + 2x + \ln|x| + C$
18. $\int \frac{(x-2)(x+1)}{x^2} \, dx$ Rpta. $x - \ln|x| + 2x^{-1} + C$
19. $\int \left(\frac{1+x}{x} \right)^2 \, dx$ Rpta. $-\frac{1}{x} + 2\ln|x| + x + C$
20. $\int \frac{e^{x+2}}{e^{x+1}} \, dx$ Rpta. $ex + C$

a. Hallar la función costo.

b. Hallar los costos fijos.

$$\text{Rpta. a. } C'(x) = 32x - 0,01x^2 + 0,003x^3 + 11.900 \quad \text{b. } 11.900$$

En los problemas 50 y 51 se da el ingreso marginal $R'(x)$. Hallar la ecuación de la demanda. Sugerencia: Ver el problema resuelto 4.

50. $R'(x) = 16 - \frac{x}{5}$

Rpta. $p = 16 - 0,1x$

51. $R'(x) = 15 - 0,04x - 0,006x^2$

Rpta. $p = 15 - 0,02x - 0,002x^2$

SECCION 1.2

INTEGRACION POR SUSTITUCION

Existen métodos, llamados **técnicas de integración**, que nos permiten reducir ciertas integrales a otras ya conocidas. Entre estas técnicas tenemos a la integración por sustitución y la integración por partes. De la primera nos ocuparemos en esta sección, y en la sección siguiente trataremos la otra.

La técnica de integración por sustitución no es otra cosa que la aplicación de la regla de la cadena al cálculo de integrales.

TEOREMA 1.4 Integración por Sustitución o de cambio de variable

Si F es una antiderivada de f y $u = g(x)$ es diferenciable, entonces

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

Demostración

Debemos probar que $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))g'(x)$. Usando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x)) g'(x) = f(g(x)) g'(x)$$

OBSERVACION. La conclusión del teorema anterior también puede verse en términos de diferenciales, del modo siguiente:

Si $u = g(x)$, entonces $du = g'(x)dx$. Luego

$$\int f(g(x)) g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$$

En la práctica, este último punto de vista es el que más usaremos. Ahora veamos este teorema nos permite hacer un uso mucho más amplio de la tabla de integrales anterior de la sección 1.

EJEMPLO 1. Hallar $\int 3x^2(x^3 + 1)^5 dx$

Solución

Sea $u = x^3 + 1$. Se tiene que $du = 3x^2 dx$. Luego

$$\begin{aligned} \int 3x^2(x^3 + 1)^5 dx &= \int (x^3 + 1)^5 (3x^2 dx) \\ &= \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{6}(x^3 + 1)^6 + C. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Hallar $\int \sqrt{4x-3} dx$

Solución

Sea $u = 4x - 3$. Se tiene que $du = 4 dx$ y, de donde, $dx = \frac{1}{4} du$. Luego,

$$\begin{aligned} \int \sqrt{4x-3} dx &= \int (4x - 3)^{1/2} dx = \int u^{1/2} \left(\frac{1}{4} du\right) = \frac{1}{4} \int u^{1/2} du \\ &= \frac{1}{4} \frac{u^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{1}{6} u^{3/2} + C = \frac{1}{6} (4x-3)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Hallar: a. $\int \frac{\ln x}{x} dx$ b. $\int \frac{\log_5 x}{x} dx$

Solución

a. Sea $u = \ln x$. Se tiene que $du = \frac{dx}{x}$. Luego

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x \left(\frac{dx}{x}\right) = \int u du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{\ln^2 x}{2} + C$$

b. Sabemos que $\log_5 x = \frac{\ln x}{\ln 5}$. Luego,

$$\int \frac{\log_5 x}{x} dx = \frac{1}{\ln 5} \int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{1}{\ln 5} \left(\frac{\ln^2 x}{2} + C_1 \right)$$

$$= \frac{\ln^2 x}{2 \ln 5} + \frac{C_1}{\ln 5} = \frac{\ln^2 x}{2 \ln 5} + C \quad (C = C_1 / \ln 5)$$

EJEMPLO 4. Hallar $\int \frac{dt}{t \ln t}$

Solución

Sea $u = \ln t$. Se tiene que $du = \frac{1}{t} dt$. Luego

$$\int \frac{dt}{t \ln t} = \int \frac{1}{\ln t} \left(\frac{1}{t} dt \right) = \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C = \ln |\ln t| + C.$$

EJEMPLO 5. Hallar $\int z^2 \sqrt{1-z} dz$

Solución

Sea $u = 1 - z$. Se tiene que $z = 1 - u$ y $dz = -du$. Luego,

$$\begin{aligned} \int z^2 \sqrt{1-z} dz &= \int (1-u)^2 u^{1/2} (-du) = - \int (1-2u+u^2) u^{1/2} du \\ &= - \int (u^{1/2} - 2u^{3/2} + u^{5/2}) du \\ &= - \int u^{1/2} du + 2 \int u^{3/2} du - \int u^{5/2} du \\ &= - \frac{u^{3/2}}{3/2} + 2 \frac{u^{5/2}}{5/2} - \frac{u^{7/2}}{7/2} + C \\ &= -\frac{2}{3} u^{3/2} + \frac{4}{5} u^{5/2} - \frac{2}{7} u^{7/2} + C \\ &= -\frac{2}{3} (1-z)^{3/2} + \frac{4}{5} (1-z)^{5/2} - \frac{2}{7} (1-z)^{7/2} + C \end{aligned}$$

EJEMPLO 6. Hallar $\int (y^2 - 1) e^{y^3 - 3y + 1} dy$

Solución

Sea $u = y^3 - 3y + 1$. Se tiene que $du = (3y^2 - 3) dy = 3(y^2 - 1) dy$

Luego, multiplicando y dividiendo entre 3,

$$\begin{aligned} \int (y^2 - 1) e^{y^3 - 3y + 1} dy &= \frac{1}{3} \int 3(y^2 - 1) e^{y^3 - 3y + 1} dy \\ &= \frac{1}{3} \int e^{y^3 - 3y + 1} 3(y^2 - 1) dy = \frac{1}{3} \int e^u du \\ &= \frac{1}{3} e^u + C = \frac{1}{3} e^{y^3 - 3y + 1} + C \end{aligned}$$

EJEMPLO 7. Hallar $\int \left(\frac{1}{1-v} - \frac{1}{(v-1)^3} \right) dv$

Solución

Sea $u = 1 - v$. Entonces $du = -dv$ y

$$\begin{aligned} \int \left(\frac{1}{1-v} - \frac{1}{(v-1)^3} \right) dv &= \int \left(\frac{1}{1-v} - \frac{1}{-(1-v)^3} \right) dv = \int \left(\frac{1}{1-v} + \frac{1}{(1-v)^3} \right) dv \\ &= \int \left(\frac{1}{u} + \frac{1}{u^3} \right) (-du) = - \int \frac{du}{u} - \int \frac{1}{u^3} du \\ &= -\ln|u| + \frac{1}{2u^2} + C = -\ln|1-v| + \frac{1}{2(1-v)^2} + C \end{aligned}$$

EJEMPLO 8. Hallar $\int \frac{2x^3 + 5x^2 - 3x - 5}{2x - 1} dx$

Solución

El integrando es una función racional impropia, ya que el grado del numerador es 3 y el denominador es 1. En este caso, primero efectuamos la división del numerador entre el denominador:

$$\frac{2x^3 + 5x^2 - 3x - 5}{2x - 1} = x^2 + 3x - \frac{5}{2x - 1}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + 5x^2 - 3x - 5}{2x - 1} dx &= \int \left(x^2 + 3x - \frac{5}{2x - 1} \right) dx \\ &= \int x^2 dx + 3 \int x dx - 5 \int \frac{dx}{2x - 1} \\ &= \frac{x^3}{3} + \frac{3}{2} x^2 - 5 \int \frac{dx}{2x - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \tan^3 u \, du &= \frac{1}{2} \tan^2 u - \int \tan u \, du \\ &= \frac{1}{2} \tan^2 u - \ln |\sec u| + C\end{aligned}$$

2. Aplicando la fórmula 23 para $n = 4$ y luego para $n = 2$:

$$\begin{aligned}\int \cot^4 u \, du &= -\frac{1}{3} \cot^3 u - \int \cot^2 u \, du = -\frac{1}{3} \cot^3 u - \left[-\cot u - \int du \right] \\ &= -\frac{1}{3} \cot^3 u + \cot u + \int du \\ &= -\frac{1}{3} \cot^3 u + \cot u + u + C\end{aligned}$$

PROBLEMAS RESUELTOS 1.2

PROBLEMA 1. Hallar a. $\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{1-y^6}}$ b. $\int \sin^3 x \, dx$

Solución

a. Sea $u = y^3$. Entonces $du = 3y^2 dy$. Luego,

$$\begin{aligned}\int \frac{y^2 dy}{\sqrt{1-y^6}} &= \frac{1}{3} \int \frac{3y^2 dy}{\sqrt{1-(y^3)^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \\ &= \frac{1}{3} \sin^{-1} u + C = \frac{1}{3} \sin^{-1}(y^3) + C.\end{aligned}$$

b. Sea $u = \cos x$. Entonces $du = -\sin x \, dx$. Luego,

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \sin x \, dx = - \int (1 - \cos^2 x)(-\sin x \, dx) \\ &= - \int (1 - u^2) \, du = - \int du + \int u^2 \, du = -u + \frac{1}{3} u^3 + C \\ &= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C\end{aligned}$$

PROBLEMA 2. Hallar $\int \frac{x^7}{(1+x^4)^{3/2}} \, dx$

Solución

Sea $u = 1 + x^4$. Tenemos que $du = 4x^3 dx$ y $x^4 = u - 1$. Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^7}{(1+x^4)^{3/2}} dx &= \frac{1}{4} \int \frac{x^4 (4x^3 dx)}{(1+x^4)^{3/2}} = \frac{1}{4} \int \frac{(u-1) du}{u^{3/2}} \\ &= \frac{1}{4} \int (u^{-1/2} - u^{-3/2}) du = \frac{1}{4} \int u^{-1/2} du - \frac{1}{4} \int u^{-3/2} du \\ &= \frac{2}{4} u^{1/2} - \frac{-2}{4} u^{-1/2} + C = \frac{1}{2} \sqrt{1+x^4} + \frac{1}{2\sqrt{1+x^4}} + C \end{aligned}$$

PROBLEMA 3. Hallar a. $\int \cos x e^{\operatorname{sen} x} dx$ b. $\int \frac{\tan^{-1} y dy}{1+y^2}$

Solución

Cuando el cambio de variable se ve con claridad, procederemos directamente, sin enunciar explícitamente tal cambio.

a. $\int \cos x e^{\operatorname{sen} x} dx = \int e^{\operatorname{sen} x} (\cos x dx) = \int e^u du \quad (u = \operatorname{sen} x)$
 $= e^u + C = e^{\operatorname{sen} x} + C$

b. Sea $u = \tan^{-1} y$. Entonces $du = \frac{dy}{1+y^2}$. Luego,

$$\int \frac{\tan^{-1} y dy}{1+y^2} = \int \tan^{-1} y \frac{dy}{1+y^2} = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} (\tan^{-1} y)^2 + C.$$

PROBLEMA 4. Hallar $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-1} + 3}$

Solución

Sea $u = \sqrt{4x-1} + 3$. Entonces $x = \frac{1}{4}(u-3)^2 + \frac{1}{4}$ y $dx = \frac{1}{2}(u-3) du$.

Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{4x-1} + 3} &= \int \frac{(1/2)(u-3) du}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{(u-3) du}{u} = \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{3}{u}\right) du \\ &= \frac{1}{2} \int du - \frac{3}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} u - \frac{3}{2} \ln|u| + C \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{4x-1} + 3) - \frac{3}{2} \ln |\sqrt{4x-1} + 3| + C$$

PROBLEMA 5. Hallar $\int \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} dx$

Solución

Sea $u = 1 - \sqrt{x}$. Entonces $x = (1-u)^2$ y $dx = -2(1-u) du$. Luego,

$$\begin{aligned} \int \frac{1+x}{1-\sqrt{x}} dx &= \int \frac{1+(1-u)^2}{u} (-2(1-u) du) = 2 \int \frac{u^3 - 3u^2 + 4u - 2}{u} du \\ &= 2 \int \left(u^2 - 3u + 4 - \frac{2}{u} \right) du = \frac{2}{3}u^3 - 3u^2 + 8u - 4 \ln |u| + C \\ &= \frac{2}{3}(1-\sqrt{x})^3 - 3(1-\sqrt{x})^2 + 8(1-\sqrt{x}) - 4 \ln |1-\sqrt{x}| + C \\ &= -\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x - 4\sqrt{x} - 4 \ln |1-\sqrt{x}| + C \end{aligned}$$

PROBLEMA 6. Hallar $\int \frac{z+1}{z^2-4z+8} dz$

Solución

Si $u = z^2 - 4z + 8$. Entonces $du = (2z - 4) dz$.

Transformamos el numerador del integrando hasta obtener $du = (2z - 4) dz$.

$$\begin{aligned} \int \frac{z+1}{z^2-4z+8} dz &= \frac{1}{2} \int \frac{2(z+1)}{z^2-4z+8} dz \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(2z+2)-6+6}{z^2-4z+8} dz = \frac{1}{2} \int \frac{(2z-4)+6}{z^2-4z+8} dz \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{2z-4}{z^2-4z+8} dz + \frac{1}{2} \int \frac{6}{z^2-4z+8} dz \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{(2z-4) dz}{z^2-4z+8} + 3 \int \frac{dz}{z^2-4z+8} \end{aligned}$$

En la primera integral, hemos trabajado para obtener:

$$\frac{1}{2} \int \frac{(2z-4) dz}{z^2-4z+8} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln |u| + C_1 = \frac{1}{2} \ln |z^2-4z+8| + C_1$$

Para la segunda integral hacemos $v = z - 2$. Entonces $dv = dz$ y

$$\begin{aligned} 3 \int \frac{dz}{z^2 - 4z + 8} &= 3 \int \frac{dz}{(z-2)^2 + 2^2} = 3 \int \frac{dv}{v^2 + 2^2} = \frac{3}{2} \tan^{-1} \left(\frac{v}{2} \right) + C_2 \\ &= \frac{3}{2} \tan^{-1} \left(\frac{z-2}{2} \right) + C_2 \end{aligned}$$

Por último, sumando los dos resultados:

$$\int \frac{z+1}{z^2 - 4z + 8} dz = \frac{1}{2} \ln |z^2 - 4z + 8| + \frac{3}{2} \tan^{-1} \left(\frac{z-2}{2} \right) + C$$

PROBLEMA 7. Hallar $\int \frac{\sen \theta}{9 + \cos^2 \theta} d\theta$

Solución

Sea $u = \cos \theta$. Entonces $du = -\sen \theta d\theta$

$$\begin{aligned} \int \frac{\sen \theta}{9 + \cos^2 \theta} d\theta &= \int \frac{\sen \theta d\theta}{3^2 + \cos^2 \theta} = \int \frac{-du}{3^2 + u^2} \\ &= -\frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{u}{3} \right) + C = \frac{1}{3} \tan^{-1} \left(\frac{\cos \theta}{3} \right) + C \end{aligned}$$

PROBLEMA 8. Hallar $\int 4^{2-3x} dx$

Solución

Sea $u = 2 - 3x$. Entonces $du = -3dx$. Luego,

$$\begin{aligned} \int 4^{2-3x} dx &= -\frac{1}{3} \int 4^{2-3x} (-3dx) = -\frac{1}{3} \int 4^u du \\ &= -\frac{4^u}{3 \ln 4} + C = -\frac{4^{2-3x}}{3 \ln 4} + C \end{aligned}$$

PROBLEMA 9. Hallar $\int \frac{1}{\sec x - 1} dx$

Solución

Multiplicamos y dividimos por $\sec x + 1$:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sec x - 1} dx &= \int \frac{1}{\sec x - 1} \frac{\sec x + 1}{\sec x + 1} dx = \int \frac{\sec x + 1}{\sec^2 x - 1} dx \\ &= \int \frac{\sec x + 1}{\tan^2 x} dx = \int \cot^2 x (\sec x + 1) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \cot^2 x \sec x \, dx + \int \cot^2 x \, dx \\
&= \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \frac{1}{\cos x} \, dx + \int (\operatorname{cosec}^2 x - 1) \, dx \\
&= \int \sin^{-2} x \cos x \, dx + \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx - \int dx \\
&= \int \sin^{-2} x \, d(\sin x) + \int \operatorname{cosec}^2 x \, dx - \int dx \\
&= \frac{1}{-\sin x} - \cot x - x + C = -\operatorname{cosec} x - \cot x - x + C
\end{aligned}$$

PROBLEMA 10. Hallar $\int \frac{\ln(\ln x) \, dx}{x \ln x}$

Solución

Sea $u = \ln x$. Entonces $du = \frac{dx}{x}$. Luego,

$$\begin{aligned}
\int \frac{\ln(\ln x) \, dx}{x \ln x} &= \int \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \frac{dx}{x} = \int \frac{\ln u}{u} \, du \\
&= \int \ln u \frac{du}{u} = \int w \, dw \quad (w = \ln u) \\
&= \frac{1}{2} w^2 + C = \frac{1}{2} \ln^2 u + C = \frac{1}{2} [\ln(\ln x)]^2 + C
\end{aligned}$$

PROBLEMA 11. Hallar $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} 2x \ln(\tan x)}$

Solución

Sea $u = \ln(\tan x)$. Entonces $\tan x = e^u \Rightarrow \sec^2 x \, dx = e^u \, du \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
dx &= \frac{1}{\sec^2 x} e^u \, du = \cos^2 x \tan x \, du = \cos^2 x \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \, du = \operatorname{sen} x \cos x \, du \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x \, du. \text{ Luego,}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\operatorname{sen} 2x \ln(\tan x)} &= \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{sen} 2x \, du}{\operatorname{sen} 2x \ln(\tan x)} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{\ln(\tan x)} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \\
&= \frac{1}{2} \ln |u| + C = \frac{1}{2} \ln |\ln(\tan x)| + C
\end{aligned}$$

PROBLEMA 12. Hallar a. $\int \frac{1}{x(x^6+1)} dx$ b. $\int \frac{1}{x(x^6+1)^2} dx$

Solución

a. En el numerador sumamos y restamos x^6 , separamos en dos integrales y simplificamos:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x(x^6+1)} dx &= \int \frac{(x^6+1)-x^6}{x(x^6+1)} dx = \int \frac{(x^6+1)}{x(x^6+1)} dx - \int \frac{x^6}{x(x^6+1)} dx \\ &= \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x^5}{x^6+1} dx = \ln|x| - \frac{1}{6} \int \frac{6x^5 dx}{x^6+1} \\ &= \ln|x| - \frac{1}{6} \ln|x^6+1| + C \quad (u = x^6+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b. } \int \frac{1}{x(x^6+1)^2} dx &= \int \frac{(x^6+1)-x^6}{x(x^6+1)^2} dx = \int \frac{(x^6+1)}{x(x^6+1)^2} dx - \int \frac{x^6}{x(x^6+1)^2} dx \\ &= \int \frac{1}{x(x^6+1)} dx - \int \frac{x^5}{(x^6+1)^2} dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{6} \ln|x^6+1| + \frac{1}{6} \frac{1}{x^6+1} + C \end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.2

En los problemas del 1 al 81 hallar la integral indicada

1. $\int (2x-5)^8 dx$ Rpta. $\frac{1}{18} (2x-5)^9 + C$

2. $\int \sqrt{4x-1} dx$ Rpta. $\frac{1}{6} (4x-1)^{3/2} + C$

3. $\int \frac{dt}{(5-2t)^2}$ Rpta. $\frac{1}{2} (5-2t)^{-1} + C$

4. $\int \frac{dt}{\sqrt{5-3t}}$ Rpta. $-\frac{2}{3} \sqrt{5-3t} + C$

5. $\int \frac{dy}{1-3y}$ Rpta. $-\frac{1}{3} \ln|1-3y| + C$

6. $\int \sqrt[3]{3x-1} dx$ Rpta. $\frac{1}{4}(3x-1)^{4/3} + C$
7. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x+3}}$ Rpta. $\frac{2}{3}(x+3)^{3/2} - 6(x+3)^{1/2} + C$
8. $\int t^3 \sqrt{2-t^2} dt$ Rpta. $-\frac{2}{3}(2-t^2)^{3/2} + \frac{1}{5}(2-t^2)^{5/2} + C$
9. $\int y^5 (1+y^3)^{1/4} dy$ Rpta. $\frac{4}{27}(1+y^3)^{9/4} - \frac{4}{15}(1+y^3)^{5/4} + C$
10. $\int \frac{x+1}{(1-x)^{2/3}} dx$ Rpta. $\frac{3}{4}(1-x)^{4/3} - 6(1-x)^{1/3} + C$
11. $\int \frac{z^3}{\sqrt{1-2z^2}} dz$ Rpta. $\frac{1}{4}(1-2z^2)^{1/2} + \frac{1}{12}(1-2z^2)^{3/2} + C$
12. $\int e^{-5x} dx$ Rpta. $-\frac{1}{5}e^{-5x} + C$
13. $\int xe^{x^2} dx$ Rpta. $\frac{1}{2}e^{x^2} + C$
14. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ Rpta. $2e^{\sqrt{x}} + C$
15. $\int \frac{4e^x dx}{(e^x+1)^5}$ Rpta. $-(e^x+1)^{-4} + C$
16. $\int x^4 e^{1-x^5} dx$ Rpta. $-\frac{1}{5}e^{1-x^5} + C$
17. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+1}} dx$ Rpta. $(e^{2x}+1)^{1/2} + C$
18. $\int \frac{dx}{e^{-x}+e^x} dx$ Rpta. $\tan^{-1}(e^x) + C$
19. $\int \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$ Rpta. $2\sqrt{\ln x} + C$
20. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ Rpta. $\frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + C$
21. $\int \frac{-4 dx}{x(1+\ln x)}$ Rpta. $-4 \ln(1+\ln x) + C$
22. $\int \frac{t \ln(t^2+2)}{t^2+2} dt$ Rpta. $\frac{1}{4} \ln^2(t^2+2) + C$
23. $\int \frac{dx}{3+\sqrt{1+2x}}$ Rpta. $\sqrt{1+2x} - 3 \ln |3+\sqrt{1+2x}| + C$