

76. $\int \tan^4 ax \, dx$ *Rpta.* $\frac{1}{3a} \tan^3 ax - \frac{1}{a} \tan ax + x + C$
77. $\int \cot^5 ax \, dx$ *Rpta.* $-\frac{1}{4a} \cot^4 ax + \frac{1}{2a} \cot^2 ax + \frac{1}{a} \ln |\operatorname{sen} ax| + C$
78. $\int (\cot^2 2x - \tan^4 2x) \, dx$ *Rpta.* $-\frac{1}{6} \tan^3 2x + \frac{1}{2} \tan 2x - \frac{1}{2} \cot 2x - 2x + C$
79. $\int (\tan ax + \cot ax)^3 \, dx$
Rpta. $\frac{1}{2a} (\tan^2 ax - \cot^2 ax) + \frac{2}{a} \ln |\operatorname{sen} ax| + \frac{2}{a} \ln |\operatorname{sec} ax| + C$
80. $\int \frac{1}{x(x^n + 1)} \, dx$ *Rpta.* $\ln |x| - \frac{1}{n} \ln |x^n + 1| + C$
81. $\int \frac{1}{x(x^n + 1)^2} \, dx$ *Rpta.* $\ln |x| - \frac{1}{n} \ln |x^n + 1| + \frac{1}{n} \frac{1}{x^n + 1} + C$
82. **(Recta tangente).** La pendiente de la recta tangente al gráfico de la función f en el punto $(x, f(x))$ está dada por $x\sqrt{e^{x^2-4}}$. Si este gráfico pasa por el punto $(-2, -2)$, hallar la función f .
Rpta. $f(x) = e^{(1/2)x^2-2} - 3$
83. **(Recta tangente).** La pendiente de la recta tangente al gráfico de la función f en el punto $(x, f(x))$ está dada por $\frac{\ln^3 x}{4x}$, $x > 0$. Si este gráfico pasa por el punto $(e^2, 3)$, hallar la función f .
Rpta. $f(x) = \frac{1}{16} \ln^4 x + 2$
84. **(Función costo).** Hallar la función costo de un producto sabiendo que el costo fijo es 5 y el costo marginal es $C'(x) = \frac{6}{\sqrt{4x+1}}$ *Rpta.* $C(x) = 3\sqrt{4x+1} + 2$
85. **(Depreciación de una máquina).** Se compró una máquina por 900 mil dólares y su valor después de t años de uso, se deprecia al ritmo de $\frac{dV}{dt} = -280e^{-0.4t}$ miles de dólares por año. ¿Cuál es el valor de la máquina después de 10 años?
Rpta. \$ 12.821

SECCION 1.3

INTEGRACION POR PARTES

La fórmula de la derivada de un producto o, equivalentemente, la fórmula de la diferencial de un producto, nos permite obtener otra técnica para transformar integrales, llamada **integración por partes**. La utilidad esta técnica radica en el

hecho de que ella nos permite cambiar una integral $\int u dv$, que supuestamente es complicada, por otra, $\int v du$, que se espera sea más simple

TEOREMA 1.5 Integración por Partes

Si $u = u(x)$ y $v = v(x)$ son funciones diferenciables, entonces

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Demostración

Sabemos que la diferencial del producto uv es

$$d(uv) = u dv + v du$$

De donde

$$u dv = d(uv) - v du$$

Integrando obtenemos lo buscado:

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du$$

EJEMPLO 1. Hallar $\int x^2 \ln x dx$

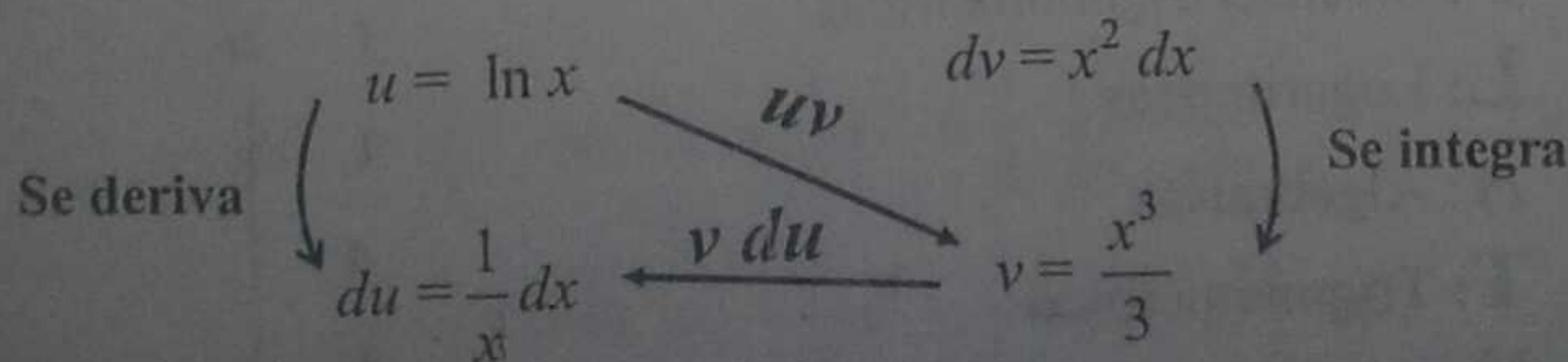
Solución

Sea $u = \ln x$ y $dv = x^2 dx$. Tenemos $du = \frac{1}{x} dx$ y $v = \frac{1}{3} x^3$

Luego,

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x dx &= \int \underbrace{\ln x}_u \cdot \underbrace{x^2 dx}_{dv} = uv - \int v du \\ &= \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + C \end{aligned}$$

Con ánimo de ayudar a la memoria, los datos previos a la aplicación de la fórmula de la integración los escribimos del modo siguiente:



La flecha oblicua nos indica que multiplicando los términos u y v que ella enlaza, obtenemos el primer término del segundo miembro de la fórmula. La flecha horizontal de abajo nos indica que integrando el producto de los términos v y du que ella enlaza, obtenemos el segundo término.

EJEMPLO 2. Hallar $\int x e^x dx$

Solución

Sea

$$\begin{array}{ccc} u = x & \searrow & dv = e^x dx \\ du = dx & \swarrow & v = e^x \end{array}$$

$$\int x e^x dx = \int \underbrace{x}_u \underbrace{e^x dx}_{dv} = uv - \int v du = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

OBSERVACION. En ejemplo anterior si u y el dv se hubiera escogido así:

$$u = e^x \qquad dv = x dx$$

tendríamos:

$$\int x e^x dx = \int \underbrace{e^x}_u \underbrace{x dx}_{dv} = uv - \int v du = e^x \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} e^x dx$$

Resulta que esta última integral es más complicada que la integral inicial y el problema, en lugar de simplificarlo, lo hemos complicado. Esto nos dice que hicimos una mala escogencia para u y para dv . Pero, entonces surge una inquietud: ¿Cómo determinar una buena escogencia? No existe un método que funcione para todos los casos. Existe una regla que es muy popular entre los estudiantes. Se llama la regla ILATE, la cual funciona para un buen número de problemas, pero no siempre es exitosa, como veremos más adelante.

LA REGLA ILATE

A las funciones las agrupamos en 5 clases, a las ordenamos en forma descendiente de acuerdo a la dificultad para hallar su antiderivada, de difícil a fácil.

I : Inversas trigonométricas	I	u
L : Logarítmicas		
A : Algebraicas		
T : Trigonométricas		
E : Exponenciales		
	↓	
	E	dv

La regla ILATE dice: exprese el integrando como el producto de dos funciones de distinta clase. Localice estas funciones en su categoría dada por ILATE. A la función que queda arriba le corresponde u y a la función que queda abajo le corresponde dv .

EJEMPLO 3. Hallar $\int x \cos x \, dx$

Solución

x : Algebraica, $\cos x$: Trigonométrica

$$\begin{array}{ccc}
 u = x & \searrow & dv = \cos x \, dx \\
 du = dx & \longleftarrow & v = \sin x
 \end{array}$$

I
L
A $\leftarrow x = u$
T $\leftarrow \cos x = dv$
E

Luego,

$$\int x \cos x \, dx = uv - \int v \, du = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x - (-\cos x) + C$$

Por lo tanto,

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + C$$

EJEMPLO 4. Hallar $\int x^2 \tan^{-1} x \, dx$

Solución

Tenemos que: $\tan^{-1} x$: Inversa trigonométrica. x^2 : Algebraica

$$\begin{array}{ccc}
 u = \tan^{-1} x & \searrow & dv = x^2 \, dx \\
 du = \frac{1}{1+x^2} \, dx & \longleftarrow & v = \frac{1}{3} x^3
 \end{array}$$

$$\int x^2 \tan^{-1} x \, dx = \frac{1}{3} x^3 \tan^{-1} x - \int \frac{1}{3} x^3 \frac{1}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{3} x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{3} \int x \, dx + \frac{1}{3} \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \int \frac{2x \, dx}{1+x^2} \quad (u = x^2)$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C$$

El siguiente ejemplo nos proporciona un resultado importante.

EJEMPLO 5. Probar que $\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$

Solución

El integrando tiene un solo factor. En este caso sólo nos queda una salida:

$$\int \ln x \, dx = \int \ln x \cdot 1 \, dx$$

$\ln x$: Logarítmica

$$u = \ln x$$

$$dv = 1 \cdot dx$$

1 : Algebraica

$$du = \frac{1}{x} dx$$

$$v = x$$

$$\int \ln x \, dx = uv - \int v \, du = x \ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

EJEMPLO 6. Hallar $\int \tan^{-1} x \, dx$

Solución

En este ejemplo, como en el anterior, el integrando tiene un solo factor.

Procedemos del mismo modo. $\int \tan^{-1} x \, dx = \int \tan^{-1} x \cdot 1 \, dx$

$\tan^{-1} x$: Inversa trigonométrica

$$u = \tan^{-1} x$$

$$dv = 1 \, dx$$

1 : Algebraica

$$du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$v = x$$

$$\begin{aligned} \int \tan^{-1} x \, dx &= x \tan^{-1} x - \int \frac{x \, dx}{1+x^2} = x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \frac{2x \, dx}{1+x^2} \\ &= x \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C \end{aligned}$$

EJEMPLO 7. Hallar $\int x \tan^{-1} \sqrt{x} \, dx$

Solución

En primer lugar, hacemos un cambio de variable

Sea $z = \sqrt{x}$. Luego, $x = z^2$, $dx = 2z \, dz$ y

$$\int x \tan^{-1} \sqrt{x} \, dx = \int z^2 \tan^{-1} z (2z \, dz) = 2 \int z^3 \tan^{-1} z \, dz \quad (1)$$

Solución

1. $\cos bx$: Trigonométrica

$$u = \cos bx$$

$$dv = e^{ax} dx$$

e^{ax} : Exponencial

$$du = -b \operatorname{sen} x$$

$$v = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx \quad (1)$$

Hallemos, aparte, $\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx$. Para esto. Hacemos:

$$u = \operatorname{sen} bx$$

$$dv = e^{ax} dx.$$

$$du = b \cos bx$$

$$v = \frac{1}{a} e^{ax}$$

Luego,

$$\int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = -\frac{e^{ax} \operatorname{sen} bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} - \frac{b}{a} \left[-\frac{e^{ax} \operatorname{sen} bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bx \, dx \right]$$

$$= \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b e^{ax} \operatorname{sen} bx}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx \Rightarrow$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx + \frac{b^2}{a^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b e^{ax} \operatorname{sen} bx}{a^2}$$

$$\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a e^{ax} \cos bx + b e^{ax} \operatorname{sen} bx}{a^2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} (b \operatorname{sen} bx + a \cos bx)}{a^2} \Rightarrow$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \frac{e^{ax} (b \operatorname{sen} bx + a \cos bx)}{a^2}$$

$$= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \operatorname{sen} bx + a \cos bx) + C$$

2. Similar a 1.

EJEMPLO 11. Probar las siguientes fórmulas de recurrencia:

$$1. \int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx, \quad n \neq 0$$

$$2. \int \operatorname{sec}^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan x \operatorname{sec}^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{sec}^{n-2} x \, dx, \quad n \neq 1$$

Solución

Aquí ILATE tampoco nos ayuda. Factorizmos así:

$$1. \operatorname{sen}^n x = \operatorname{sen}^{n-1} x \operatorname{sen} x. \quad \begin{array}{l} u = \operatorname{sen}^{n-1} x \quad \swarrow \quad dv = \operatorname{sen} x \, dx. \\ du = (n-1) \operatorname{sen}^{n-2} x \cos x \quad \longleftarrow \quad v = -\cos x \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}^n x \, dx &= \int \operatorname{sen}^{n-1} x (\operatorname{sen} x \, dx) \\ &= -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x \cos^2 x \, dx \\ &= -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x (1 - \operatorname{sen}^2 x) \, dx \\ &= -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx - (n-1) \int \operatorname{sen}^n x \, dx \Rightarrow \end{aligned}$$

$$n \int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx \quad \Rightarrow$$

$$\int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx$$

2. $\operatorname{sec}^n x = \operatorname{sec}^{n-2} x \operatorname{sec}^2 x$. Sea $u = \operatorname{sec}^{n-2} x$ y $dv = \operatorname{sec}^2 x \, dx$. Se tiene:

$$du = (n-2) \operatorname{sec}^{n-3} x (\sec x \tan x) \, dx = (n-2) \tan x \operatorname{sec}^{n-2} x \, dx, \quad v = \tan x.$$

$$\begin{array}{l} u = \operatorname{sec}^{n-2} x \quad \swarrow \quad dv = \operatorname{sec}^2 x \, dx. \\ du = (n-2) \tan x \operatorname{sec}^{n-2} x \, dx \quad \longleftarrow \quad v = \tan x. \end{array}$$

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sec}^n x \, dx &= \tan x \operatorname{sec}^{n-2} x - (n-2) \int \tan^2 x \operatorname{sec}^{n-2} x \, dx \\ &= \tan x \operatorname{sec}^{n-2} x - (n-2) \int (\operatorname{sec}^2 x - 1) \operatorname{sec}^{n-2} x \, dx \\ &= \tan x \operatorname{sec}^{n-2} x - (n-2) \int \operatorname{sec}^n x \, dx + (n-2) \int \operatorname{sec}^{n-2} x \, dx \Rightarrow \\ (n-1) \int \operatorname{sec}^n x \, dx &= \tan x \operatorname{sec}^{n-2} x + (n-2) \int \operatorname{sec}^{n-2} x \, dx \quad \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx$$

Presentamos el tercer grupo de integrales básicas. Las primeras ya han sido probadas en los ejemplos anteriores. Las otras la probamos en en problemas resueltos

INTEGRALES BASICAS. TABLA III.

$$24. \int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

$$25. \int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$26. \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \operatorname{sen} bx + a \cos bx) + C$$

$$27. \int e^{ax} \operatorname{sen} bx \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \operatorname{sen} bx - b \cos bx) + C$$

FORMULAS DE REDUCCION

$$28. \int \operatorname{sen}^n x \, dx = -\frac{1}{n} \cos x \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x \, dx, \quad n \neq 0$$

$$29. \int \cos^n x \, dx = \frac{1}{n} \operatorname{sen} x \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx, \quad n \neq 0$$

$$30. \int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan x \sec^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx, \quad n \neq 1$$

$$31. \int \operatorname{cosec}^n x \, dx = -\frac{1}{n-1} \cot x \operatorname{cosec}^{n-2} x + \frac{n-2}{n-1} \int \operatorname{cosec}^{n-2} x \, dx, \quad n \neq 1$$

$$32. \int x^n \operatorname{sen} bx \, dx = -\frac{x^n}{b} \cos bx + \frac{n}{b} \int x^{n-1} \cos bx \, dx$$

$$33. \int x^n \cos bx \, dx = \frac{x^n}{b} \operatorname{sen} bx - \frac{n}{b} \int x^{n-1} \operatorname{sen} bx \, dx$$

$$34. \int x^n (\ln x)^m \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^m - \frac{m}{n+1} \int x^n (\ln x)^{m-1} \, dx, \quad n \neq -1$$

$$35. \int (\ln x)^m \, dx = x (\ln x)^m - m \int (\ln x)^{m-1} \, dx$$

$$36. \int x^n e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$$

EJEMPLO 12. Usando las fórmulas de reducción anteriores, hallar

$$\text{a. } \int x^2 \cos x \, dx \quad \text{b. } \int \sec^4 x \, dx \quad \text{c. } \int \operatorname{cosec}^5 x \, dx$$

Solución

a. Aplicamos la fórmula de reducción 33, para $n = 2$ y $b = 1$. Luego aplicamos la fórmula 32 para $n = 1$ y $b = 1$:

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos x \, dx &= x^2 \sin x - 2 \int x \sin x \, dx \\ &= x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x + \int \cos x \, dx \right) \\ &= x^2 \sin x - 2 \left(-x \cos x + \sin x \right) + C \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C \end{aligned}$$

b. Aplicamos la fórmula 30 para el caso $n = 4$:

$$\begin{aligned} \int \sec^4 x \, dx &= \frac{1}{3} \tan x \sec^2 x + \frac{2}{3} \int \sec^2 x \, dx \\ &= \frac{1}{3} \tan x \sec^2 x + \frac{2}{3} \tan x + C \end{aligned}$$

c. Aplicamos la fórmula 31 dos veces, para $n = 5$ y luego para $n = 3$.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{cosec}^5 x \, dx &= -\frac{1}{4} \cot x \operatorname{cosec}^3 x + \frac{3}{4} \int \operatorname{cosec}^3 x \, dx \\ &= -\frac{1}{4} \cot x \operatorname{cosec}^3 x + \frac{3}{4} \left[-\frac{1}{2} \cot x \operatorname{cosec} x + \frac{1}{2} \int \operatorname{cosec} x \, dx \right] \\ &= -\frac{1}{4} \cot x \operatorname{cosec}^3 x - \frac{3}{8} \cot x \operatorname{cosec} x + \frac{3}{8} \ln | \operatorname{cosec} x - \cot x | + C \end{aligned}$$

EJEMPLO 13. Hallar a. $\int (\ln x)^3 \, dx$ b. $\int x^3 e^{2x} \, dx$

Solución

a. Aplicamos la fórmula 35 tres veces, para: $m = 3$, $m = 2$:

$$\begin{aligned} \int (\ln x)^3 \, dx &= x(\ln x)^3 - 3 \int (\ln x)^2 \, dx \\ &= x(\ln x)^3 - 3 \left[x(\ln x)^2 - 2 \int \ln x \, dx \right] \\ &= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6 \int \ln x \, dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6[x \ln x - x] + C \\
 &= x(\ln x)^3 - 3x(\ln x)^2 + 6x \ln x - 6x + C
 \end{aligned}$$

b. Aplicamos la fórmula 36 dos veces:

$$\begin{aligned}
 \int x^3 e^{2x} dx &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2} \int x^2 e^{2x} dx \\
 &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \int x e^{2x} dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{2} \int x e^{2x} dx \\
 &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx \right] \\
 &= \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{4} x e^{2x} - \frac{3}{8} e^{2x} + C
 \end{aligned}$$

PROBLEMAS RESUELTOS 1.3

PROBLEMA 1. Hallar $\int \frac{\cot^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

Solución

En primer lugar, hacemos un cambio de variable y integramos por partes.

Sea $z = \sqrt{x}$. Entonces $x = z^2$ y $dx = 2z dz$. Luego,

$$\int \frac{\cot^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{\cot^{-1} z}{z} (2z dz) = 2 \int \cot^{-1} z dz \quad (1)$$

Hallemos la última integral:

Sea $u = \cot^{-1} z$ y $dv = dz$. Entonces $du = -\frac{dz}{1+z^2}$ y $v = z$. Luego,

$$\int \cot^{-1} z dz = z \cot^{-1} z - \int -\frac{z dz}{1+z^2} = z \cot^{-1} z + \frac{1}{2} \ln(1+z^2) \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) y recordando que $z = \sqrt{x}$:

$$\begin{aligned}
 \int \frac{\cot^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= 2 \left[z \cot^{-1} z + \frac{1}{2} \ln(1+z^2) \right] + C \\
 &= 2\sqrt{x} \cot^{-1} \sqrt{x} + \ln(1+x) + C
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 2. Hallar $\int x e^x \cos x \, dx$

Solución

Sea $u = x$ y $dv = e^x \cos x$. Entonces, usando la fórmula 26 y 27,

$$du = dx \quad y \quad v = \int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int x e^x \cos x \, dx &= x \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) - \frac{1}{2} \int e^x (\sin x + \cos x) \, dx \\ &= x \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) - \frac{1}{2} \int e^x \sin x \, dx - \frac{1}{2} \int e^x \cos x \, dx \\ &= x \frac{e^x}{2} (\sin x + \cos x) - \frac{e^x}{4} (\sin x - \cos x) - \frac{e^x}{4} (\sin x + \cos x) + C \\ &= \frac{e^x}{2} (x \sin x + x \cos x - \sin x) + C \end{aligned}$$

PROBLEMA 4. Probar las fórmulas de reducción 32, 33, 34, 35 y 36:

$$32. \int x^n \sin bx \, dx = -\frac{x^n}{b} \cos bx + \frac{n}{b} \int x^{n-1} \cos bx \, dx$$

$$33. \int x^n \cos bx \, dx = \frac{x^n}{b} \sin bx - \frac{n}{b} \int x^{n-1} \sin bx \, dx$$

$$34. \int x^n (\ln x)^m \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^m - \frac{m}{n+1} \int x^n (\ln x)^{m-1} \, dx, \quad n \neq -1$$

$$35. \int (\ln x)^m \, dx = x (\ln x)^m - m \int (\ln x)^{m-1} \, dx$$

$$36. \int x^n e^{ax} \, dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx$$

Solución

$$32. \quad \begin{array}{ccc} u = x^n & \searrow & dv = \sin bx \, dx. \\ du = nx^{n-1} \, dx & \swarrow & v = -\frac{1}{b} \cos bx. \end{array}$$

$$\int x^n \sin bx \, dx = -\frac{x^n}{b} \cos bx + \frac{n}{b} \int x^{n-1} \cos bx \, dx$$

33. Similar a 5.

34. $u = (\ln x)^m$ $dv = x^n dx$

$du = m (\ln x)^{m-1} \frac{1}{x} dx$ $v = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$

$$\int x^n (\ln x)^m dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} (\ln x)^m - \frac{m}{n+1} \int x^n (\ln x)^{m-1} dx$$

35. Es la formula 34 con $n = 0$

36. $u = x^n$ $dv = e^{ax} dx$

$du = n x^{n-1} dx$ $v = \frac{1}{a} e^{ax} dx$

$$\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a} x^n e^{ax} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} dx$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 1.3

En los problemas del 1 al 42 hallar las integrales indicadas

1. $\int \log_a x dx$ Rpta. $x \log_a x - x \log_a e + C$
2. $\int x^3 \ln x dx$ Rpta. $\frac{1}{4} x^4 \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C$
3. $\int \frac{\ln(x^2)}{x^2} dx$ Rpta. $-2 \frac{\ln x}{x} - \frac{2}{x} + C$
4. $\int \sqrt{x} \ln x dx$ Rpta. $\frac{2}{3} x^{3/2} \ln x - \frac{4}{9} x^{3/2} + C$
5. $\int \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ Rpta. $\sqrt{x} \ln x - 2\sqrt{x} + C$
6. $\int (x^2 + 1) \ln x dx$ Rpta. $\frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 - x + x \ln x + C$

$$7. \int (x+1)^2 \ln(x+1) dx$$

$$Rpta. \frac{1}{3}(x+1)^3 \ln(x+1) - \frac{1}{9}(x+1)^3 + C$$

$$8. \int x^n \log x dx \quad n \neq -1$$

$$Rpta. \frac{1}{n+1} x^{n+1} \log x - \frac{1}{(1+n)^2 \ln 10} x^{n+1} + C$$

$$9. \int x \ln(x+1) dx$$

$$Rpta. \frac{x^2}{2} \ln(x+1) - \frac{1}{2} \ln(x+1) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + C$$

$$10. \int (1-x)e^x dx$$

$$Rpta. -xe^x + 2e^x + C$$

$$11. \int e^{x+\ln x} dx$$

$$Rpta. xe^x - e^x + C$$

$$12. \int x^3 e^x dx$$

$$Rpta. x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + C$$

$$13. \int e^{3\sqrt{x}} dx$$

$$Rpta. \frac{2}{3} \sqrt{x} e^{3\sqrt{x}} - \frac{2}{9} e^{3\sqrt{x}} + C$$

$$14. \int x^3 e^{x^2} dx$$

$$Rpta. \frac{1}{2}(x^2 - 1) e^{x^2} + C$$

$$15. \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$Rpta. x^2 \sqrt{1+x^2} - \frac{2}{3}(1+x^2)^{3/2} + C$$

$$16. \int x^3 \sqrt{1+2x^2} dx$$

$$Rpta. \frac{1}{6} x^2 (1+2x^2)^{3/2} - \frac{1}{30} (1+2x^2)^{5/2} + C$$

$$17. \int \frac{xe^x dx}{(1+x)^2}$$

$$Rpta. \frac{e^x}{1+x} + C$$

$$18. \int x \sec x \tan x dx$$

$$Rpta. x \sec x - \ln |\sec x + \tan x| + C$$

$$19. \int \sin^{-1}(2x) dx$$

$$Rpta. x \sin^{-1}(2x) + \frac{1}{2} \sqrt{1-4x^2} + C$$

$$20. \int x \sec^2 3x dx$$

$$Rpta. \frac{1}{3} x \tan 3x - \frac{1}{9} \ln |\sec 3x| + C$$

$$21. \int x \sin^{-1}(x^2) dx$$

$$Rpta. \frac{1}{2} x^2 \sin^{-1}(x^2) + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + C$$

$$22. \int xe^{2x} dx$$

$$Rpta. \frac{1}{2} xe^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C$$

$$23. \int x 10^{2x} dx$$

$$Rpta. \frac{x}{2 \ln 10} 10^{2x} + \frac{1}{(2 \ln 10)^2} 10^{2x} + C$$

$$24. \int x \cos x dx$$

$$Rpta. x \sin x + \cos x + C$$

25. $\int e^{3x} \cos 2x \, dx$ Rpta. $\frac{e^{3x}}{13} (2 \operatorname{sen} 2x + 3 \operatorname{cos} 2x) + C$
26. $\int x^2 \cos nx \, dx$ Rpta. $\frac{x^2}{n} \operatorname{sen} nx + \frac{2x}{n^2} \operatorname{con} nx - \frac{2}{n^3} \operatorname{sen} nx + C$
27. $\int \cos(\ln x) \, dx$ Rpta. $\frac{x}{2} (\operatorname{sen}(\ln x) - \operatorname{cos}(\ln x)) + C$
28. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \, dx$ Rpta. $2\sqrt{x} \ln x - 4\sqrt{x} + C$
29. $\int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \, dx$ Rpta. $x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C$
30. $\int x(\ln x)^2 \, dx$ Rpta. $\frac{1}{2} x^2 \left(\ln^2 x - \ln x + \frac{1}{2} \right) + C$
31. $\int \cos x \ln(\operatorname{sen} x) \, dx$ Rpta. $\operatorname{sen} x [\ln(\operatorname{sen} x) - 1] + C$
32. $\int \cos(\ln x) \, dx$ Rpta. $\frac{x}{2} [\operatorname{sen}(\ln x) + \operatorname{cos}(\ln x)] + C$
33. $\int x^2 \tan^{-1} x \, dx$ Rpta. $\frac{1}{3} x^3 \tan^{-1} x - \frac{1}{6} x^2 + \frac{1}{6} \ln(1+x^2) + C$
34. $\int \sec^{-1} \sqrt{x} \, dx$ Rpta. $x \sec^{-1} \sqrt{x} - \sqrt{x-1} + C$
35. $\int x \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{x} \, dx$ Rpta. $\frac{1}{16} (8x^2 - 3) \operatorname{sen}^{-1} \sqrt{x} + \frac{1}{16} (2x^{3/2} + 3\sqrt{x}) \sqrt{1-x} + C$
36. $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1} \sqrt{x}}{\sqrt{1-x}} \, dx$ Rpta. $-2\sqrt{1-x} \operatorname{sen}^{-1}(\sqrt{x}) + 2\sqrt{x} + C$
37. $\int 3^x \cos x \, dx$ Rpta. $\frac{3^x}{\ln^2 3 + 1} [\operatorname{sen} x + (\ln 3) \operatorname{cos} x] + C$
38. $\int x a^x \, dx$ Rpta. $a^x \left[\frac{x}{\ln a} - \frac{1}{\ln^2 a} \right] + C$
39. $\int x^3 \operatorname{sen} x \, dx$ Rpta. $-x^3 \operatorname{cos} x + 3x^2 \operatorname{sen} x + 6x \operatorname{cos} x - 6 \operatorname{sen} x + C$
40. $\int x^2 \operatorname{sen}^{-1} x \, dx$ Rpta. $\frac{x^3}{3} \operatorname{sen}^{-1} x - \frac{x^2 + 2}{9} \sqrt{1-x^2} + C$
41. $\int (x^2 - 2x + 2) \operatorname{cos} 2x \, dx$ Rpta. $\frac{1}{4} (2x^2 - 2x + 2) \operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2} (x-1) \operatorname{cos} 2x + C$
42. $\int (x^2 - 2x + 2) e^x \, dx$ Rpta. $\frac{1}{4} (2x^2 - 6x + 7) e^{2x} + C$