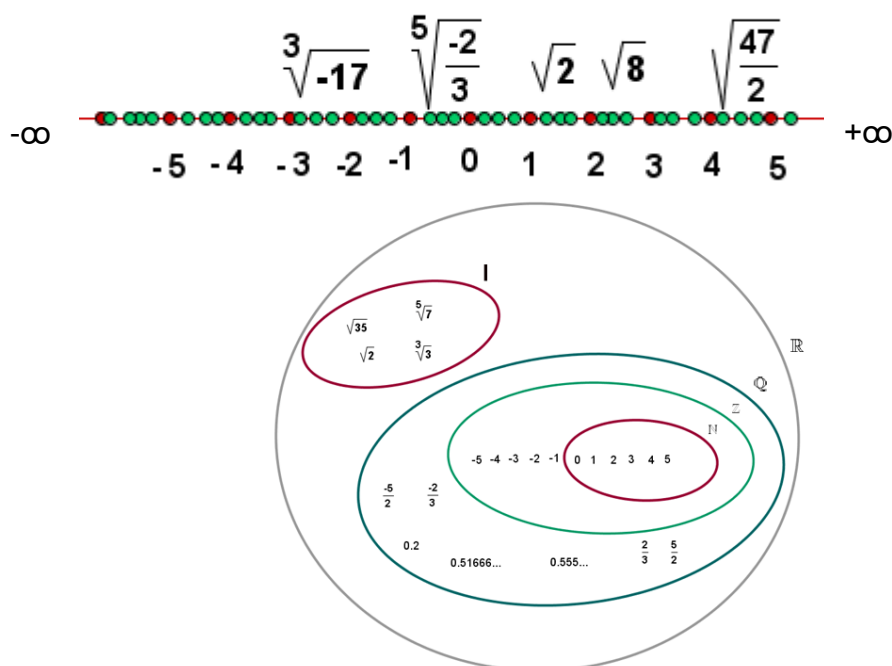


TEMA 2

CONJUNTO DE NUMERO REALES (R)

El conjunto de los números reales (denotado con la letra (R) es el conjunto que agrupa a todos los números racionales e irracionales. Incluye desde los números enteros y fracciones hasta valores con decimales infinitos, abarcando tanto cantidades positivas como negativas y el cero.

Se organiza en subconjuntos y puede representarse de forma continua en una línea recta



Clasificación Principal

El conjunto (R) se divide principalmente en dos grandes grupos de números, que a su vez contienen subconjuntos:

1. Números Racionales (Q)

Son aquellos que pueden expresarse como una fracción o el cociente de dos números enteros. Su expresión decimal es finita, o infinita pero con un patrón periódico

- **Enteros (Z):** Incluyen los números naturales (N), como $\{1, 2, 3 \dots \infty\}$, el cero (0) y sus opuestos negativos (como $\{-1, -2, -3 \dots -\infty\}$).
- **Fraccionarios:** Números que representan partes de un todo, como $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ o $\frac{7}{3}$
- **Decimales finitos o periódicos:** Números como $(0,25)$ o $(1,333\dots)$

2. Números Irracionales (I)

Son los números que **no** pueden expresarse como una fracción. Tienen infinitas cifras decimales que no siguen ningún patrón o ciclo periódico.

- **Constantes matemáticas:** El número (π), $\pi = (3,14159\dots)$, el número ($e = (2,71828\dots)$) o el número áureo (ϕ).
- **Raíces no exactas:** Números como $\sqrt{2} = 1,4142\dots$ o $\sqrt{3}$.

Propiedades Fundamentales

- **Complejitud:** No existen "huecos" en los números reales. A cada punto de la recta numérica le corresponde un único número real, y a cada número real le corresponde un punto exacto en la recta.
- **Orden:** Dados dos números reales (a) y (b), siempre se cumple una de estas tres relaciones: ($a < b$), ($a = b$) ó ($a > b$).
- **Densidad:** Entre dos números reales cualesquiera, siempre existen infinitos otros números reales.
- **Operatividad:** Permite realizar sumas, restas, multiplicaciones, divisiones (excepto entre cero) y extraer raíces (siempre que la raíz de índice par tenga un radicando positivo).

CONJUNTO DE NUMEROS RACIONALES (Q)

El **conjunto de los números racionales** (denotado con la letra (Q)) incluye a todos los números que pueden expresarse como una fracción o cociente exacto entre dos números enteros. Esto abarca a los números enteros, las fracciones comunes y los decimales exactos o periódicos.

Un número es racional si se puede escribir de la forma $\frac{a}{b}$, es decir como una fracción, donde:

- (a y b) son **números enteros**.
- (b) debe ser **diferente de cero** ($b \neq 0$).

Representación simbólica

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

FRACCIONES (<https://www.youtube.com/watch?v=LqMptyzudXU>)

<https://www.youtube.com/watch?v=ebJYzTM5Inc>

Una fracción es un cociente entre dos números enteros, a y b , $\frac{a}{b}$ llamados **numerador (a)** y **denominador (b)**, respectivamente. El denominador indica la cantidad de partes iguales en las que se divide el entero, el numerador cuántas de esas partes debemos considerar.

Ejemplo:

Un rectángulo



$$\frac{3}{4} = \frac{\text{3 rectángulos de } \frac{1}{4}}{\text{4 rectángulos de } \frac{1}{4}}$$

Un círculo



$$\frac{4}{4} = \frac{\text{4 círculos de } \frac{1}{4}}{\text{4 círculos de } \frac{1}{4}}$$

Tipos de fracciones

Dependiendo de la relación entre el numerador y el denominador, las fracciones se clasifican principalmente en:

- **Propias:** El numerador es menor que el denominador. Representan una cantidad menor que un entero (por ejemplo, $\frac{2}{3}$).
- **Impropias:** El numerador es mayor o igual que el denominador. Representan una cantidad igual o mayor que un entero (por ejemplo, $\frac{7}{4}$).
- **Mixtas:** Combinan un número entero y una fracción propia (por ejemplo, $1\frac{3}{4}$).
- **Equivalentes:** Fracciones que representan la misma cantidad o proporción, aunque sus números sean distintos (por ejemplo, $\frac{1}{2}$ es equivalente a $\frac{2}{4}$).

Operaciones Básicas

1. Suma y Resta

- **Con igual denominador:** Se suman o restan los numeradores y el denominador se mantiene igual.
- $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$, Ejemplo: Resolver, $\frac{6}{5} + \frac{3}{5} =$ en este caso los denominadores son (6) y (3) y hay un denominador común (5), para resolver, se suman los numeradores y el denominador se mantiene igual.

a) $\frac{6}{5} + \frac{3}{5} = \frac{6+3}{5} = \frac{9}{5}$

b) $\frac{8}{3} - \frac{5}{3} = \frac{8-5}{3} = \frac{3}{3} = 1$

Ejercicios, resolver:

a) $\frac{12}{7} + \frac{9}{7} =$

b) $\frac{5}{9} - \frac{15}{9} =$

- **Con diferente denominador:** Se debe buscar un denominador común (comúnmente utilizando el mínimo común múltiplo) antes de operar.

1) **Método de la Mariposa (cruzado):** $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{(axd) + (bxc)}{(bxd)}$

$$\text{Ejemplo: } \frac{3}{2} + \frac{6}{5} = \frac{(3 \times 5) + (2 \times 6)}{(2 \times 5)} = \frac{(15) + (12)}{(10)} = \frac{15 + 12}{10} = \frac{27}{10}$$

$$\text{Ejemplo: } \frac{8}{3} - \frac{2}{7} = \frac{(8 \times 7) - (3 \times 2)}{(3 \times 7)} = \frac{(56) - (6)}{(21)} = \frac{56 - 6}{21} = \frac{50}{21}$$

2) Mínimo Común Múltiplo (MCM): Se utiliza el MCM de los denominadores para convertir las fracciones, lo que suele facilitar la simplificación posterior.

Para calcular el mínimo común múltiplo (MCM) de dos o más números se descomponen cada uno en factores primos y multiplica los factores comunes y no comunes con su mayor exponente.

$$\text{Ejemplo: } \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} =$$

Descomponemos los denominadores en factores primos,

8	2	5	5	4	2
4	2	1		2	2
2	2				
1	2 ³		5		2 ²

m.c.m de 5, 8 y 4 es 40 , $2^3 \times 5 = 40$

$$: \frac{2}{5} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{16 + 15 + 10}{40} = \frac{41}{40}$$

2. Multiplicación

Se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí (en línea recta).

$$\text{a) } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} \quad \text{Ejemplo: } \frac{7}{5} \times \frac{9}{8} = \frac{7 \times 9}{5 \times 8} = \frac{63}{40}$$

$$\text{b) } \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} \times \frac{n}{m} = \frac{a \times c \times n}{b \times d \times m} \quad \text{Ejemplo: } \frac{3}{4} \times \frac{9}{2} \times \frac{7}{8} = \frac{3 \times 9 \times 7}{4 \times 2 \times 8} = \frac{189}{64}$$

3. División

Se multiplica en cruz, es decir, el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda (y viceversa).

Método 1 multiplicación en cruz.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \quad \text{Ejemplo: } \frac{5}{7} \div \frac{1}{6} = \frac{5 \cdot 6}{7 \cdot 1} = \frac{30}{7}$$

Método 2 de la división de fracciones: Multiplicar números internos y números externos

Consiste en acomodar una fracción sobre otra y posteriormente multiplicar los números externos del acomodo para obtener de resultado el numerador, luego debemos multiplicar los números internos para obtener el resultado del denominador. ejemplo se dividirán las fracciones $\frac{2}{3}$ entre $\frac{1}{4}$.

$$\text{a) } \frac{2}{3} : \frac{1}{4} = \frac{\frac{2 \text{ externo}}{3 \text{ interno}}}{\frac{1 \text{ interno}}{4 \text{ externo}}} = \frac{2 \times 4}{3 \times 1} = \frac{8}{3}$$

$$\text{c) } \frac{4}{5} : \frac{7}{9} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{7}{9}} = \frac{4 \times 9}{5 \times 7} = \frac{36}{35}$$

OPERACIONES COMBINADAS.

Las operaciones combinadas con fracciones se resuelven aplicando la **jerarquía de operaciones**. Debes seguir este orden estricto de izquierda a derecha:

- Paréntesis, corchetes Y llaves.
- Multiplicaciones y divisiones
- **Sumas** y restas

Ejemplo: Resolver $\frac{3}{2} : \left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right) * \frac{2}{3} =$

Paso 1, resolvemos lo que esta dentro del paréntesis, $\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{4} \right) = \frac{(2 \times 4) + (5 \times 3)}{5 \times 4} = \frac{8+15}{20} = \frac{23}{20}$

Paso 2, $\frac{3}{2} : \left(\frac{23}{20} \right) * \frac{2}{3} =$ de izquierda a derecha resolvemos la división, $\frac{3}{2} : \frac{23}{20} = \frac{3 \times 20}{2 \times 23} = \frac{60}{46}$, simplificamos $\frac{30}{23}$

Paso 3, resolvemos la multiplicación, $\frac{30}{23} * \frac{2}{3} = \frac{60}{69}$

Ejercicios:

- $\frac{1}{6} * \left(\frac{2}{3} + \frac{4}{5} \right) =$
- $\frac{7}{4} \left[\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{4} \right) * 3 \right] =$
- $\frac{5}{3} - \left(\frac{2}{5} * \frac{7}{2} \right) - \frac{1}{3} =$
- $\frac{8}{3} - \left[2 : \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - \frac{5}{2} \right] =$

Número Mixto: está formado por un número entero y una fracción. Ejemplo:

$3\frac{2}{5}$ y se resuelve de la siguiente manera: Se convierte en una fracción

$3 \times 5 + 2 = 15 + 2 = 17$ El resultado es el numerador de la fracción y se

coloca el mismo denominador, es decir, $3\frac{2}{5} = \frac{17}{5}$

Ejercicios: convertir en una fracción los siguientes números mixtos.

a) $1\frac{7}{8} =$

b) $2\frac{3}{4} =$

c) $7\frac{2}{5} =$

Valor de una fracción: Se calcula dividiendo el numerador entre el denominador; esta división puede dar como resultado un número entero

(exacta). Ejemplo: $\frac{16}{2} = 8$, o puede dar un decimal (inexacta), ejemplo: $\frac{3}{4} = 0,75$

Convertir las fracciones numero decimal.

a) $\frac{8}{3} =$

b) $\frac{29}{5} =$

c) $\frac{36}{100} =$

Conversión de un número decimal en fracción.

Cualquier número decimal puede convertirse en fracción. Seguimos estos pasos:

1. Escribimos el número sin coma en el numerador.
2. En el denominador escribimos 10 si tiene un solo decimal, 100 si tiene dos o 1000 si tiene tres.
3. Simplificamos, si es posible, para obtener una fracción irreducible

Por ejemplo, vamos a pasar el número decimal 0,125 a fracción decimal y luego lo reduciremos a una fracción irreducible.

$$0,125 = \frac{125}{1000} = \frac{25}{200} = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$$

Ejemplo:

- a) Convertir 2,36 en una fracción.

$$2,36 = \frac{236}{100} = \frac{118}{50} = \frac{59}{25}$$

- b) Convertir 1,25 en una fracción.

$$1,25 = \frac{125}{100} = \frac{25}{20} = \frac{5}{4}$$

Fracciones equivalentes: Dos fracciones son equivalentes, cuando sus valores son iguales, es decir, que valen lo mismo. También dos fracciones son equivalentes cuando sus productos cruzados son iguales. Ejemplo

$\frac{4}{11}$ y $\frac{12}{33}$ observa que al dividir $4 \div 11 = 0,36$ y al dividir $12 \div 33 = 0,36$, por lo tanto, los valores de las fracciones son iguales

1) Determinar cuáles fracciones son equivalentes:

- a) $\frac{3}{4}, \frac{12}{16}$
- b) $\frac{5}{8}, \frac{3}{8}$
- c) $2\frac{3}{4}, \frac{33}{12}$

<https://www.youtube.com/watch?v=3FyDDCKsxkA>

CONJUNTO DE NUMEROS IRRACIONALES (I)

El conjunto de los números irracionales (representado con la letra (I) está formado por aquellos números que no pueden expresarse como una fracción o cociente de dos números enteros. Se caracterizan por tener una representación decimal infinita y no periódica, es decir, que sus decimales no siguen ningún patrón o ciclo que se repita.

Características principales

- **No son fracciones:** Ningún número irracional puede escribirse de la forma $(\frac{a}{b})$, donde (a) y (b) son enteros y $(b \neq 0)$.
- **Decimales infinitos y no periódicos:** Sus cifras decimales se extienden indefinidamente sin formar un periodo (una secuencia repetitiva).
- **Compleitud:** Junto con el conjunto de los números racionales (Q), forman el conjunto de los **números reales** (R), ocupando todos los puntos y "huecos" posibles en la recta numérica.

Ejemplos comunes

Existen infinitos números irracionales, pero los más destacados en geometría, álgebra y cálculo son:

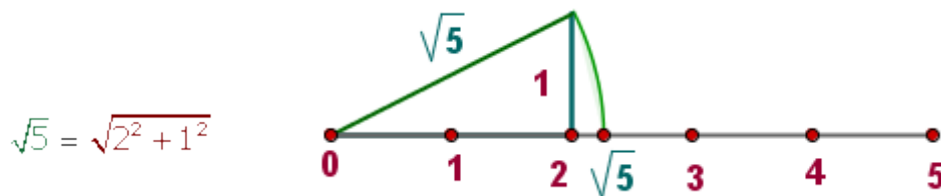
El número Pi (π): Aproximadamente (3,141592) Representa la proporción entre la longitud de una circunferencia y su diámetro.

El número de Euler (e): Aproximadamente 2,718281 Muy utilizado en cálculos financieros y crecimiento exponencial

Raíces no exactas: Cualquier raíz cuadrada o cúbica de un número que no dé un resultado exacto es irracional. Por ejemplo:

- $\sqrt{2} = 1,414213$
- $\sqrt{3} = 1,732050$

Los **números irracionales** pueden ser representados en la recta con tanta aproximación como queramos, pero hay casos en los que podemos representarlos de forma exacta.



SUMA Y RESTA DE NUMEROS IRRACIONALES

Para sumar y restar números irracionales, estos deben ser **semejantes**, es decir, deben tener el mismo índice y el mismo radicando (el número dentro de la raíz). Solo necesitas sumar o restar los números que están fuera de la raíz (coeficientes) y mantener la misma raíz intacta.

Ejemplo: **Caso 1: Raíces iguales (Términos semejantes)**

$$\begin{aligned} \text{c) } 5\sqrt{2} + 7\sqrt{2} - 2\sqrt{2} &= \text{ en este caso los sumandos tienen el mismo radical } (\sqrt{2}), \text{ resolvemos las operaciones de los coeficientes,} \\ (5 + 7 - 2)\sqrt{2} &= (12 - 2)\sqrt{2} = 10\sqrt{2} \end{aligned}$$

Caso 2: Agrupando diferentes raíces

$$\begin{aligned} \text{a) } 5\sqrt{3} + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{7} &= \text{ agrupamos los términos que tengan la misma raíz, luego resolvemos las operaciones de los coeficientes.} \\ 5\sqrt{3} + 5\sqrt{7} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{7} &= 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{7} + 2\sqrt{7} = (5 - 3)\sqrt{3} + (5 + 2)\sqrt{7} \\ &= 2\sqrt{3} + 7\sqrt{7} \end{aligned}$$

Caso 3 : Simplificando raíces para operar

$\sqrt{8} + \sqrt{18}$ = en este los radicales no son iguales, pero se puede descomponer los radicandos en factores primos, para igualar los radicales, $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$, ahora agrupamos los nuevos termino y resolvemos, $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

Ejercicios: Resolver las operaciones

- $\sqrt{32} + \sqrt{200} =$
- $\sqrt{48} - \sqrt{12} + \sqrt{3} =$
- $\sqrt{28} - \sqrt{7} + \sqrt{63} =$
- $7\sqrt{5} - 9\sqrt{5} + 3\sqrt{5} =$
- $5 + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - \sqrt{25} =$

MULTIPLICACION DE NUMEROS IRRACIONES

Para multiplicar números irracionales (expresados como raíces), se multiplican los coeficientes entre sí y las cantidades dentro de la raíz (radicandos) bajo un mismo radical. Es indispensable que las raíces tengan el **mismo índice** para poder unirlos en una sola operación.

Caso 1. Raíces con el mismo índice

$$\text{a) } 3\sqrt{2} \times 5\sqrt{8} = (3 \times 5)\sqrt{2 \times 8} = 15\sqrt{16} = 15(4) = 60$$

$$\text{b) } 4\sqrt{5} \times 5\sqrt{3} = (4 \times 5)\sqrt{5 \times 3} = 20\sqrt{15}$$

Caso 2. Raíces con diferente índice

Si los índices son distintos, debes convertirlas a un **común índice** utilizando el mínimo común múltiplo (MCM) de los índices, aplicando fracciones en los exponentes para igualarlos.

a) $\sqrt{3} \times \sqrt[3]{4}$ = en este caso los índices de las raíces son 2 y 3, el m.c.m es (6), en la multiplicación se convierte ambas raíces en índice (6),

$$\sqrt{3} = \sqrt[2 \times 3]{3^3} = \sqrt[6]{27},$$

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt[3 \times 2]{4^2} = \sqrt[6]{16}$$

$$\text{Multiplicamos las nuevas raíces, } \sqrt{3} \times \sqrt[3]{4} = \sqrt[6]{27} \times \sqrt[6]{16} = \sqrt[6]{27 \times 16} = \sqrt[6]{432}$$

Caso 3. Propiedad distributiva

Cuando un número irracional multiplica a un binomio (dos términos que se suman o restan), el número exterior multiplica a cada uno de los términos del paréntesis.

$$\text{Ejemplo: } \sqrt{2} (2\sqrt{3} + \sqrt{5}) =$$

$$\sqrt{2} (2\sqrt{3} + \sqrt{5}) = 2\sqrt{3} \times \sqrt{2} + \sqrt{5} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{3 \times 2} + \sqrt{5 \times 2} = 2\sqrt{6} + \sqrt{10}$$

DIVISION DE NUMEROS IRRACIONALES

La división de números irracionales (expresados como raíces) se resuelve agrupando los elementos dentro de una misma raíz si los índices son iguales. Si los índices son distintos, se igualan buscando el mínimo común múltiplo.

Caso 1. División de raíces con el mismo índice

Si los índices de las raíces son iguales (por ejemplo, ambas son raíces cuadradas), se dividen los coeficientes por fuera de la raíz, por un lado, y los números dentro de la raíz (cantidades subradicales) por el otro. Se mantiene el mismo índice de la raíz.

Ejemplo: $\frac{12}{3} \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} =$ se dividen los coeficientes que están fuera de la raíz, $\frac{12}{3}=4$

$$4 \sqrt{\frac{18}{6}} = \frac{18}{6} = 3 \Rightarrow 4\sqrt{3}$$

b) $\frac{-15\sqrt{10}}{5\sqrt{5}} =$ se dividen los coeficientes que están fuera de la raíz, $\frac{15}{5} = 3$

$$3 \sqrt{\frac{10}{5}} = \frac{10}{5} = 2 \Rightarrow 3\sqrt{2}$$

$$\begin{array}{l} \frac{3}{4} \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \frac{3}{8} \sqrt{\frac{3}{2}} \end{array} =$$

Caso 2. División de raíces con diferente índice

Cuando los índices son diferentes, primero debes calcular el **mínimo común múltiplo (m.c.m)** de los índices para igualar el mismo índice en los radicales.

a) Ejemplo: $\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt{3}}$, en este caso los índices de las raíces son 2 y 3, el m.c.m es (6), en la división se convierte ambas raíces en índice (6),

$$\frac{\sqrt[3x2]{5}}{\sqrt[2x3]{3}} = \frac{\sqrt[6]{5^2}}{\sqrt[6]{3^3}} = \frac{\sqrt[6]{25}}{\sqrt[6]{9}} = \sqrt[6]{\frac{25}{9}}$$

a) $\frac{8\sqrt[4]{2}}{2\sqrt[3]{5}}$ los índices de las raíces son 4 y 3, el m.c.m. es (12), en la división se convierte ambas raíces en índice (12),

$$\frac{8\sqrt[4]{2}}{2\sqrt[3]{5}} = \frac{8^{4x3}\sqrt[12]{2^3}}{2^{3x4}\sqrt[12]{5^4}} = \frac{8^{12}\sqrt[12]{8}}{2^{12}\sqrt[12]{625}} =$$

$$\text{se dividen los coeficientes que están fuera de la raíz, } \frac{8}{2} = 4, \Rightarrow 4 \frac{12\sqrt[12]{8}}{\sqrt[12]{625}} = 4 \sqrt[12]{\frac{8}{625}}$$