

INDETERMINACIÓN 0/0 EJERCICIOS RESUELTOS

La indeterminación 0/0 aparece en cocientes de funciones que normalmente se pueden simplificar, evitando así la indeterminación.

Por ejemplo,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

El cociente de ceros aparece en este límite porque 1 es una raíz de ambos polinomios. Como se trata de una raíz común, si factorizamos los polinomios, podemos simplificar el cociente:

$$\begin{aligned} \frac{x - 1}{x^2 - 1} &= \\ &= \frac{x - 1}{(x + 1)(x - 1)} = \\ &= \frac{1}{x + 1} \end{aligned}$$

Así, se evita la indeterminación:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{x^2 - 1} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

- **CALCULAR EL SIGUIENTE LÍMITE:**

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - x^2 - 6x}$$

Solución

Los dos polinomios se anulan en el punto $x=3$, así que tenemos la indeterminación 0 partido 0.

Vamos a escribirlos de forma factorizada para simplificar.

Polinomio del numerador

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= 0 \\ \downarrow \\ x &= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}x^2 - 4x + 3 &= \\ &= (x - 3)(x - 1)\end{aligned}$$

Polinomio del denominador

Podemos extraer xx como factor común:

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 - 6x &= \\ &= x \cdot (x^2 - x - 6)\end{aligned}$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$\begin{aligned}x^2 - x - 6 &= 0 \\ \downarrow \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}x^3 - x^2 - 6x &= \\ &= x(x - 3)(x + 2)\end{aligned}$$

Simplificamos el cociente de polinomios:

$$\begin{aligned}
 \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - x^2 - 6x} &= \\
 &= \frac{(x-3)(x-1)}{x(x-3)(x+2)} = \\
 &= \frac{x-1}{x(x+2)}
 \end{aligned}$$

Finalmente, calculamos el límite sustituyendo xx por 33:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^3 - x^2 - 6x} &= \\
 &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{x(x+2)} = \\
 &= \frac{2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}
 \end{aligned}$$

- **CALCULAR EL SIGUIENTE LÍMITE:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}}$$

Solución

Tenemos la indeterminación 0 partido 0.

Como en el denominador tenemos una resta con una raíz, multiplicamos y dividimos la fracción por el conjugado del denominador:

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} = \\
&= \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} \cdot \frac{1 + \sqrt{1 - x}}{1 + \sqrt{1 - x}} =^* \\
&= \frac{x(1 + \sqrt{1 - x})}{1^2 - (\sqrt{1 - x})^2} = \\
&= \frac{x(1 + \sqrt{1 - x})}{1 - 1 + x} = \\
&= \frac{x(1 + \sqrt{1 - x})}{x} = \\
&= 1 + \sqrt{1 - x}
\end{aligned}$$

Nota*: hemos utilizado el [producto notable](#) suma por diferencia.

Por tanto, el límite es

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \sqrt{1 - x} = \\
&= 2
\end{aligned}$$

- **CALCULAR EL SIGUIENTE LÍMITE:**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1 - x}}$$

Solución

Este límite es muy parecido al anterior. Realizando las mismas operaciones, llegamos a

$$\frac{x^2}{1 - \sqrt{1 - x}} = x \cdot (1 + \sqrt{1 - x})$$

Por tanto, el límite es

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1 - x}} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot (1 + \sqrt{1 - x}) = \\ &= 0 \end{aligned}$$