

TEMA 5 - POTENCIACION

<https://www.youtube.com/watch?v=tA94S33kxm8>

La potenciación es una operación matemática que multiplica un número, llamado base, por sí mismo la cantidad de veces que indica otro número, llamado exponente. Se expresa como a^n (base (**a**) elevada al exponente (**n**), representando una forma simplificada de escribir multiplicaciones de factores iguales.

Ejemplo, $a.a.a.a.a..... a = a^n$

a se multiplica n veces, a es la base y n es el exponente

Ejemplo; $2.2.2.2.2 = 2^5 = 32$

Exponente natural

Cuando el exponente es un número natural (n), este indica las veces que aparece (a) multiplicando por sí mismo, siendo (a) un número cualquier:

Ejemplo: $a^1 = a$

$$a^2 = a \cdot a$$

$$a^3 = a \cdot a \cdot a$$

$$a^n = \underset{n \text{ veces}}{\overbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}}$$

Multiplicación de potencias de igual base ($a^n \cdot a^m = a^{n+m}$)

Se conserva la base y se suman los exponentes; es decir:

Ejemplo: $5^2 \cdot 5^3 = a^{2+3} = 5^5 = 3125$

$$1) 2^2 \cdot 2^5 = 2^{2+5} = 2^7 = 128$$

$$2) x^3 \cdot x^5 = x^{3+5} = x^8$$

Potencia de un producto ($(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$)

La potencia de un Producto es igual al producto de cada uno de los factores elevado al mismo exponente, es decir,

Ejemplo: $(x \cdot y)^3 = x^3 \cdot y^3$

Si la base (**a**) tiene inverso aditivo, indicado mediante signo negativo (**-a**), entonces se tiene la regla:

$$1) (-a)^n = a^n, \text{ si } (n) \text{ es par}$$

$$2) (-a)^n = - (a^n), \text{ si } (n) \text{ es impar}$$

Ejemplo: $(-a)^1 = -a$

$$(-a)^2 = -a \cdot -a = a^2$$

$$(-a)^3 = -a \cdot -a \cdot -a = -(a^3)$$

Si la base (a) tiene inverso multiplicativo (c) , es decir (c .a =1) o que $c = \frac{1}{a}$, entonces este se denota por (a^{-1}) y el exponente se puede ampliar a todos los números enteros: $a^{-1} = \frac{1}{a}$ entonces $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

División de potencias de igual base $\left(\frac{a^m}{a^n}\right) = a^{m-n}$

El cociente de dos potencias con la misma base es igual a una potencia de dicha base con un exponente igual a la diferencia del exponente del dividendo menos el del divisor, esto es:

Ejemplo: $\frac{4^5}{4^2} = 4^{5-2} = 4^3 = 4.4.4 = 64$

1) $\frac{a^7}{a^5} = a^{7-5} = a^2 = a . a \text{ (m>n)}$

2) $\frac{x^3}{x^5} = x^{3-5} = x^{-2} = \frac{1}{x^2} \text{ (m<n)}$

Potencia de exponente 0 (cero)

Por convención, un número distinto de 0 elevado al exponente 0 da como resultado la unidad (1), puesto que:

$$1 = \frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

El caso particular de 0^0 no está definido y es conocido como una indeterminación.

Potencia de un cociente $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

La potencia de un cociente es igual al cociente de cada uno de los números elevado al mismo exponente.

Ejemplo: $\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{2.2.2}{5.5.5} = \frac{8}{125}$

Exponente Racional.

La potenciación con exponente racional viene de la necesidad de resolver una ecuación del tipo $x^n = a$, de manera que $x = \sqrt[n]{a}$, pero ha de garantizar que dicha (x) sea un número real y esto solo se puede garantizar para todo (n) si la base (a) es un número real positivo, por lo que existe un teorema que dice: Dado un numero real positivo (a), este tiene una única raíz n-esima positiva. Para notar la raíz se define el uso de fracciones en el exponente.

1) $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

2) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$$3) a^{\frac{-m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

$$\text{Ejemplo: } x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}; \quad 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9};$$

Potencia de una potencia $(a^n)^m = a^{n.m}$

La potencia de una potencia es igual a la potencia de base a y cuyo exponente es el producto de ambos exponentes (se coloca la misma base y se multiplican los exponentes)

$$\text{Ejemplo: } (x^3)^5 = x^{3.5} = x^{15}$$

$$\text{Resolver: } (4^3)^2 = 4^{3.2} = 4^6 = 4.4.4.4.4.4 = 16384$$

Exponente negativo $(a^{-n}) = (a^n)^{-1} = \frac{1}{a^n}$, por la propiedad de potencia de una potencia

La potencia con exponente -1 es el inverso de la base: $a^{-1} = \frac{1}{a}$

Ejemplo:

$$1) 4^{-3} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{4.4.4} = \frac{1}{64}$$

$$2) (-2)^{-5} = \frac{1}{-2^5} = \frac{1}{-2.-2.-2.-2.-2} = \frac{1}{-32} = -\frac{1}{32}$$

Ejercicios propuestos:

Simplifica empleando las propiedades de la potenciación:

$$1) 3^3 \cdot 3^4 \cdot 3$$

$$2) \frac{4^7}{4^3} =$$

$$3) (5^3)^4 =$$

$$4) (5 \cdot 2 \cdot 3)^4$$

$$5) (3^4)^4$$

$$6) \left[(5^3)^4 \right]^2$$

$$7) [(4^2)^3]^0 =$$

2) Realizar las siguientes operaciones con potencias:

$$1) (-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4$$

$$2) (-8) \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^0 \cdot (-2)$$

$$3) (-2)^{-2} \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4$$

$$4) 2^{-2} \cdot 2^{-3} \cdot 2^4$$

Realizar las siguientes operaciones con potencias:

$$1) \left(\frac{2}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 =$$

$$2) \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 =$$

$$3) \left(\frac{3}{2}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-2} =$$

$$4) \left(\frac{4}{7}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{7}\right)^0 =$$

5) Expresa como una única potencia aplicando sus propiedades.

$$a) \frac{2^3 \cdot 2^5 \cdot (3^4)^2}{6^4} = ..$$

$$b) \frac{25 \cdot 625 \cdot 64}{125 \cdot 8} = ..$$

$$c) \frac{a^2 b \cdot ab^3 \cdot a^4 b^2}{a^3 b^5} =$$

$$d) \frac{2^9}{(2^3)^2} \cdot (-2)^4 =$$

$$e) \frac{x^8 \cdot (-x)^5}{x^3} =$$

$$f) \frac{\frac{(x^4)^2}{(-x^5)(-x^8)}}{\frac{-x^3}{x^8}} =$$

PROPIEDADES DE LA POTENCIACION.

$1^n = 1$	$a^1 = a$	$a^0 = 1, (a \neq 0)$
$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$		$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$		$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
$a^{-1} = \frac{1}{a}, (a \neq 0)$		$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$
$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, (a \neq 0)$		$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{b^n}{a^n}$

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

Ejemplo: $2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32$

2) $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

Ejemplo, $\frac{3^6}{3^4} = 3^{6-4} = 3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

3) $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

Ejemplo: $(4^2)^3 = 4^{2 \cdot 3} = 4^6 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 4096$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Ejemplo $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{2^3}{3^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{8}{27}$

5) $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad a \neq 0$

Ejemplo: $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{25}$

6) $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{b^n}{a^n}$

Ejemplo: $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{2^3}{5^3}} = \frac{5^3}{2^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{125}{8}$

