

REPÚBLICA BOLIVARIANA DE VENEZUELA

Instituto Universitario de Tecnología de Administración Industrial

IUTEPI



Guía Teórico-Práctica: Continuidad de Funciones

Fundamentos y Ejercicios de Resolución Sencilla

Autoría: Licda. Sol Aguilar

Cátedra: Matemáticas / Cálculo

Institución: IUTEPI

Año: 2026

1. Introducción a la Continuidad de Funciones

En el estudio del cálculo, una función es continua cuando su gráfica se puede trazar de un solo trazo, es decir, sin levantar el lápiz del papel. Intuitivamente, esto significa que no hay saltos, huecos, interrupciones o agujeros en la trayectoria de la función.

Para analizar rigurosamente si una función $f(x)$ es continua en un punto específico $x = c$, se deben cumplir estrictamente tres condiciones fundamentales.

Las Tres Condiciones de Continuidad en un Punto

Una función $f(x)$ es continua en $x = c$ si y solo si se satisfacen las siguientes condiciones simultáneamente:

1. **La función está definida en c :** El valor $f(c)$ existe (pertenece a los números reales).

2. **El límite existe:** El límite de $f(x)$ cuando x tiende a c existe, es decir:
 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ (los límites laterales por izquierda y derecha deben ser iguales).

3. **El límite coincide con el valor de la función:** El valor del límite en el punto es exactamente igual al valor de la función evaluada en ese punto:
 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

Si alguna de estas tres condiciones falla, se dice que la función es **discontinua** en el punto $x = c$.

2. Tipos de Discontinuidad

Cuando una función no es continua en un punto, la discontinuidad se puede clasificar principalmente en dos tipos sencillos:

Tipo de Discontinuidad	Descripción	Condición Matemática
Evitable (Removable)	El límite existe en el punto, pero la función no está definida allí o toma un valor distinto. Se puede "reparar" redefiniendo un solo punto.	$\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$ o $f(c)$ no existe, pero $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ sí existe.
Inevitable (Esencial o de Salto)	Los límites laterales por la izquierda y por la derecha existen y son finitos, pero son diferentes entre sí (hay un "salto" en la gráfica).	$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$

3. Ejercicios Resueltos Paso a Paso

Ejercicio 1: Continuidad en un punto dado para una función polinómica

Estudiar la continuidad de la función $f(x) = x^2 - 3x + 2$ en el punto $x = 2$.

Solución paso a paso:

1. **Verificar $f(2)$:** Sustituimos $x = 2$ en la función:

$$f(2) = (2)^2 - 3(2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0.$$

Conclusión: $f(2)$ existe y es igual a 0.

2. **Calcular el límite:** Evaluamos el límite cuando x tiende a 2:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 3x + 2) = (2)^2 - 3(2) + 2 = 4 - 6 + 2 = 0.$$

Conclusión: El límite existe y es igual a 0.

3. **Comparar resultados:** Comprobamos que el límite coincide con el valor de la función:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) = 0.$$

Respuesta final: Como se cumplen las tres condiciones, la función es **continua** en $x = 2$. (Nota: Las funciones polinómicas son continuas en todos los números reales).

Ejercicio 2: Discontinuidad evitable en una función racional

Analizar la continuidad de la función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ en el punto $x = 2$.

Solución paso a paso:

1. **Verificar $f(2)$:** Al sustituir $x = 2$ obtenemos $\frac{(2)^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$.

Conclusión: La función **no está definida** en $x = 2$ (falla la condición 1).

2. **Calcular el límite:** Factorizamos el numerador como diferencia de cuadrados:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{x - 2}$$

Cancelamos el factor común $(x - 2)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4.$$

Conclusión: El límite existe y es igual a 4.

Respuesta final: Como el límite existe (4) pero la función no está definida en 2, la función presenta una **discontinuidad evitable** (o removible) en $x = 2$.

Ejercicio 3: Función a trozos (por partes)

Determinar si la siguiente función es continua en $x = 1$:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \leq 1 \\ 3 - x, & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Solución paso a paso:

1. **Evaluar $f(1)$:** Usamos la primera regla ($x \leq 1$):

$$f(1) = 1 + 1 = 2. \text{ (Existe).}$$

2. **Calcular límites laterales:**

- Límite por la izquierda ($x \rightarrow 1^-$) usando $x + 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 + 1 = 2$$

- Límite por la derecha ($x \rightarrow 1^+$) usando $3 - x$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 - 1 = 2$$

Como el límite por la izquierda es igual al límite por la derecha ($2 = 2$), el límite general existe y es

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2.$$

3. **Comparar:** El límite coincide con el valor de la función: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$.

Respuesta final: La función es **continua** en $x = 1$.

4. Ejercicios Propuestos para Practicar

Resuelve los siguientes ejercicios aplicando los conceptos estudiados en esta guía:

1. Dada la función $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$, determine si es continua en $x = 3$.
(Resp: Sí es continua, $f(3) = 13$)
2. Analice la continuidad de $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x - 3}$ en $x = 3$ y clasifique el tipo de discontinuidad.
(Resp: Discontinuidad evitable en $x = 3$, el límite es 6)
3. Determine si la función $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x < 2 \\ 5, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ es continua en $x = 2$.
(Resp: Discontinuidad inevitable de salto, pues los límites laterales son 4 y 5)