

TEMA 6.1 DETERMINANTES

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

El determinante es un valor escalar único asociado a una matriz cuadrada (mxn), calculado mediante operaciones algebraicas de sus elementos. Se utiliza para resolver sistemas lineales, calcular matrices inversas y determinar si una matriz es singular (Det=0) o regular Det ≠ 0. Su símbolo es |A| o Det(A).

Métodos de Cálculo:

- **Matriz 2 x 2** : $\text{Det} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a.d - c.b$
- **Matriz 3 x 3** : Se usa la **Regla de Sarrus** (sumar productos de diagonales principales y restar diagonales secundarias) o expansión por cofactores (Laplace).
- **Matrices mx n** : Expansión de Laplace o eliminación gaussiana para triangular la matriz y multiplicar los elementos de la diagonal principal.

Ejemplo MATRIZ 2X2: calcular el determinante $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

$$[A] = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = 3.2 - 4.5 = 6 - 20 = -14, [A] = -14$$

Calcular el determinante de $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

MATRIZ 3X3 : $A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ aplicando la **Regla de Sarrus**

$$A = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a.e.i + b.f.g + c.d.h - (g.e.c + h.f.a + i.d.b) =$$

REGLA DE SARRUS

se amplía la matriz escribiendo a la derecha las dos primeras columnas o las dos primeras filas debajo de tercera fila, se realiza la suma de los productos de los elementos de la diagonal principal (se traza de izquierda a derecha) y luego se resta la suma de los productos de los elementos de la diagonal secundaria.(se traza de abajo hacia arriba)

Ejemplo: calcular el determinante $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

Aplicamos la Regla de Sarrus $A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & -6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix}$

$$A = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -3 & 4 & 5 \\ 2 & -4 & -6 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 4 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-2)(4)(-6) + (1)(5)(2) + (3)(-3)(-4) -$$

$$[(2)(4)(3) + (-4)(5)(-2) + (-6)(-3)(1) = 48 + 10 + 36 - (24 + 40 + 18)] = 94 - 82 = 12, \text{ solución, } [A] = 12$$

2) Ejercicio: Calcular el determinante de aplicando método de sarrus:

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -9 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

EL MÉTODO DE COFACTORES (O EXPANSIÓN DE LAPLACE):

Permite calcular el determinante de cualquier matriz cuadrada reduciéndola a la suma de los productos de los elementos de una fila o columna por sus respectivos cofactores.

Pasos del método

1. **Elegir una fila o columna:** Selecciona de preferencia la que tenga más ceros para simplificar los cálculos.
2. **Identificar los signos:** Cada posición (i, j) de la matriz tiene un signo asociado dado por $(-1)^{i+j}$, alternando entre positivo y negativo empezando con + en la posición (1,1). Posición (1,2) negativo (-). Posición (1,3) positivo (+).
3. **Calcular el menor (M_{ij}):** Para cada elemento de la línea elegida, elimina su fila y su columna correspondiente para obtener una submatriz de orden inferior.
4. **Obtener el cofactor (C_{ij}):** Multiplica el determinante de la submatriz menor por el signo de su posición: $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det(M_{ij})$
5. : Multiplica cada elemento original por su cofactor correspondiente y suma todos los resultados.

Ejemplo: Hallar el determinante de la matriz A por el método de cofactor.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{elegimos fila 1, columna 1.} \Rightarrow + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \text{ cofactor}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{elegimos fila 1, columna 2.} \Rightarrow -(-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \text{ cofactor}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{elegimos fila 1, columna 3} \Rightarrow (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \text{ cofactor}$$

$$A = + 3 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3(1 \cdot 2 - 1 \cdot 0) + 1(2 \cdot 2 - 3 \cdot 0) - 1(2 \cdot 1 - 3 \cdot 1) \\ = 3(2 - 0) + 1(4 - 0) - 1(2 - 3) = 3(2) + 1(4) - 1(-1) = 6 + 4 + 1 = 11 \text{ entonces, } \det[A] = 11$$

Ejercicio: Hallar el determinante de B aplicando el método de cofactor.

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 3 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix} =$$

<https://www.tiktok.com/@themathmotion/video/7492992763521191223?lang=es>

REGLA DE CRAMER

Este método, basado en el uso de determinantes, es una herramienta algebraica eficaz para encontrar soluciones de sistemas cuadrados (es decir, con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas), siempre que el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de cero.

Recordemos que un sistema de ecuaciones puede escribirse en forma matricial como $AX = B$, Donde (A) es la matriz de los coeficientes del sistema, (X) es la matriz con las incógnitas y (B) la matriz de los términos independientes de las ecuaciones.

Para poder aplicar la regla de Cramer, la matriz A tiene que ser cuadrada y regular (determinante distinto de 0).

Bajo estas condiciones, la **regla de Cramer** es la siguiente:

La incógnita x_i del sistema $AX=b$ es $x_i = \frac{[A_i]}{[A]}$ donde A_i es la matriz A, pero cambiando la columna i de A por la columna de términos independientes, b. ejemplo:

$$\begin{cases} x - 3y = 2 \\ x + 5y = 5 \end{cases}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \text{ Matriz de los coeficientes}$$

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} \text{ Matriz de las incógnitas}$$

$$\begin{vmatrix} 2 \\ 5 \end{vmatrix} \text{ Matriz de los términos independientes}$$

Hallamos el determinante de la matriz de los coeficientes de las ecuaciones para verificar si es una matriz regular es decir $|A| \neq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot 5 - 1 \cdot (-3) = 5 + 3 = 8 \quad |A| = 8 \text{ aplicamos la regla de cramer}$$

$A_x = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ para hallar el valor de (x), cambiamos los coeficientes de la incógnita (x) por los coeficientes de los términos independientes en la matriz (A) y calculamos el determinante.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot 5 - 10(-3) = 10 + 30 = 40, \quad x = \frac{|Ax|}{|A|}, \quad x = \frac{40}{8}, \quad \text{solución } x = 5$$

$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}$, para hallar el valor de (y), cambiamos los coeficientes de la incógnita (y) por los coeficientes de los términos independientes en la matriz (A) y calculamos el determinante.

$$A_y = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 10 \end{bmatrix} = 1 \cdot 10 - 1 \cdot 2 = 10 - 2 = 8 \quad [A_y] = 8$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad y = \frac{8}{8} = 1 \quad \text{solución } y=1, \quad \text{Solución del sistema: } x=5, y=1$$

2)Ejercicio: Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

SISTEMA DE ECUACION 3X3

$$\begin{cases} X + Y - Z = 0 \\ 3X + Y - Z = 2 \\ 4X - 2Y + Z = 3 \end{cases} \quad \text{Matriz de los coeficientes } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \text{ Hallamos el valor del determinante (aplicando método de sarrus)}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 1 - 4 + 6 - [-4 + 2 + 3] = 3 - 1 = 2, \quad |A| = 2$$

$|Ax| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ Cambiamos los coeficientes de la incógnita (x) por los coeficientes del termino independiente, luego hallamos el valor del determinante.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 3 + 4 - (-3 + 0 + 2) = -3 + 4 + 3 - 2 = 2, \quad |Ax| = 2$$

$$x = \frac{|Ax|}{|A|}, \quad x = \frac{2}{2}, \quad \text{solución } x = 1$$

$|Ay| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ Cambiamos los coeficientes de la incógnita (y) por los coeficientes del termino independiente, luego hallamos el valor del determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 2 + 0 - 9 - (-8 - 3 + 0) = 2 - 9 + 8 + 3 = 4 \quad |Ay| = 4$$

$$y = \frac{|Ay|}{|A|} \quad y = \frac{4}{2}, \text{ solución } y = 2$$

$|Az| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ Cambiamos los coeficientes de la incógnita (z) por los coeficientes del termino independiente, luego hallamos el valor del determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 3 + 8 + 0 - (0 - 4 + 9) = 3 + 8 + 4 - 9 = 6 \quad |Az| = 6$$

$$z = \frac{|Az|}{|A|} \quad y = \frac{6}{2}, \text{ solución } z = 3, \text{ Solución del sistema } x=1, y=2, z=3$$

2) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones usando regla de cramer

$$1) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ -x + y + z = 1 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x - y - 2z = -2 \\ -x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 8 \end{cases}$$

<https://www.youtube.com/watch?v=ILPcHVAqY80>

