

TEMA 12

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS ECUACIONES LINEALES

Los métodos principales para resolver sistemas de ecuaciones lineales incluyen **sustitución, igualación, reducción (suma y resta), método gráfico, y métodos matriciales como Gauss o Cramer**. Todos buscan transformar el sistema en una ecuación de primer grado con una incógnita, obteniendo la misma solución independientemente del método utilizado.

Métodos Analíticos (Algebraicos)

- 1) **METODO DE SUSTITUCION**. Consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y sustituir la expresión resultante en la otra ecuación, reduciendo el sistema a una ecuación con una sola incógnita.
- 2) **METODO DE IGUALACION**: despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones y luego se igualan las expresiones obtenidas, eliminando así esa incógnita.
- 3) **METODO DE REDUCION**: multiplica una o ambas ecuaciones por números adecuados para que los coeficientes de una de las incógnitas sean opuestos, permitiendo sumarlas o restarlas para eliminar esa incógnita.

1) METODO DE SUSTITUCION. SISTEMA DE ECUACIONES 2X2 (2 Ecuaciones y 2 Incógnitas)

Resolver el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 & (1) \\ x - 5y = 6 & (2) \end{cases}$$

- a) Despejamos una letra o incógnita (x) en una de las ecuaciones, en este caso escogemos la ecuación (2), $x - 5y = 6$. Despejamos: **$x = 5y + 6$** ,
- b) Sustituimos o reemplazamos esa letra en la otra ecuación (1).
 $3x + 2y = 1$, sustituimos, $3(5y + 6) + 2y = 1$, resolvemos $15y + 18 + 2y = 1 \Rightarrow 17y = 1 - 18 \Rightarrow 17y = -17$, $y = \frac{-17}{17} \Rightarrow$ **$y = -1$**
- c) Una vez encontrado el valor de la incógnita (y) los sustituimos en cualquiera de las ecuaciones para hallar el valor de la incógnita (x).
 $y = -1$ este valor lo sustituimos en la ecuación (2): $x - 5y = 6$, $x - 5(-1) = 6 \Rightarrow$ resolvemos, $x + 5 = 6 \Rightarrow x = 6 - 5 \Rightarrow$ **$x = 1$** .
- d) Verificamos si se cumple la igualdad sustituyendo los valores encontrados en cualquiera de las ecuaciones (2).
Sustituimos, $x = 1$, $y = -1$ en la ecuación $x - 5y = 1 \Rightarrow 1 - 5(-1) = 6 \Rightarrow 1 + 5 = 6 \Rightarrow$ **$6 = 6$**

Resolver:
$$\begin{cases} x - 2y = -4 & (1) \\ 3x + y = 9 & (2) \end{cases}$$

- a) Despejamos la incógnita (x) en la ecuación (1) $x - 2y = -4 \Rightarrow$
 $x = 2y - 4$

- b) Sustituimos (x) en la ecuación (2) $3x + y = 9 \Rightarrow 3(2y - 4) + y = 9$
 Resolvemos, $6y - 12 = 9 \Rightarrow 6y = 9 + 12$, $6y = 21 \Rightarrow y = \frac{21}{6}$; $y = \frac{7}{2}$
- c) Sustituimos el valor de (y) en la ecuación (1): $x - 2y = -4$
 $x - 2\left(\frac{7}{2}\right) = -4 \Rightarrow x - 7 = -4$, $x = -4 + 7 \Rightarrow x = 3$
- d) Verificamos la igualdad en (1) $x - 2y = -4$, sustituimos $x = 3$, $y = \frac{7}{2}$
 $3 - 2\left(\frac{7}{2}\right) = -4 \Rightarrow 3 - 7 = -4 \Rightarrow -4 = -4$

2) METODO DE SUSTITUCION. SISTEMA DE ECUACIONES 3X3 (3 Ecuaciones y 3 Incógnitas)

$$\text{Resolver} \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 & (1) \\ 5x + 3y + 4z = 2 & (2) \\ x + y - z = 1 & (3) \end{cases}$$

- a) Despejamos (x) en la ecuación (1) $x + y - z = 1 \Rightarrow x = 1 - y + z$
- b) Sustituimos el valor de (x) en las ecuaciones (2) y (3)
En (2) $5(1 - y + z) + 3y + 4z = 2$, $5 - 5y + 5z + 3y + 4z = 2 \Rightarrow -2y + 9z = 2 - 5$,
 $-2y + 9z = -3$
En (1), $3(1 - y + z) + 2y + z = 1$, $\Rightarrow 3 - 3y + 3z + 2y + z = 1$
 $3 - y + 4z = 1 \Rightarrow -y + 4z = 1 - 3 \Rightarrow -y + 4z = -2$
De los resultados formamos un sistema 2x2

$$\begin{cases} -2y + 9z = -3 & (1) \\ -y + 4z = -2 & (2) \end{cases}$$
- a) En este nuevo sistema despejamos (y) en la ecuación (2)
 $-y + 4z = -2 \Rightarrow y = 4z + 2$
- b) Sustituimos el valor de (y) en la (1) ecuación. $-2y + 9z = -3$
 $-2(4z + 2) + 9z = -3 \Rightarrow -8z - 4 + 9z = -3 \Rightarrow z = -3 + 4$, $z = 1$
- c) sustituimos el valor de (z) en la ecuación (2), $-y + 4z = -2$
 $-y + 4(1) = -2 \Rightarrow -y + 4 = -2$, $-y = -4 - 2 \Rightarrow y = 6$
 Ahora escogemos el primer despeje $x = 1 - y + z$, **sustituimos los valores de y, z para encontrar el valor de (x)** $\Rightarrow x = 1 - 6 + 1 \Rightarrow$
 $x = 2 - 6 \Rightarrow x = -4$
Solución del sistema $x = -4$, $y = 6$ y $z = 1$

Observación: Cuando un sistema tiene más incógnitas (variables) que **numero de ecuaciones**, entonces el sistema tiene **soluciones infinitas**, es decir, cada variable puede tomar diferentes valores, tal que cumplan siempre con la ecuación, la cantidad de valores que puede tomar cada variable es infinita.

Ejemplo: $x + y = 5$, en este caso hay una ecuación 2 incógnitas, este sistema tiene infinitas soluciones ya que (x) y (y) pueden tener infinitos valores y se mantiene la igualdad.

2) METODO DE IGUALACION. SISTEMA DE ECUACIONES 2X2 (2 Ecuaciones y 2 Incógnitas)

El **método de igualación** es una técnica eficaz para resolver sistemas de **ecuaciones lineales**, especialmente aquellos que involucran dos variables.

Resolver el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} 2X - 4Y = 6 & (1) \\ 3X - 2Y = 5 & (2) \end{cases}$$

- a) Despejamos las mismas incógnitas en las dos ecuaciones
Ecuación (1) $2x - 4y = 6$, en este caso despejamos a (x), $2x = 6 + 4y \Rightarrow$
 $X = \frac{6+4y}{2} \Rightarrow$ simplificamos dividiendo entre 2, $x = 3 + 2y$
- b) Ecuación (2) $3x - 2y = 5$, despejamos a (x), $3x = 5 + 2y \Rightarrow x = \frac{5+2y}{3}$
Igualemos los dos resultados para despejar la incógnita (y)
 $3 + 2y = \frac{5+2y}{3}$ resolvemos, $3(3 + 2y) = 5 + 2y \Rightarrow 9 + 6y = 5 + 2y$
Agrupamos términos $6y - 2y = 5 - 9 \Rightarrow 4y = -4 \Rightarrow y = -\frac{4}{4} \Rightarrow y = -1$
- c) Para hallar el valor de (x) sustituimos el valor de $y = -1$ en la ecuación
 $X = 3 + 2y \Rightarrow x = 3 + 2(-1) \Rightarrow x = 3 - 2, x = 1$

Solución del sistema: $y = -1, x = 1$

3) METODO DE IGUALACION. SISTEMA DE ECUACIONES 3X3 (3 Ecuaciones y 3 Incógnitas)

Resolver el sistema de ecuaciones
$$\begin{cases} X - Y + Z = 2 & (1) \\ X + Y + Z = 4 & (2) \\ 2X + 2Y - Z = -4 & (3) \end{cases}$$

En este caso aplicamos el método de igualación, despejando la misma incógnita en las tres ecuaciones. Despejaremos (z)

- 1) $X - y + z = 2 \Rightarrow z = 2 - x + y$ (a)
2) $X + y + z = 4 \Rightarrow z = 4 - x - y$ (b)
3) $2x + 2y - z = -4 \Rightarrow z = 4 + 2x + 2y$ (c)

Igualemos a y b , a y c para obtener un sistema de 2 ecuación con 2 incógnitas.

$$2 - x + y = 4 - x - y \Rightarrow -x + y + x + y = 4 - 2 \Rightarrow 2y = 2, y = \frac{2}{2} \Rightarrow y = 1$$

Igualemos a y c, $2 - x + y = 4 + 2x + 2y \Rightarrow -x + y - 2x - 2y = 4 - 2 \Rightarrow$

$-3x - y = 2 \Rightarrow -3x = 2 + y$, como **$y = -1$** lo sustituimos en la ecuación $-3x = 2 + 1$

$$-3x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{-3} \Rightarrow \mathbf{x = -1.}$$

En este caso podemos observar que $x = -1$ y $y = 1$, entonces estos valores lo podemos sustituir en las ecuaciones a, b ó c para hallar el valor de (z).

Sustituimos estos valores en la ecuación (a) **$z = 2 - x + y \Rightarrow z = 2 - (-1) + 1$** ,

$$Z = 2 + 1 + 1 \Rightarrow \mathbf{z = 4}$$

Solución: $x = -1$, $y = 1$, $z = 4$

2) METODO DE REDUCCION. SISTEMA DE ECUACIONES 2X2 (2 Ecuaciones y 2 Incógnitas)

Para resolver un sistema de ecuaciones por el método de reducción seguiremos los siguientes pasos:

1 Se preparan las dos ecuaciones, multiplicándolas por un numero tal que las ecuaciones resultantes tengan un coeficiente en común

2 Realizamos una resta (o suma según sea el caso de los signos de los coeficientes) para desaparecer (**eliminar**) una de las incógnitas

3 Se resuelve la ecuación resultante

4 El valor obtenido se sustituye en una de las ecuaciones iniciales y se resuelve

5 Los dos valores obtenidos constituyen la solución del sistema

$$\text{Ejemplo, resolver el sistema de ecuaciones } \begin{cases} 3x - 4y = -6 & (1) \\ 2x + 4y = 16 & (2) \end{cases}$$

En este caso los coeficientes de la incógnita (y) son iguales y con signos opuesto, lo cual podemos restar estos valores y reducir el sistema a una ecuación con una incógnita,

$$\begin{array}{r} 3x - \cancel{4y} = -6 \\ 2x + \cancel{4y} = 16 \\ \hline \end{array}$$

$$5x + 0y = 10 \Rightarrow 5x = 10 \Rightarrow x = \frac{10}{5} \Rightarrow \mathbf{x = 2}$$

Sustituimos el valor de (x) en la ecuación (1) para hallar el valor de (y),

$$3x - 4y = -6 \Rightarrow 3(2) - 4y = -6 \Rightarrow 6 - 4y = -6 \Rightarrow 6 + 6 = 4y \Rightarrow 12 = 4y$$

$$\frac{12}{4} = y \Rightarrow \mathbf{y = 3} \quad \text{solución: } \mathbf{x = 2, y = 3}$$

2) Resolver el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 6x - 5y = -9 & (1) \\ 4x + 3y = 13 & (2) \end{cases}$

Multiplicamos la ecuación (1) por (-2) y la ecuación (2) por (3)

$$\begin{cases} -2(6x - 5y = -9) & (1) \\ 3(4x + 3y = 13) & (2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -12x + 10y = 18 & (1) \\ 12x + 9y = 39 & (2) \end{cases} \text{ restamos las incógnitas}$$

$$0x + 19y = 57 \Rightarrow 19y = 57, y = \frac{57}{19} = y = 3$$

Sustituimos el valor de (y) en la ecuación (1) para hallar el valor de (x),

$$6x - 5y = -9 \Rightarrow 6x - 5(3) = -9 \Rightarrow 6x - 15 = -9 \Rightarrow 6x = 15 - 9 \Rightarrow 6x = 6$$

$$6x = \frac{6}{6} \Rightarrow x = 1, \text{ solución: } x = 1, y = 3$$

3) METODO DE REDUCCION. SISTEMA DE ECUACIONES 3X3 (3 Ecuaciones y 3 Incógnitas)

$$\text{Resolver el sistema de ecuaciones } \begin{cases} x + 4y - z = 6 & (1) \\ 2x + 5y - 7z = -9 & (2) \\ 3x - 2y + z = 2 & (3) \end{cases}$$

En este caso escogemos la Ec. (1) y la Ec. (3) para eliminar la incógnita (z)

$$\begin{array}{rcl} x + 4y - z = 6 & (1) & \text{ como los coeficientes de la incógnita (z) son iguales pero} \\ 3x - 2y + z = 2 & (3) & \text{ con signos diferentes la eliminamos. Obtenemos la Ec. (4)} \\ \hline 4x + 2y & = & 8 \quad (4) \end{array}$$

Relacionamos las Ec. (2) y (3), multiplicamos la Ec.(3) por (7) para eliminar a la incógnita (z)

$$\begin{array}{rcl} 2x + 5y - 7z = -9 & \Rightarrow & 2x + 5y - 7z = -9 \\ (7)(3x - 2y + z = 2) & \Rightarrow & 21x - 14y + 7z = 14 \\ \hline 23x - 9y & = & 5 \quad (5) \end{array}$$

Aplicamos el método de reducción en las ecuaciones (4) y (5), multiplicamos la ecuación (4) por 9 y la ecuación (5) por 2.

$$\begin{array}{rcl} 4x + 2y = 8 & \Rightarrow & 9(4x + 2y = 8) \Rightarrow 36x + 18y = 72 \\ 23x - 9y = 5 & \Rightarrow & 2(23x - 9y = 5), \quad 46x - 18y = 10 \\ \hline 82x & = & 82 \Rightarrow 82x = 82 \Rightarrow x = \frac{82}{82} = 1 \end{array}$$

X=1, sustituimos este valor de x en la ecuación (4) para hallar el valor de (y).

$$4x + 2y = 8 \Rightarrow 4(1) + 2y = 8 \Rightarrow 4 + 2y = 8 \Rightarrow 2y = 8 - 4 \Rightarrow 2y = 4, y = \frac{4}{2}, y = 2$$

Una vez encontrado los valores de (x), (y), sustituimos estos valores en cualquiera de las ecuaciones (1) ,(2) ó (3) para hallar el valor de (z). en este caso seleccionamos la ecuación (1) y sustituimos los valores de x, y..

$$X + 4y - z = 6 \Rightarrow \text{sustituimos los valores de x. y. } (1) + 4(2) - z = 6 \Rightarrow 1 + 8 - z = 6$$

$$9 - z = 6 \Rightarrow -z = 6 - 9 : -z = -3 \Rightarrow \mathbf{z = 3}$$

Solución: $x = 1$, $y = 2$ y $z = 3$

Ejercicios:

1) Resolver por el método de igualación.
$$\begin{cases} 6x + 4y - 5z = -1 \\ -2x + 8y + 3z = 4 \\ 4x - 4y - 7z = -6 \end{cases}$$

2) Resolver por el método de igualación.
$$\begin{cases} 2x + 4y = 10 \\ x + 3y = 7 \end{cases}$$

3) Resolver por el método de sustitución.
$$\begin{cases} 2x - 5y + 2z = 1 \\ 3x + y + z = 2 \\ x + y + z = 4 \end{cases}$$

4) Resolver por el método de sustitución
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x + 2y = 6 \end{cases}$$

5) Resolver por el método de reducción
$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 6 \\ 3x + 2y - z = 4 \\ 4x + 3y - 3z = 1 \end{cases}$$

6) Resolver por el método de reducción
$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ 2x + 4y = 16 \end{cases}$$

https://www.youtube.com/watch?v=bNZ_7qzgPrl

<https://www.youtube.com/watch?v=cNIV-ltkpBM>

https://www.youtube.com/watch?v=QLH9_pgbu1M

