

TEMA 13

ECUACIONES CUADRATICAS

Una ecuación cuadrática, o de segundo grado, es una expresión de la forma **$ax^2+bx+c=0$** , donde a, b y c son números reales y **$a \neq 0$** . El mayor exponente de la incógnita x es 2, y se pueden resolver utilizando la formula general, factorización o completando el cuadrado para encontrar hasta dos soluciones.

Elementos y Forma Estándar

- **Forma estándar:** $ax^2+bx+c=0$
- **Término cuadrático (ax^2) :** Donde a es el coeficiente principal ($a \neq 0$).
- **Término lineal (bx):** Donde (b) es el coeficiente.
- **Término independiente (c):** El número sin incógnita.

Métodos de Solución (Formula General)

Utilizar este método es muy sencillo, dado que solo debemos **igualar** las ecuaciones **a cero** y **sustituir** los valores de **a, b, c** en la **fórmula general**.

Al resolver una ecuación de segundo grado, pueden ocurrir 3 cosas:

- **Existen 2 valores** para la variable x que satisfacen la ecuación.
- Existe una **única solución**.
- La solución **no pertenece** al conjunto de los números **Reales**.

1. **Formula General:** $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2. **Factorización:** Buscar dos binomios que multiplicados den cero.

3. **Completar el cuadrado:** Transformar la ecuación en un trinomio cuadrado perfecto.

1) Ejemplo: Sea , **$2x^2 + 9x + 10 = 0$** resolver aplicando la formula general..

1) Identificamos los coeficientes en la ecuación: $a = 2$, $b = 9$ y $c = 10$

2) Aplicamos la formula general : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$X = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \cdot 2 \cdot 10}}{2 \cdot 2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 80}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{1}}{4} = \frac{-9 \pm 1}{4} \quad \mathbf{x = \frac{-9 \pm 1}{4} \text{ resolvemos,}}$$
$$X_1 = \frac{-9+1}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \quad , \quad X_2 = \frac{-9-1}{4} = \frac{-10}{4} = -\frac{5}{2}$$

Solución: $x_1 = -2$. $x_2 = -\frac{5}{2}$, con estos valores los sustituyes en la ecuación y verifica si se cumple la igualdad.

Ejemplo: Sea $3x^2 - 5x + 2 = 0$ resolver aplicando la formula general..

1) Identificamos los coeficientes en la ecuación: $a = 3$, $b = -5$ y $c = 2$

2) Aplicamos la formula general : $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(2)}}{2(3)} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = > x = \frac{5 \pm 1}{6}$$

$$x_1 = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad , \quad x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad . \text{solución, } x_1 = 1 ; x_2 = \frac{2}{3}$$

Métodos de Solución (Por Factorización)

La resolución de ecuaciones cuadráticas () por factorización consiste en convertir el trinomio en un producto de dos binomios igualados a cero. El método implica buscar dos números que multiplicados den (c) (término independiente) y sumados den (b) (coeficiente lineal), igualando cada factor a cero para encontrar las dos soluciones.

Pasos Clave para la Factorización:

1. **Igualar a cero:** Ordenar la ecuación de modo que todos los términos estén en un lado y cero en el otro ($ax^2 + bx + c = 0$).
2. **Factorizar:**
3. Factorizar el trinomio del primer miembro de la ecuación, para obtener el producto de binomios.
1. **Trinomio $x^2 + bx + c = 0$:** Buscar dos números que multiplicados den (c) y sumados den (b)
2. **Factor Común:** Si no hay término constante, factorizar (x).
3. **Método de la Tijera/tanteo:** Utilizado para $ax^2 + bx + c = 0$, cuando $a \neq 1$.
4. **Propiedad del producto nulo:** Igualar cada factor a cero y despejar (x) para obtener las dos soluciones (raíces).

Ejemplo: Resolver $x^2 + 6x + 8$.

Igualamos a cero la ecuación $x^2 + 6x + 8 = 0$

Factorizar, busca dos números que multiplicado de (8) y sumados de (6),

$(x + 4)(x + 2) = 0$, igualamos a cero cada factor, $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$,

$x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$. **solución $x = -4$, $x = -2$**

Resolver $x^2 - x - 6$.

Igualamos a cero la ecuación: $x^2 - x - 6 = 0$, busca dos números que multiplicados de (- 6) y sumados de (- 1) , el signo del primer factor es signo del coeficiente de (b), en este caso es (-) y el signo del segundo factor es el resultado del producto del signo de (b) por el signo de (c) , - por - es +

$(x - 3)(x + 2) = 0$. igualamos a cero cada factor, $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$, $x + 2 = 0$

$x = - 2$, solución : $x = 3$ y $x = - 2$

Métodos de Solución (Por Completación al Cuadrado)

Resolver ecuaciones cuadráticas por Completación al cuadrado implica transformar la ecuación ($ax^2 + bx + c = 0$) a la forma $(a + h)^2 = k$, moviendo el término independiente al segundo miembro y sumando $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ a ambos lados para crear un trinomio cuadrado perfecto. Este método es clave para encontrar las raíces de cualquier ecuación de segundo. Para resolver ecuaciones cuadráticas por **completación al cuadrado**, el objetivo es transformar un trinomio en un **trinomio cuadrado perfecto** para luego aplicar la raíz cuadrada.

1) Ejemplo: Resolver $x^2 + 6x - 27 = 0$

1) Movemos el termino independiente al segundo miembro, **$x^2 + 6x = 27$** ,

Determinamos el valor de $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, y luego sumamos este valor a ambos lados de la ecuación, para crear el trinomio cuadrado perfecto en el primer miembro, $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$

$x^2 + 6x + 9 = 27 + 9 \Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 36$, factorizamos el primer miembro ya que es un trinomio cuadrado perfecto, $(x + 3)^2 = 36$, aplicamos raíz cuadrada a ambos miembros para hallar el valor de (x), $\sqrt{(x + 3)^2} = \sqrt{36} \Rightarrow x + 3 = \pm 6$

a) $x + 3 = 6$, $x = 6 - 3 \Rightarrow x = 3$

b) $x + 3 = - 6$, $x = - 6 - 3 \Rightarrow x = -9$

Solucion: $x = 3$, $x = - 9 \Rightarrow (x - 3)(x + 9) = 0$

3) Resolver : $x^2 - 4x + 1 = 0$

$x^2 - 4x = - 1$, calculamos $\left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{-4}{2}\right)^2 = 4$, sumamos este valor a ambos lados de la ecuación, **$x^2 - 4x + 4 = - 1 + 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 3$** , factorizamos el primer miembro, $(x - 2)^2 = 3$, aplicamos raíz cuadrada $\sqrt{(x - 2)^2} = \sqrt{3}$

$x - 2 = \pm\sqrt{3}$ a) $x - 2 = \sqrt{3} \Rightarrow x = 2 + \sqrt{3}$, b) $x - 2 = - \sqrt{3} \Rightarrow x = 2 - \sqrt{3}$

solución: $x = 2 + \sqrt{3}$, $x = 2 - \sqrt{3}$

Resolver: $2x^2 + 12x - 14 = 0$, en este caso $a \neq 1$

Dividimos cada miembro de la ecuación por (2), $\frac{2x^2+12x-14}{2} = \frac{0}{2}$,

$x^2 + 6x - 7 = 0$, $x^2 + 6x = 7$, hallamos $\left(\frac{b}{2}\right)^2$, $\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9$, $x^2 + 6x + 9 = 7 + 9$

$x^2 + 6x + 9 = 16$, factorizamos, $(x + 3)^2 = 16 \Rightarrow$ aplicamos raíz cuadrada,

$\sqrt{(x + 3)^2} = \sqrt{16} \Rightarrow x + 3 = \pm 4$, **a)** $x + 3 = 4 \Rightarrow x = 4 - 3$, **x = 1** **b)** $x + 3 = -4$

X = - 7 . solución : x = 1 y x = -7

ECUACIONES POLINOMICAS

Las ecuaciones polinómicas son igualdades entre dos expresiones algebraicas (polinomios) donde la incógnita tiene exponentes enteros no negativos, igualadas generalmente a cero $P(x) = 0$. Se clasifican por su grado (mayor exponente), incluyendo lineales (grado 1), cuadráticas (grado 2) y superiores, y sus soluciones pueden ser números reales o complejos.

Una ecuación polinómica siempre tiene la forma "polinomio = 0".

Algebraicamente, tiene la forma $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$, donde

- $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ son coeficientes y todos estos números son números reales.
- 'x' es la variable.
- $p(x)$ significa "polinomio en términos de la variable x"
- 'n' es un entero no negativo y, como es el exponente más alto, es el grado de $p(x)$.

Tipos y Métodos de Resolución:

- **Primer Grado ($ax + b = 0$):** Se despeja la incógnita directamente. Ejemplo: **$6x - 12 = 0$**

$$6x = 12 \Rightarrow x = \frac{12}{6} \Rightarrow x = 2$$

- **Segundo Grado ($ax^2 + bx + c = 0$):** Se resuelven usando la fórmula general

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot (a) \cdot (c)}}{2 \cdot (a)} \text{ o factorización.}$$

- **Grado Superior (> 2):** Se utilizan métodos como factorización, extracción de factor común y la **regla de Ruffini** para reducir el grado de la ecuación.

Diferencia entre polinomio y ecuación

Un polinomio es el término principal que se utiliza para describir un cierto tipo de expresión algebraica que contiene variables y constantes, e involucra las operaciones de suma, resta, multiplicación y división, junto con potencias no negativas asociadas únicamente a las variables.

Ejemplo: $4x + 6$

Una ecuación polinómica es una expresión matemática que contiene un símbolo de igualdad entre dos expresiones algebraicas que tienen valores iguales, ejemplo. $6x + 4 = 8$

Ejemplo: Resolver ecuaciones polinómicas de primer grado (lineales)

- 1) $2(x + 1) - 3(x - 2) = x + 6$, aplicamos propiedad distributiva para eliminar los paréntesis, $2x + 1 - 3x + 6 = x + 6 \Rightarrow$ agrupamos términos semejantes, $1 + 6 - 6 = x - 2x + 3x \Rightarrow 1 = 2x$, $x = \frac{1}{2}$

Solución: $x = \frac{1}{2}$

2) Resolver: $2x - 3 = 6 + x$

3) Resolver: $5(2x - 3) = 3x - 20$

4) Resolver: $\frac{x-1}{6} - \frac{x-3}{2} = -1$

5) Resolver: $4(x - 10) = -6(2 - x) - 6x$

2. Ecuaciones Polinómicas de Segundo Grado (Cuadráticas) $ax^2+bx+c=0$

1) Resolver: $3x^2 + 5x - 2 = 0$

Formula general. $X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4(a)(c)}}{2(a)}$, $a = 3$, $b = 5$ y $c = -2$

$$X = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(3)(-2)}}{2(3)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{6} = \frac{-5 \pm 7}{6}$$

$$X_1 = \frac{-5 + 7}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad X_2 = \frac{-5 - 7}{6} = \frac{-12}{6} = -2$$

Solución: $x = \frac{1}{3}$, $x = -2$

Resolver: $x^2 - 5x - 6 = 0$

Resolver : $x^2 - 14x + 49 = 0$

Resolver : $2x^2 - 7x + 3 = 0$

Resolver: $x^2 + (7 - x)^2 = 25$

Resolver: $18 = 6x + x(x - 13)$

3.Ecuaciones de Grado Superior (Tercer grado o mayor)

Las ecuaciones polinomiales de grado mayor que dos, como las cúbicas (x^3) o de cuarto grado (x^4), se resuelven principalmente factorizando el polinomio e igualando cada factor a cero.

Pasos generales para resolver estas ecuaciones:

- **Identificar el grado:** Determinar el mayor exponente de la variable.
- **Factor Común:** Buscar si todos los términos comparten una misma variable (x o y) para simplificar.
- **Regla de Ruffini:** Probar los divisores del término independiente (tanto positivos como negativos) para encontrar raíces que den un resto de cero.
- **Reducción de grado:** Al encontrar una raíz (r), se divide el polinomio por $(x - r)$ para obtener un polinomio de grado menor.
- **Factorización final:** Repetir el proceso hasta llegar a ecuaciones de primer o segundo grado, cuyas soluciones son directas.

1) Ejercicio Resolver: $x^3 - 7x + 6 = 0$, en este caso usamos el método de Ruffini.

Completamos el polinomio, $x^3 + 0x^2 - 7x + 6 = 0$, buscamos los divisores del término independiente (6), estos son: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$. Construimos la tabla de los coeficientes. $x^3 + 0x^2 - 7x + 6$

1	0	-7	6	x=1
	1	1	-6	x - 1 = 0
1	1	-6	0	x=2
	2	6		x - 2 = 0
1	3	0		x= -3
	-3			x - 3 = 0
1	0			

Solucion: $(x - 1)(x - 2)(x - 3)$

Resolver: $2x^4 + x^3 - 8x^2 - x + 6 = 0$

Resolver: $6x^3 + 7x^2 - 9x + 2 = 0$

Resolver: $x^3 - x^2 - 4 = 0$

<https://www.youtube.com/watch?v=51Miq1OVjTo>

<https://www.youtube.com/watch?v=RGpsEyYxyZU>