

6

LIMITES Y CONTINUIDAD

ADAM SMITH
(1723–1790)

6.1 LIMITE DE UNA FUNCION

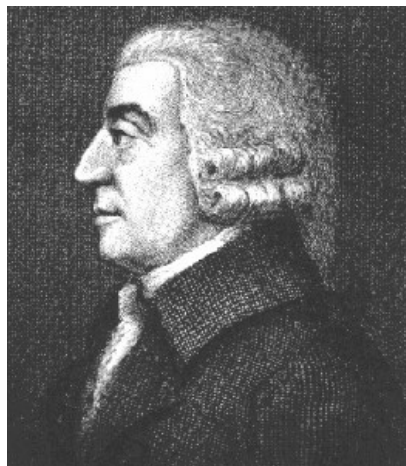
6.2 LIMITES UNILATERALES

6.3 CONTINUIDAD

**6.4 LIMITES INFINITOS, LIMITES EN EL
INFINITO Y ASINTOTAS**

6.5 LOS LIMITES Y EL NUMERO e

6.6 LIMITES TRIGONOMETRICAS

ADAM SMITH**(1723–1790)**

ADAM SMITH, economista y filósofo británico, es considerado el padre de Economía y el primer economista clásico. Nació en Kircaldy, Escocia, el año 1723. Estudió en la Universidad de Glasgow y en la Universidad de Oxford. Fue nombrado profesor de la Universidad de Glasgow en la cátedra de Lógica en 1.751 y en la de Filosofía Moral en 1752. En 1763 viajó a Suiza y Francia, donde permaneció por año y medio. Aquí tuvo contacto con los ideólogos de la Revolución Francesa, como Voltaire (1694–1778), y con los **fisiócratas**, como F. Quesnay y R. J. Turgot. La Fisiocracia fue una doctrina económica surgida en Francia en la segunda mitad del siglo XVIII y que se caracterizó por aplicar el método científico a la Economía. Defendía la política del **laissez-faire** (dejar hacer). Estas ideas fueron de fundamental importancia en la formación de A. Smith. En 1778, fue nombrado Director de Aduana en Edimburgo, donde permaneció hasta su muerte, en 1790

La obra más importante de Adam Smith fue **Investigación sobre la Naturaleza y Causa de la Riqueza de las Naciones** o, simplemente, **La Riqueza de las Naciones**, publicada en 1776. Aquí se sostiene que la competencia privada, libre de regulaciones, distribuye mejor la riqueza que los mercados controlados. El empresario privado, buscando su propio interés, organiza la economía de manera más eficaz, “**como por una mano invisible**”. Las ideas de Adam Smith favorecieron el inicio de la Revolución Industrial. Estas ideas fueron ampliadas por Thomas Malthus (1766–1834), David Ricardo (1772–1823), John Stuart Mill (1806–1873). Ellos cuatro conforman la Escuela Clásica de Economía.

ACONTECIMIENTOS PARALELOS IMPORTANTES

Durante la vida de Adam Smith sucedieron los siguientes acontecimientos importantes: En Francia, se vive la efervescencia de la Revolución Francesa. El 14 de julio de 1789 se toma La Bastilla. El 4 de julio de 1776, Estados Unidos declara su independencia. En Rusia, mueren el zar Pedro el Grande (1725) y su esposa Catalina I (1727). En Venezuela, en 1750 nace en Caracas, el prócer Francisco de Miranda.

SECCION 6.1

LIMITE DE UNA FUNCION

Sobre el concepto de límite descansan los fundamentos del Cálculo. Sin duda que éste es uno de los conceptos más importantes y más delicados de la matemática. Hizo su aparición hace muchos años atrás, en la Grecia antigua. Sin embargo, su formulación rigurosa recién se logró el siglo XIX.

La palabra límite aparece por primera vez en los trabajos del matemático francés **Jean le Rond D'Alembert** (1717–1783), fue él quien dio la idea intuitiva de límite análogo a la que presentamos a continuación. **Augustín Louis Cauchy** (1789–1857), otro matemático francés, en su obra **Cours d'analyse**, publicada en 1821, presentó, en esencia, la idea rigurosa de límite. Esta idea fue perfeccionada, hasta alcanzar su formulación actual, por el matemático alemán **Kart Weierstrass** (1815–1897), en 1850.

¿SABIA UD QUE...

JEAN LE ROND D'ALAMBERT. (1717–1783). Nació en París. Al nacer, su madre lo abandonó en la puerta de la iglesia St. Jean Le Rond. Al niño le dieron el nombre de la iglesia, Jean Le Rond. Años más tarde apareció su padre, un oficial de artillería, quien lo recogió y se encargó de él. Se educó en el Collège de Quatre Nation. Estudió, Teología, Abogacía y Medicina. Ninguna carrera le llamó tanto la atención como la Matemática, la que estudiaba por su cuenta.



En 1741 fue admitido en la Academia de Ciencias de París. En 1774, se unió a Diderot para editar la famosa **Enciclopedia**. D'Alembert tuvo a su cargo los temas sobre Matemáticas, Física y Astronomía

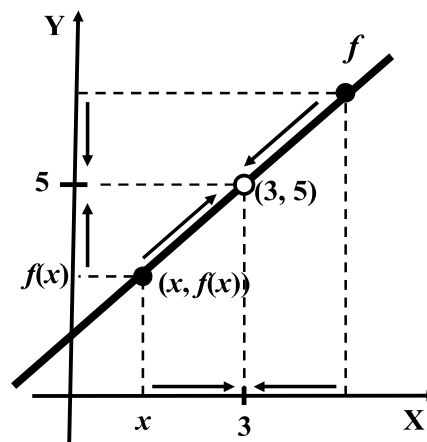
Veamos la idea intuitiva de límite.

Consideremos la siguiente función

$$f(x) = \frac{(x+2)(x-3)}{x-3}, \quad x \neq 3.$$

Esta función está definida para todo real x , excepto para $x = 3$. Además, para $x \neq 3$, podemos simplificar (dividir entre $x - 3$), para obtener:

$$f(x) = x + 2, \quad x \neq 3$$



Aunque la función f no está definida en 3 nos interesamos por los valores que toma $f(x)$ cuando x se aproxima a 3, sin llegar a ser 3. En primer lugar acerquémonos a 3 por la izquierda tomando, por ejemplo, los siguientes valores para x : 2.5, 2.8, 2.9, 2.99, 2.999. Los valores correspondientes para $f(x)$ los tenemos en la siguiente tabla.

$x < 3$	2.5	2.8	2.9	2.99	2.999
$f(x) = x + 2$	4.5	4.8	4.9	4.99	4.999

Ahora acerquémonos a 3 por la derecha, tomando los siguientes valores para x : 3.5, 3.2, 3.1, 3.0, 3.001.

$x > 3$	3.5	3.2	3.1	3.01	3.001
$f(x) = x + 2$	5.5	5.2	5.1	5.01	5.001

Mirando las dos tablas o mirando el gráfico de la función observamos que cuando x se aproxima a 3 por la izquierda y por la derecha, pero sin llegar a ser 3, el valor $f(x)$ de la función se aproxima a 5. Este resultado se expresa diciendo que:

“El límite de $f(x)$ cuando x tiende a 3 es 5”, lo cual se abrevia así:

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$$

y recordando quien es $f(x)$, tenemos: $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+2)(x-3)}{x-3} = 5$

Durante toda la discusión anterior hemos puesto énfasis en que al aproximarse x a 3 no dejamos que x tome el valor de 3, por tanto el valor del límite de $f(x)$ cuando x tiende a 3 depende únicamente de los valores que toma $f(x)$ en los puntos x que están cercanos a 3. Ilustremos esta situación con un ejemplo. Consideremos otra función

$$g(x) = x + 2,$$

la cual está definida en todo x , incluyendo $x = 3$.

Las dos funciones

$$1. f(x) = \frac{(x+2)(x-3)}{x-3} = x + 2, \quad x \neq 3 \qquad 2. g(x) = x + 2$$

son iguales en todo x , excepto en $x = 3$, ya que f no está definida en este punto.

Las dos tablas que hemos construido para $f(x)$ también sirven para $g(x)$, ya que en ellas no hemos considerado el valor $x = 3$, por tanto, también concluimos que

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} (x + 2) = 5$$

Luego ambas funciones tienen el mismo límite cuando x tiende a 3. Es decir, el límite es independiente del valor que la función tome o no tome en $x = 3$.

Guiados para esta discusión presentamos, sin pretensiones de rigor, la definición de límite. Para el lector curioso al final de la sección daremos la definición rigurosa.

DEFINICION. **No rigurosa de Límite.**

Sea f una función que está definida en un intervalo abierto que contiene al punto a excepto, posiblemente en el mismo punto a . Diremos que el **límite de $f(x)$ cuando x tiende a a** es el número L , y escribiremos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

si podemos poner las imágenes $f(x)$ tan cerca de L como queramos, eligiendo valores de x lo suficientemente cerca de a , sin llegar a ser a

TEOREMA 6.1 **Límite de una función constante.**

Sea a cualquier número real y sea la función constante

$$f(x) = k, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a k . Es decir

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} k = k$$

Demostración

Como $f(x) = k$, $\forall x \in \mathbb{R}$, en particular, para los x próximos a a también tendremos que $f(x) = k$. Luego,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} k = k$$

TEOREMA 6.2 **Límite de la función identidad.**

Sea a cualquier número real y sea la función identidad:

$$f(x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

El límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es igual a a . Es decir

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

Demostración

Si x se aproxima a a , obviamente $f(x) = x$ también se aproxima a a . Luego,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a$$

LEYES DE LOS LIMITES

Un resultado fundamental en la teoría de los límites nos dice que el límite respeta las operaciones elementales del álgebra. Es decir, el límite de una suma, diferencia, producto, cociente, etc. de funciones es igual a la suma, diferencia, producto, cociente de los límites. Este resultado, por ser de gran importancia, lo enunciamos en forma precisa en el siguiente teorema, cuya demostración la omitimos, por no estar a nuestro alcance.

TEOREMA 6.3 Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = G$, entonces

1. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L \pm G$
2. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = LG$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L}{G}$, $G \neq 0$
4. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^n = L^n$, n es natural.
5. $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$, donde $f(x) > 0$ y $L > 0$ si n es par.

Los ejemplos siguientes nos ilustran la fuerza de este teorema.

EJEMPLO 1. Sea n un natural y b una constante real. Probar que

$$1. \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n \qquad 2. \lim_{x \rightarrow a} (bx^n) = ba^n$$

Solución

1. Por la parte 4 del teorema anterior y por el teorema 6.2 tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow a} x^n = \left[\lim_{x \rightarrow a} x \right]^n = a^n$$

2. Por la parte 2 del teorema anterior, por el teorema 6.1 y por la parte 1 de este ejemplo, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow a} [bx^n] = \left[\lim_{x \rightarrow a} b \right] \left[\lim_{x \rightarrow a} x^n \right] = [b][a^n] = ba^n$$

EJEMPLO 2. Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5x^3}$

Solución

Aplicando la parte 4 del teorema 6.3 y la parte 2 del ejemplo anterior, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{5x^3} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 2} 5x^3} = \sqrt{5(2)^3} = \sqrt{40} = \sqrt{4 \times 10} = 2\sqrt{10}$$

El siguiente teorema nos da la manera de calcular el límite de un polinomio.

TEOREMA 6.4 **Límite de un polinomio.**

Si $p(x)$ es un polinomio, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$$

Es decir, si $p(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} (b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0) = b_n a^n + \dots + b_1 a + b_0$$

Demostración

Aplicando la parte 1 del teorema anterior y la parte 2 del ejemplo 1, tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} (b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0) &= \lim_{x \rightarrow a} b_n x^n + \dots + \lim_{x \rightarrow a} b_1 x + \lim_{x \rightarrow a} b_0 \\ &= b_n a^n + \dots + b_1 a + b_0 \end{aligned}$$

EJEMPLO 3. Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} (4x^3 - 7x^2 + 5x - 1)$

Solución

Aplicando el teorema anterior tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (4x^3 - 7x^2 + 5x - 1) = 4(2)^3 - 7(2)^2 + 5(2) - 1 = 32 - 28 + 10 - 1 = 13$$

EJEMPLO 4. Calcular $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{8x^2 - 4x + 2}{x^3 + 5}$

Solución

Aplicando la parte 3 del teorema 6.3 y el teorema 6.4, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{8x^2 - 4x + 2}{x^3 + 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (8x^2 - 4x + 2)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 + 5)} = \frac{8(-1)^2 - 4(-1) + 2}{(-1)^3 + 5} = \frac{14}{4} = \frac{7}{2}$$

Este ejemplo puede ser generalizado para encontrar el límite de una función racional.

EJEMPLO 5. Sea $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ una función racional. Si $q(a) \neq 0$, probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a)$$

Solución

Aplicando la parte 3 del teorema 6.2 y el teorema 6.4, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} p(x)}{\lim_{x \rightarrow a} q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a)$$

FORMA INDETERMINADA $\frac{0}{0}$

Supongamos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, y busquemos $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$

Aquí, la ley del cociente (parte 3 del teorema 6.3) no es aplicable. La sustitución directa nos lleva a la expresión $0/0$, la cual no nos da la información sobre la existencia o no del límite y de la manera de encontrarlo. Por tal razón se dice que este límite es un límite indeterminado de la forma $0/0$ o que el límite es de la forma indeterminada $0/0$. La indeterminación se salva recurriendo a métodos geométricos o algebraicos como simplificación, racionalización.

EJEMPLO 6. Hallar $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4}$

Solución

Observemos que el límite del denominador y también del numerador es 0. Es decir, es un caso $\frac{0}{0}$. Siendo así, la parte 3 del teorema 6.1 no nos ayuda en nada. Debemos

buscar otra manera de proceder. Para esto observemos que al numerador lo podemos factorizar, lo que nos permitirá simplificar el cociente. En efecto:

$$\frac{x^2 - 16}{x - 4} = \frac{(x + 4)(x - 4)}{x - 4} = x + 4, \text{ para } x \neq 4$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 4 + 4 = 8$$

EJEMPLO 7. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x}$

Solución

Aquí también tenemos un caso 0/0. Cuando se presenta esta situación con funciones en las que aparecen radicales, se busca transformar la función utilizando la conjugada. En el caso presente, multiplicamos numerador y denominador por $\sqrt{x+1} + 1$, que es la conjugada de $\sqrt{x+1} - 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \frac{(x+1) - 1^2}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} \end{aligned}$$

Luego,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{0+1} + 1} = \frac{1}{2}$$

Finalmente, terminamos esta sección cumpliendo con nuestra promesa de presentar la definición rigurosa de límite.

DEFINICION. **Rigurosa de límite.**

Sea f una función definida en un intervalo abierto que contiene a a , excepto posiblemente en el mismo punto a . Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a es el número L , si para **cualquier** $\varepsilon > 0$, **existe un** $\delta > 0$ tal que

$$\text{Si } 0 < |x - a| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

Los símbolos ε y δ corresponden a las letras **épsilon** y **delta** del alfabeto griego.

PROBLEMAS RESUELTOS 6.1

PROBLEMA 1. Hallar $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$

Solución

Este es un caso $\frac{0}{0}$. Salvamos la dificultad factorizando. Para $x \neq 5$ tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+3)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x+3) = 5+3 = 8$$

PROBLEMA 2. Hallar $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2}$

Solución

Este es un caso $\frac{0}{0}$. Pero, para $x \neq -2$ tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x + 2} &= \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 2^3}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 2x + 4) = (-2)^2 - 2(-2) + 4 = 12 \end{aligned}$$

PROBLEMA 3. Hallar $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+4} - 2}$

Solución

Este es un caso $\frac{0}{0}$. Como tenemos radicales tanto en el numerador como en el denominador, multiplicamos y dividimos por las conjugadas del numerador y del denominador:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+4} - 2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)(\sqrt{x+4} + 2)}{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1-1)(\sqrt{x+4} + 2)}{(x+4-4)(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{\sqrt{0+4} + 2}{\sqrt{0+1} + 1} = \frac{2+2}{1+1} = \frac{4}{2} = 2 \end{aligned}$$

PROBLEMA 4. Hallar $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^3-64}$

Solución

Este es un caso $0/0$. Multiplicamos y dividimos por la conjugada del numerador y factorizamos el denominador:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x^3-64} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(x-4)(x^2+4x+16)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{(\sqrt{x}+2)(x-4)(x^2+4x+16)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{(\sqrt{x}+2)(x^2+4x+16)} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{4}+2)(4^2+4(4)+16)} = \frac{1}{192} \end{aligned}$$

PROBLEMA 5. Si $f(x) = x^3$, probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 3x^2 \quad \text{ó sea} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = 3x^2$$

Solución

Para $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2 + 3x(0) + (0)^2 = 3x^2 \end{aligned}$$

Generalicemos el problema anterior tomando, en lugar del exponente 3, un número natural cualquiera.

PROBLEMA 6. Si n es un número natural, probar que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1}$$

Solución

Sabemos por el binomio de Newton que

$$(x+h)^n = x^n + \frac{n}{1!}x^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n$$

Luego para $h \neq 0$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h^2 + \dots + nxh^{n-1} + h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}h + \dots + nxh^{n-2} + h^{n-1} \right) \\ &= nx^{n-1} + 0 + \dots + 0 = nx^{n-1} \end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 6.1

Hallar los siguientes límites:

1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6}{x^2 - 3}$
2. $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{y^2 - 2y + 2}{y - 4} + 1 \right)$
3. $\lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} \frac{x^2 - 2}{x^4 + x + 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{2x^2 + 2}{8x^2 + 1}}$
5. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$
6. $\lim_{y \rightarrow -5} \frac{y^2 - 25}{y + 5}$
7. $\lim_{h \rightarrow 2} \frac{h - 2}{h^2 - 4}$
8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$
9. $\lim_{y \rightarrow -3} \frac{y^3 + 27}{y + 3}$
10. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 4x - 32}{x - 4}$
11. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x - 3}{x + 1}$
12. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\frac{1}{x+1} + 1}{x + 2}$
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$
14. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt{y+3} - \sqrt{3}}{y}$
15. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$
16. $\lim_{y \rightarrow 5} \frac{\sqrt{y-1} - 2}{y - 5}$
17. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+h^2} - 1}{h}$
18. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$
19. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 16}$
20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^3 - 1}$
21. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^3 - 729}{\sqrt{x} - 3}$

22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3}-2}{\sqrt{2-x}-1}$ 23. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+x-2}{x^3+3x^2+5x+3}$ 24. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^3+5x+2}{x^2-1}$
25. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-3x+2}$ 26. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2}$ 27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$
28. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{2}}{x-4}$ 29. $\lim_{y \rightarrow 1} \sqrt{\frac{y^2-1}{y^3-y}}$ 30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^{1/2}-3^{1/2}}{x}$
31. Si $f(x) = mx + b$, probar que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = m$
32. Si $g(x) = ax^2 + bx + c$, probar que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = 2ax + b$
33. Si $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, probar que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = -\frac{1}{x^2}$
34. Si $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, probar que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

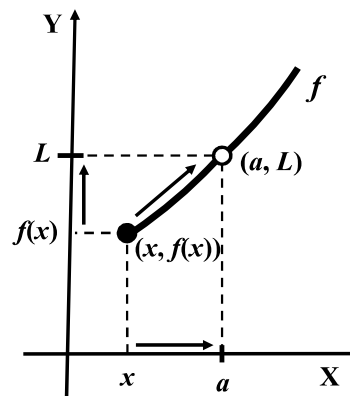
SECCION 6.2

LÍMITES UNILATERALES

En la sección anterior, para hallar el límite de una función en un punto a , nos aproximamos a a por ambos lados, por la izquierda y por la derecha. Ahora vamos a aproximarnos a a sólo por un lado, ya sea sólo por la izquierda o ya sea sólo por la derecha. Obtenemos, de este modo, dos tipos de límites: **Límite por la izquierda** y **límite por la derecha**. A estos dos límites los llamaremos **límites unilaterales**.

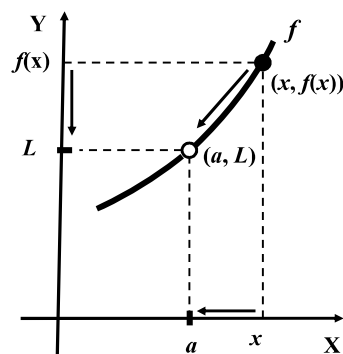
DEFINICION. Sea f una función que está definida en un intervalo abierto de la forma (b, a) . Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a **por la izquierda** es el número L si $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a a , siendo $x < a$. En este caso escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$



DEFINICION. Sea f una función que está definida en un intervalo abierto de la forma (a, c) . Diremos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a a **por la derecha** es el número L si $f(x)$ se aproxima a L cuando x se aproxima a a , siendo $x > a$. En este caso escribiremos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$



Observar que en ambos límites unilaterales no estamos asumiendo que la función f ésta definida en el punto a . La función puede o no estar definida en a , sin que esto afecte al límite.

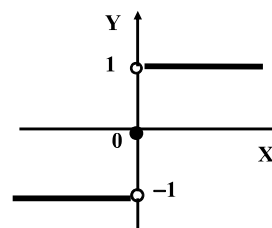
Los teoremas 6.1 y 6.2 también se cumplen para los límites unilaterales.

EJEMPLO 1. Sea la función $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Hallar:

a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$



Solución

a. Para hallar el límite por la izquierda, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, debemos aproximar x a 0 por la izquierda, es decir con $x < 0$. Pero para $x < 0$, tenemos que $f(x) = -1$. Luego

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1$$

b. Para hallar el límite por la derecha, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, debemos aproximar x a 0 por la derecha, es decir $x > 0$. Pero para $x > 0$, tenemos que $f(x) = 1$. Luego

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1$$

Es evidente que si el límite de una función es el número L , entonces, ambos límites unilaterales también serán iguales a L . Recíprocamente, si ambos límites son iguales a un mismo número L , entonces el límite de la función también es L . Este resultado es muy importante y lo asumimos en la siguiente proposición.

TEOREMA 6.5 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe y es L si y sólo si existen $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ y ambos son iguales a L .

EJEMPLO 2. Sea la función $f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Probar que esta función no tiene límite en 0. Es decir, no existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Solución

En el ejemplo anterior encontramos que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$ y $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$. Como estos límites unilaterales son distintos, concluimos, aplicando la proposición anterior, que no existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

EJEMPLO 3. Sea la función $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & \text{si } x < 3 \\ 4, & \text{si } x = 3 \\ -x + 8, & \text{si } x > 3 \end{cases}$

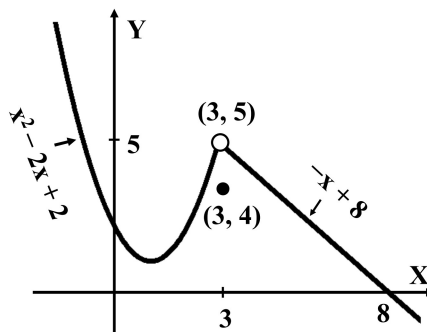
Determinar si existe o no $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$.

Solución

Halleemos los límites unilaterales:

$$\begin{aligned} 1. \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 2x + 2) \\ &= 3^2 - 2(3) + 2 = 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x + 8) \\ &= -(3) + 8 = 5 \end{aligned}$$



Como los límites unilaterales son ambos iguales a 5, concluimos que existe $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ y que $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 5$.

EJEMPLO 4. Sea la función $f(x) = \begin{cases} -4, & \text{si } x < -2 \\ \frac{x^3}{2}, & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x-1, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Determinar si existe:

a. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Solución

a. Calculemos los límites unilaterales en -2 :

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (-4) = -4$$

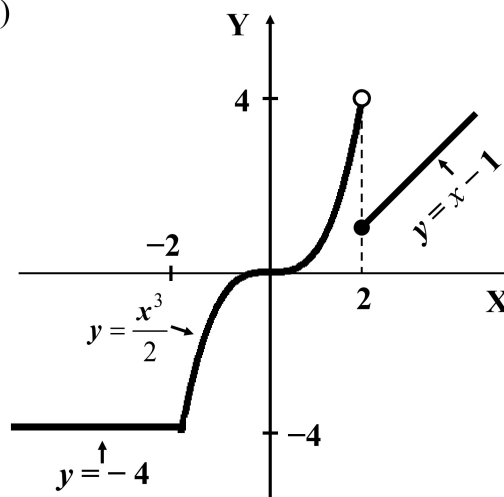
$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3}{2} = \frac{(-2)^3}{2} = -4$$

En vista de que ambos límites unilaterales son iguales a -4 , concluimos que existe $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ y que es igual a -4 .

b. Calculemos los límites unilaterales en 2 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3}{2} = \frac{2^3}{2} = 4 \quad \quad \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-1) = 2-1 = 1$$

Como los límites son distintos, concluimos que no existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.



PROBLEMAS PROPUESTOS 6.2

En los problemas del 1 al 4, trazar el gráfico de la función y hallar los límites indicado.

1. $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } x < 1 \\ -1, & \text{si } x = 1 \\ 3, & \text{si } x > 1 \end{cases}$ a. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

2. $g(x) = \begin{cases} x+2, & \text{si } x < 0 \\ x-2, & \text{si } x > 0 \end{cases}$ a. $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x)$ b. $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ c. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

$$3. h(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2+1, & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{a. } \lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow 2} h(x)$$

$$4. f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{si } x \leq 2 \\ x^2+4, & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{a. } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$5. \text{ Sea } f(x) = \begin{cases} 2x+1, & \text{si } x < 3 \\ -x+k, & \text{si } x \geq 3 \end{cases}. \text{ Hallar el valor de } k \text{ para que exista } \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$6. \text{ Sea } f(x) = \begin{cases} x^2+k, & \text{si } x \geq -2 \\ kx-5, & \text{si } x < -2 \end{cases}. \text{ Hallar el valor de } k \text{ para que exista } \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$$7. \text{ Sea } f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x < 1 \\ ax+b, & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ x-9, & \text{si } x > 4 \end{cases}. \text{ Hallar los valores de } a \text{ y de } b \text{ sabiendo que existen } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow 4} f(x).$$

$$8. \text{ Sea } g(x) = \frac{|x|}{x}. \text{ Hallar } \quad \text{a. } \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow 0} g(x)$$

$$9. \text{ Sea } f(x) = \lfloor x \rfloor. \text{ Si } n \text{ es un entero, hallar}$$

$$\text{a. } \lim_{x \rightarrow n^-} f(x) \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow n^+} f(x) \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow n} f(x)$$

SECCION 6.3

CONTINUIDAD

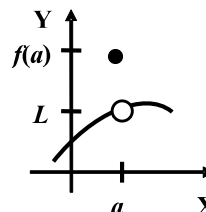
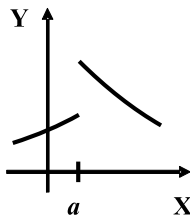
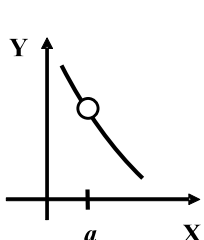
Esta sección se la dedicamos a estudiar el concepto de función continua. Geométricamente este concepto es fácil de explicar. Una función es continua si su gráfico puede ser trazado sin levantar el lápiz del papel. Comenzamos definiendo continuidad en un punto.

DEFINICION. Una función f es **continua en el punto a** si se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. f está definida en a .
2. Existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Una función f es **discontinua en el punto a** si alguna de estas tres condiciones anteriores no se cumple. Esto es, si

1. f no está definida en a 2. No existe límite en a 3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$



Si existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y f es discontinua en a diremos que la **discontinuidad es removible**. La llamamos así debido a que se puede redefinir a f en a de modo que la discontinuidad es eliminada. La redefinición es la siguiente

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

Si no existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ la **discontinuidad es esencial**, ya que en este caso no hay modo de eliminar la discontinuidad.

EJEMPLO 1. Probar que un polinomio $p(x)$ es continuo en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$

Solución

$p(x)$ está definido en cualquier punto $a \in \mathbb{R}$. Además, por el teorema 6.4, sabemos que existe $\lim_{x \rightarrow a} p(x)$ y que $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$.

Habiéndose satisfecho las tres condiciones de la definición, concluimos que todo polinomio $p(x)$ es continuo en cualquier punto a .

EJEMPLO 2. Probar que toda función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es continua en

cualquier punto $a \in \mathbb{R}$ tal que $q(a) \neq 0$.

Solución

En cualquier punto a donde $q(a) \neq 0$, tenemos que $f(a) = \frac{p(a)}{q(a)}$; o sea que f está definida en a . Además, por el ejemplo 5 de la sección 6.1, sabemos que existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)} = f(a)$

Habiéndose satisfecho las tres condiciones de la definición, concluimos que toda función racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ es continua en cualquier punto a tal que $q(a) \neq 0$.

EJEMPLO 3. Probar que la función $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3}, & \text{si } x \neq 3 \\ 6, & \text{si } x = 3 \end{cases}$

es continua en el punto 3.

Solución

1. g está definida en 3, ya que $g(3) = 6$

2. Existe $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$. En efecto:

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x+3) = 6$$

3. $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 6 = g(3)$

Habiéndose cumplido las tres condiciones de la definición, concluimos que g es continua en 3.

EJEMPLO 4. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-16}{x-4}, & \text{si } x \neq 4 \\ 6, & \text{si } x = 4 \end{cases}$

a. Mostrar que esta función tiene una discontinuidad removible en el punto $a = 4$.

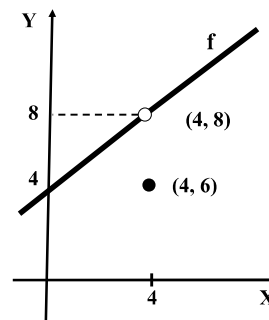
b. Redefinir $f(4)$ para que f sea continua en $x = 4$. Esto es, remover la discontinuidad.

Solución

a. Para $x \neq 4$, la gráfica de f es la recta $y = x + 4$. En efecto:

$$f(x) = \frac{x^2-16}{x-4} = \frac{(x-4)(x+4)}{x-4} = x+4$$

Mirando el gráfico de la función podemos afirmar que ésta es discontinua en $a = 4$, ya que el gráfico de la función se interrumpe en el punto $(4, 8)$.



Comprobemos esta afirmación descubriendo cual de las tres condiciones de la definición deja de cumplirse.

La función está definida en $a = 4$, ya que $f(4) = 6$. Luego, la primera condición se cumple.

Por el ejemplo 6 de la sección 6.1, sabemos que existe el límite en $x = 4$ y que

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-16}{x-4} = 8$$

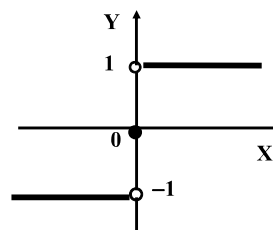
Luego, la segunda condición también se cumple.

Pero, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 8 \neq f(4) = 6$. O sea $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \neq f(4)$. Luego, la tercera condición no se cumple. En consecuencia f no es continua en $a = 4$ y esta es una discontinuidad removible.

b. Establecemos que $f(4) = 6$.

EJEMPLO 5. Probar que la siguiente función es tiene una discontinuidad esencial en 0.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$



Solución

Por el ejemplo 2 de la sección anterior sabemos que esta función no tiene límite en $x = 0$. Luego, f tiene una discontinuidad esencial en 0.

DEFINICION. Una función f es continua si f es continua en todos los puntos de su dominio

EJEMPLO 6. Son funciones continuas: **a.** Los polinomios **b.** Las funciones racionales.

Estos resultados vienen de los ejemplos 1 y 2.

El siguiente teorema, cuya demostración omitimos, nos dice el límite de una función continua puede introducirse dentro de la función.

TEOREMA 6.6 Teorema de sustitución.

Si $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = L$ y f es continua en L , entonces

$$\lim_{t \rightarrow b} f(g(t)) = f(L) = f\left(\lim_{t \rightarrow b} g(t)\right)$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 6.3

1. Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & \text{si } x \neq 2 \\ 4, & \text{si } x = 2 \end{cases}$

- a. Probar que f es continua en el punto 2.
b. Probar que f es continua en todo su dominio.

2. Sea la función $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$

- a. Probar que g tiene una discontinuidad removible en $x = 0$.
b. Redefinir $g(0)$ para remover la discontinuidad.

3. Sea la función $g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & \text{si } x < 3 \\ 4, & \text{si } x = 3 \\ -x + 8, & \text{si } x > 3 \end{cases}$

- a. Probar que g tiene una discontinuidad removible en $x = 3$.
b. Probar que 3 es el único punto de discontinuidad de g .
c. Redefinir $g(3)$ para remover la discontinuidad.

En los problemas del 4 al 11, hallar los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

4. $f(x) = \frac{1}{x}$

5. $g(x) = \frac{1}{x+2}$

6. $h(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$

7. $f(x) = \frac{x-1}{x-5}$

8. $g(x) = \frac{x+2}{x^2 + 5x - 24}$

9. $h(x) = \frac{x+3}{\sqrt{x-2}}$

10. $f(x) = \frac{x^2 - 9}{|x - 3|}$

11. $g(x) = \frac{|x-1|}{(x-1)^3}$

En los problemas del 12 al 15, graficar las siguientes funciones y localizar, mirando el gráfico, los puntos de discontinuidad de cada una.

12. $f(x) = \begin{cases} -2, & \text{si } x < 3 \\ 1, & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 4, & \text{si } x \geq 5 \end{cases}$

13. $g(x) = \begin{cases} 3x+1, & \text{si } x < -2 \\ 2x-1, & \text{si } -2 \leq x < 4 \\ -\frac{x}{2}+2, & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$