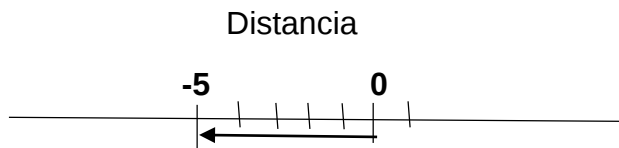


TEMA 14

VALOR ABSOLUTO

El valor absoluto (o módulo) de un número real es su magnitud numérica sin tener en cuenta su signo, representándose siempre como un número positivo o cero. $|x|$ representa la distancia entre un número (x) y el cero en la recta.

Ejemplo, $|-5| = 5$, la distancia desde cero a -5 es 5 unidades.



Valor absoluto de un número real

$$|x| = \begin{cases} 0, & \text{si } x \text{ es igual a } 0 \\ x, & \text{si } x \text{ es mayor que } 0 \\ -x, & \text{si } x \text{ es menor que } 0 \end{cases}$$

Ejemplo.

$$|15| = 15, \text{ ya que } 15 > 0$$

$$|-15| = -(-15) = 15, \text{ ya que } -15 < 0$$

PROPIEDADES DEL VALOR ABSOLUTO

- 1) El valor absoluto de un número es siempre no negativo: $|x| \geq 0$
- 2) El valor absoluto de un número x es 0 si, y sólo si, $x=0$:
- 3) El valor absoluto de un producto es el producto de los valores absolutos de sus factores: $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
- 4) El valor absoluto de un cociente es el cociente de los valores absolutos de sus factores: $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$
- 5) Valor absoluto del opuesto: $|-x| = |x|$
- 6) Desigualdad triangular (valor absoluto de la suma):
 $|x + y| \leq |x| + |y|$
- 7) El valor absoluto de una potencia es la potencia del valor absoluto: $|a^n| = |a|^n$

Ejercicio:

- 1) $|25| =$
- 2) $|-12 + 4| =$
- 3) $|-4 - 6 - 5| =$
- 4) $|-6| + |-3 - 7| =$
- 5) $||4 - 2| - |-3 - 4 + 2|| =$

Ecuaciones con valor absoluto

Las ecuaciones con valor absoluto, como $|x| = a$, expresan que la distancia de una expresión al cero es constante, resultando en dos casos: $x = a$ ó $x = -a$. Para resolverlas, aíse el término del valor absoluto, iguale la expresión interna a la positiva y negativa de la constante, y verifique las soluciones.

Pasos para Resolver una ecuación con valor absoluto

1. **Aislar el valor absoluto:** Asegúrese de que el término $|x|$ esté solo en un lado de la ecuación (por ejemplo, en $|3x - 6| + 3 = 9$, despejamos $|3x - 6| = 6$).
2. **Verificar la constante:** Si el valor absoluto se iguala a un número negativo, no hay solución real (ej. $|x| = -6$, no tiene solución).
3. **Eliminar las barras:** Plantee dos ecuaciones:
 1. $x = a$
 2. $x = -a$
4. **Resolver:** Resuelva las dos ecuaciones lineales resultantes.
5. **Verificar:** Compruebe las soluciones en la ecuación original

1. Ejemplo: $|x + 2| = 4$

Caso 1 : $x + 2 = 4 \Rightarrow x = 4 - 2 \Rightarrow x = 2$

Caso 2 : $x + 2 = -4 \Rightarrow x = -4 - 2 \Rightarrow x = -6$

Solución. $x \in (2, -6)$

2. Ejemplo: $|2x - 2| = |x + 4|$, aislamos el valor absoluto, dividimos toda expresión por $|x + 4|$.

$$\frac{|2x-2|}{|x+4|} = \frac{|x+4|}{|x+4|} \Rightarrow \frac{|2x-2|}{|x+4|} = 1 \Rightarrow \left| \frac{2x-2}{x+4} \right| = 1$$

Eliminamos las barras y planteamos dos ecuaciones:

Caso 1) $\frac{2x-2}{x+4} = 1 \Rightarrow 2x - 2 = x + 4 \Rightarrow 2x - x = 4 + 2, \Rightarrow x = 6$

Caso 2) $\frac{2x-2}{x+4} = -1 \Rightarrow 2x - 2 = -(x + 4) \Rightarrow 2x - 2 = -x - 4 \Rightarrow 2x + x = -4 + 2$

$3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ **Solución.** $x \in (6, -\frac{2}{3})$

3) Resolver: $|x^2 - 2x - 10| = 5$

Caso 1) $x^2 - 2x - 10 = 5, \Rightarrow x^2 - 2x - 10 - 5 = 0, x^2 - 2x - 15 = 0$ factorizamos, $(x - 5)(x + 3) = 0, x - 5 = 0, x = 5; x + 3 = 0, x = -3$

Caso 2) $x^2 - 2x - 10 = -5, x^2 - 2x - 10 + 5 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x - 5 = 0$, resolvemos la ecuación completando a cuadrado o por la ecuación general.

$x^2 - 2x - 5 = 0, x^2 - 2x = 5$, completando al cuadrado $\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 1$

$$x^2 - 2x + 1 = 5 + 1, x^2 - 2x + 1 = 6 \Rightarrow (x - 1)^2 = 6, \Rightarrow \sqrt{(x - 1)^2} = \sqrt{6}$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{6} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{6}. \quad \mathbf{X_1 = 1 + \sqrt{6}, X_2 = 1 - \sqrt{6}}$$

Solución: $\mathbf{X \in (-3, 5, 1 + \sqrt{6}, 1 - \sqrt{6})}$

Ejemplo: **Resolver $|x - 4| = 5$**

1) $x - 4 = 5$; $x = 5 + 4$, $\mathbf{x = 9}$, si $x = 9$; $|x - 4| = 5$; $|9 - 4| = 5$; $\mathbf{|5| = 5}$

2) $x - 4 = -5$; $x = -5 + 4$; $\mathbf{x = -1}$; si $x = -1$; $|x - 4| = 5$; $|-1 - 4| = 5$; $\mathbf{|-5| = 5}$

2) Resolver: $|2x + 4| = 8$

1) $2x + 4 = 8$; $2x = 8 - 4$; $2x = 4$; $x = \frac{4}{2} = 2$; $\mathbf{x = 2}$

Para $x = 2$; $|2x + 4| = 8$; $|2 \cdot 2 + 4| = 8$; $|4 + 4| = 8$; $\mathbf{|8| = 8}$

2) $2x + 4 = -8$; $2x = -8 - 4$; $2x = -12$; $x = \frac{-12}{2} = -6$; $\mathbf{x = -6}$

Para $x = -6$; $|2x + 4| = 8$; $|2(-6) + 4| = 8$; $|-12 + 4| = 8$; $\mathbf{|-8| = 8}$

3) Resolver: $|x + 2| = |2x - 5|$

$$|x + 2| = |2x - 5| ; \frac{|x+2|}{|2x-5|} = 1 ; \left| \frac{x+2}{2x-5} \right| = 1$$

1) $\frac{x+2}{2x-5} = 1$; $x + 2 = 2x - 5$; $x - 2x = -5 - 2$; $-x = -7$; $\mathbf{x = 7}$

2) $\frac{x+2}{2x-5} = -1$; $x + 2 = -(2x - 5)$; $x + 2 = -2x + 5$; $3x = 5 - 2$; $3x = 3$; $\mathbf{x = 1}$

Con estos valores de (x) , sustituyen en la ecuación y se verifica cuál de ellos cumple con la igualdad, siendo ese valor de (x) la solución. En este caso $x = 7$ y $x = 1$ son solución.

4) Resolver : $3 + 2|x - 2| = 7$

En este caso despejamos $|x - 2|$,

$$3 + 2|x - 2| = 7; 2|x - 2| = 7 - 3 ; |x - 2| = \frac{7-3}{2} ; |x - 2| = \frac{4}{2} ; \mathbf{|x - 2| = 2}$$

1) $x - 2 = 2$; $x = 2 + 2$; $\mathbf{x = 4}$

2) $x - 2 = -2$; $x = -2 + 2$; $\mathbf{x = 0}$

5) $10|x + 8| - 13 = -2|x + 8| + 11$

En este caso despejamos : $|x + 8|$

$$10|x + 8| + 2|x + 8| = 11 + 13; 12|x + 8| = 24 : |x + 8| = \frac{24}{12} = 2$$

1) $x + 8 = 2 : x = 2 - 8 ; x = -6$

2) $x + 8 = -2 ; x = -2 - 8 ; x = -10$ solución: $x = -6$ y $x = -10$

6) $||5 - 2x| - 4| = 10$, desglosamos la ecuación :

1) $|5 - 2x| - 4 = 10$

2) $|5 - 2x| - 4 = -10$

Resolvemos 1) : $|5 - 2x| - 4 = 10 ; : |5 - 2x| = 10 + 4 ; |5 - 2x| = 14$

a) $5 - 2x = 14 ; 5 - 14 = 2x ; -9 = 2x ; x = \frac{-9}{2}$

b) $5 - 2x = -14 ; 5 + 14 = 2x ; 19 = 2x ; x = \frac{19}{2}$

Resolvemos 2) $|5 - 2x| - 4 = -10 ; |5 - 2x| = -10 + 4 ; |5 - 2x| = -6$,
no tiene solución, un valor absoluto nunca puede ser negativo.

solución: $x = \frac{-9}{2}$ y $x = \frac{19}{2}$

7) Resolver: $|x + 1| + |2x - 3| = 5$, en este caso se verifican 4 posibilidades de solución:

1) $(x + 1) + (2x - 3) = 5$

2) $-(x + 1) + (2x - 3) = 5$

3) $(x + 1) - (2x - 3) = 5$

4) $-(x + 1) - (2x - 3) = 5$

Se resuelve cada una de las ecuaciones.

1) $(x + 1) + (2x - 3) = 5 ; x + 1 + 2x - 3 = 5 ; 3x - 2 = 5 ; 3x = 5 + 2,$
 $3x = 7 ; x = \frac{7}{3}$

2) $-(x + 1) + (2x - 3) = 5 ; -x - 1 + 2x - 3 = 5 ; x - 4 = 5 ; x = 5 + 4 ; x = 9$

3) $(x + 1) - (2x - 3) = 5 ; x + 1 - 2x + 3 = 5, -x + 4 = 5 ; -x = 5 - 4 ;$
 $-x = 1 ; x = -1$

4) $-(x + 1) - (2x - 3) = 5 ; -x - 1 - 2x + 3 = 5 ; -3x + 2 = 5 ; -3x = 5 - 2 ;$
 $-3x = 3 ; x = \frac{3}{-3} ; x = -1$, se sustituyen los valores encontrados en la ecuación original para verificar cuál de ellos es solución.

5) : $|x + 1| + |2x - 3| = 5 ; x = \frac{7}{3}$, solución

1) $|\frac{7}{3} + 1| + |2(\frac{7}{3}) - 3| = 5 ; |\frac{7+3}{3}| + |\frac{14}{3} - 3| = 5 ; |\frac{10}{3}| + |\frac{5}{3}| = 5 ; \frac{15}{3} = 5$

2) $|x + 1| + |2x - 3| = 5$, si $x = 9$; no es solución

$|9 + 1| + |2(9) - 3| = 5 ; |10| + |15| = 5 ; 10 + 15 = 5 ; 25 \neq 5$

3) $|x + 1| + |2x - 3| = 5$, si $x = -1$; solución

$|-1 + 1| + |2(-1) - 3| = 5, |0| + |-2-3| = 5, |0| + |-5| = 5, |-5| = 5$

4) $x = -1$ se repite

Ejercicios propuestos Resolver:

1) $|2x - 5| = 3$

2) $|5x - 4| = 3x - 2$

3) $|x + 4| = x + 1$

4) $|x + 1| = |x - 5|$

5) $|x - 1| + |x - 3| = 4$

6) $|x^2 + 2x - 4| = 4$

https://www.youtube.com/watch?v=_5wHe9azfSs

<https://www.youtube.com/watch?v=53roSKxo974>

<https://www.youtube.com/watch?v=Lw5W84TczZE>

<https://www.youtube.com/watch?v=FRc6aSQzle8&t=321s>