

Aplicaciones de las Derivadas

Principales temas, conceptos fundamentales y ejercicios resueltos paso a paso

Las aplicaciones de las derivadas constituyen una de las herramientas más potentes del cálculo, permitiendo modelar y resolver problemas del mundo real relacionados con tasas de cambio, optimización y geometría analítica.

Principales Temas de Aplicación

- **Recta tangente y normal:** La derivada en un punto representa la pendiente de la recta tangente a una curva en dicho punto. La recta normal es perpendicular a esta.
- **Razones de cambio relacionadas:** Estudio de cómo la variación de una magnitud afecta a otra en función del tiempo (por ejemplo, cómo cambia el área de un círculo al crecer su radio).
- **Monotonía (Crecimiento y decrecimiento):** Determinación de los intervalos en los que una función aumenta o disminuye utilizando el signo de su primera derivada ($f'(x)$).
- **Extremos relativos (Máximos y mínimos):** Localización de cumbres y valles en una gráfica mediante los puntos críticos donde $f'(x) = 0$ o no existe.
- **Concavidad y puntos de inflexión:** Estudio de la curvatura de una función y los puntos donde cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo (o viceversa) usando la segunda derivada ($f''(x)$).
- **Optimización:** Resolución de problemas prácticos para encontrar el valor máximo o mínimo de una función bajo ciertas restricciones (minimizar costos, maximizar áreas o volúmenes).

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1: Ecuación de la recta tangente

Problema: Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^3 - 3x + 2$ en el punto donde $x = 2$.

Solución paso a paso:

1. **Encontrar la coordenada y del punto de tangencia:** Evaluamos $f(2)$ en la función original:

$$f(2) = (2)^3 - 3(2) + 2 = 8 - 6 + 2 = 4.$$

El punto de tangencia es $P(2, 4)$.

2. **Calcular la derivada de la función:**

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

3. **Hallar la pendiente (m) evaluando la derivada en $x = 2$:**

$$m = f'(2) = 3(2)^2 - 3 = 3(4) - 3 = 9$$

4. **Aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta:**

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 9(x - 2)$$

$$y - 4 = 9x - 18 \implies y = 9x - 14$$

Respuesta: La ecuación de la recta tangente es $y = 9x - 14$.

Ejercicio 2: Problema de optimización

Problema: Se disponen de 40 metros de cerca para construir un jardín rectangular aprovechando una pared larga ya existente como uno de sus lados. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima?

Solución paso a paso:

1. Plantear las variables y la función objetivo:

Sea x el ancho del rectángulo (los dos lados perpendiculares a la pared) y y el largo (el lado paralelo a la pared).

El perímetro disponible para los tres lados cercados es: $2x + y = 40 \implies y = 40 - 2x$.

El área del rectángulo es $A = x \cdot y$. Sustituyendo y :

$$A(x) = x(40 - 2x) = 40x - 2x^2$$

2. Encontrar los puntos críticos derivando la función de área:

$$A'(x) = 40 - 4x$$

Igualemos la derivada a cero:

$$40 - 4x = 0 \implies 4x = 40 \implies x = 10$$

3. Comprobar que es un máximo (Criterio de la segunda derivada):

Calculamos la segunda derivada: $A''(x) = -4$.

Como $A''(10) = -4 < 0$, la función es cóncava hacia abajo, confirmando que $x = 10$ es un **máximo absoluto**.

4. Calcular la otra dimensión:

$$y = 40 - 2(10) = 40 - 20 = 20$$

Respuesta: Las dimensiones óptimas para maximizar el área son 10 metros de ancho por 20 metros de largo, obteniendo un área máxima de 200 m².