

Análisis de Funciones mediante Derivadas

Valores extremos, monotonía, concavidad y graficación de curvas

Institución: IUTepi | Facilitador(a): Licda. Sol Aguilar | Asignatura: Matemáticas / Cálculo

1. Valores Extremos de una Función Continua

En el estudio del cálculo diferencial, uno de los objetivos principales es determinar los puntos donde una función alcanza sus valores máximos y mínimos (locales y absolutos) en un intervalo dado.

Definición de Extremos Locales:

- **Máximo Local:** Una función f tiene un máximo local en c si $f(c) \geq f(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene a c .
- **Mínimo Local:** Una función f tiene un mínimo local en c si $f(c) \leq f(x)$ para toda x en un intervalo abierto que contiene a c .

Puntos Críticos: Un número crítico de una función f es un número c en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o bien $f'(c)$ no existe. El *Teorema de Fermat* establece que si f tiene un extremo local en c , entonces c debe ser un número crítico de f .

2. Criterios de la Primera y Segunda Derivada

Criterio de la Primera Derivada (Monotonía y Extremos)

Permite determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función, así como clasificar sus puntos críticos:

- Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, la función es **creciente** en ese intervalo.
- Si $f'(x) < 0$ en un intervalo, la función es **decreciente** en ese intervalo.
- **Prueba de la primera derivada para extremos:** Si c es un punto crítico:
 - Si $f'(x)$ cambia de positiva a negativa al pasar por c , hay un **máximo local**.
 - Si $f'(x)$ cambia de negativa a positiva al pasar por c , hay un **mínimo local**.

Criterio de la Segunda Derivada

Suponga que f'' es continua cerca de c :

- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un **mínimo local** en c (la curva es cóncava hacia arriba).
- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un **máximo local** en c (la curva es cóncava hacia abajo).

3. Teoremas de Concavidad y Convexidad

Definición de Concavidad:

- Una función es **cóncava hacia arriba** en un intervalo si su gráfica se encuentra por encima de todas sus rectas tangentes en dicho intervalo.
- Una función es **cóncava hacia abajo** (o convexa) en un intervalo si su gráfica se encuentra por debajo de todas sus rectas tangentes.

Prueba de Concavidad:

- Si $f''(x) > 0$ para todo x en un intervalo, la gráfica es **cóncava hacia arriba**.
- Si $f''(x) < 0$ para todo x en un intervalo, la gráfica es **cóncava hacia abajo**.

Punto de Inflexión: Es un punto $(c, f(c))$ en la gráfica donde la función es continua y la concavidad cambia de hacia arriba a hacia abajo, o viceversa. En dicho punto, se cumple que $f''(c) = 0$ o bien $f''(c)$ no existe.

4. Graficación de Curvas

Para trazar la gráfica detallada de una función polinómica o racional sin necesidad de calcular un número excesivo de puntos, se sigue una guía sistemática de cálculo diferencial:

1. **Dominio:** Determinar los valores para los cuales la función está definida.
2. **Simetría e Intersecciones:** Hallar cortes con los ejes x e y .
3. **Derivada Primera ($f'(x)$):** Encontrar intervalos de crecimiento, decrecimiento y puntos críticos (máximos y mínimos).
4. **Derivada Segunda ($f''(x)$):** Encontrar intervalos de concavidad y puntos de inflexión.
5. **Esbozo de la curva:** Unir la información analítica obtenida para trazar el gráfico definitivo.

Ejercicios Resueltos

Ejercicio 1: Extremos Locales y Monotonía

Problema: Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, determine sus puntos críticos, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y clasifique sus extremos.

Solución paso a paso:

1. **Calcular la primera derivada:**

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

2. **Encontrar los puntos críticos igualando $f'(x) = 0$:**

$$3(x^2 - 2x - 3) = 0 \text{ & implies; } 3(x - 3)(x + 1) = 0$$

Los puntos críticos son $x = 3$ y $x = -1$.

3. **Analizar el signo de la primera derivada (Monotonía):**

Evaluamos intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$ y $(3, \infty)$:

- Para $x = -2$: $f'(-2) = 3(-2)^2 - 6(-2) - 9 = 15 > 0$ (Creciente)
- Para $x = 0$: $f'(0) = -9 < 0$ (Decreciente)
- Para $x = 4$: $f'(4) = 3(4)^2 - 6(4) - 9 = 15 > 0$ (Creciente)

4. **Clasificación de extremos:**

- En $x = -1$ la derivada pasa de positiva a negativa & implies; **Máximo local** en $(-1, f(-1)) = (-1, 10)$.
- En $x = 3$ la derivada pasa de negativa a positiva & implies; **Mínimo local** en $(3, f(3)) = (3, -22)$.

Ejercicio 2: Criterio de la Segunda Derivada

Problema: Dada la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 5$, determine sus extremos relativos utilizando el criterio de la segunda derivada.

Solución paso a paso:

1. **Primera derivada:** $f'(x) = 6x^2 - 12x$
2. **Igualar a cero para hallar puntos críticos:**
 $6x(x - 2) = 0 \implies x = 0, \ x = 2$
3. **Segunda derivada:** $f''(x) = 12x - 12$
4. **Evaluar los puntos críticos en la segunda derivada:**
 - Para $x = 0$: $f''(0) = 12(0) - 12 = -12 < 0$.
Como es negativo, en $x = 0$ hay un **máximo local**: $f(0) = 5$.
 - Para $x = 2$: $f''(2) = 12(2) - 12 = 12 > 0$.
Como es positivo, en $x = 2$ hay un **mínimo local**: $f(2) = 2(8) - 6(4) + 5 = -3$.

Ejercicio 3: Concavidad y Puntos de Inflexión

Problema: Determine los intervalos de concavidad y las coordenadas de los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^4 - 6x^2 + 10$.

Solución paso a paso:

1. **Primera derivada:** $f'(x) = 4x^3 - 12x$
2. **Segunda derivada:** $f''(x) = 12x^2 - 12$
3. **Igualar la segunda derivada a cero:**
 $12(x^2 - 1) = 0 \implies x = 1, \ x = -1$ (posibles puntos de inflexión).
4. **Analizar intervalos de concavidad:**
Evaluamos $f''(x)$ en los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ y $(1, \infty)$:
 - Para $x = -2$: $f''(-2) = 12((-2)^2) - 12 = 36 > 0$ (Cóncava hacia arriba $\cup$)
 - Para $x = 0$: $f''(0) = -12 < 0$ (Cóncava hacia abajo $\cap$)
 - Para $x = 2$: $f''(2) = 36 > 0$ (Cóncava hacia arriba $\cup$)
5. **Puntos de inflexión:** Como la concavidad cambia en $x = -1$ y $x = 1$, existen puntos de inflexión en $(-1, f(-1)) = (-1, 5)$ y $(1, f(1)) = (1, 5)$.