

TEMA 15

INECUACIONES

Las inecuaciones son expresiones algebraicas que se relacionan a partir de desigualdades. Dichas relaciones se expresan mediante los signos $>$ (mayor que), $<$ (menor que), $\geq$ (mayor o igual que) o $\leq$ (menor o igual que). Las inecuaciones se conforman por valores conocidos y desconocidos. **Estos últimos son llamados incógnitas.** tienen conjuntos de soluciones (frecuentemente infinitos) que pueden expresarse como intervalos o representarse gráficamente

Ejemplo:

- 1) $4x + 2 > 10$, se lee $4x + 2$ Mayor que 10. ()
- 2) $3x - 6 < 3$, se lee $3x - 6$ Menor que 3. ()
- 3) $15x - 4 \leq 11$, se lee $15x - 4$ Menor igual que 11. (]
- 4) $12x + 4 \geq 8$, se lee $12x + 4$ Mayor igual que 8. [)

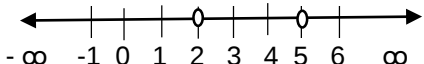
NOTACION DE INTERVALOS

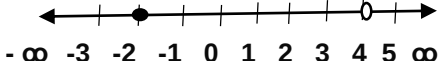
La notación de intervalos para inecuaciones con una incógnita representa el conjunto solución como un rango de números reales, usando paréntesis () para límites abiertos (excluidos, $<$, $>$) y corchetes [] para límites cerrados (incluidos, $\leq, \geq$). Menos infinito $-\infty$ y más infinito $+\infty$ siempre usan paréntesis.

Principales Notaciones de Intervalos

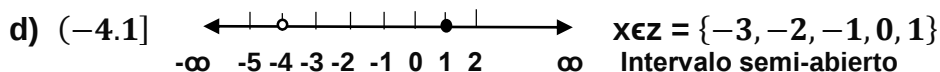
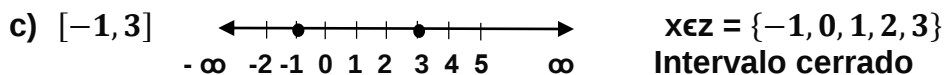
- **Abierto (a , b)** : Todos los números entre a y b , sin incluirlos. Ejemplo:
 $4 < x < 6$. (4 , 6)
- **Cerrado [a , b]**: Todos los números entre a y b , incluyéndolos. Ejemplo:
 $2 \leq x \leq 5$. [2 , 5]
- **Semiabierto/Semicerrado (a , b] o [a , b)**: Incluye solo uno de los extremos. Ejemplo: $3 < x \leq 8$, (3 , 8].
- **Infinito (a, $+\infty$) o ($-\infty$, b]**: Indica que el conjunto no tiene límite en una dirección. Ejemplo: $x \geq 10$, [10, $+\infty$)

Ejemplo: Represente el conjunto de numero enteros (Z) que pertenece a los siguiente intervalos.

a) (2,5)  $x \in \mathbb{Z} = \{3,4\}$ intervalo abierto

b) [-2,4)  $x \in \mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Intervalo semi-abierto



SENTIDO DE UNA INECUACIÓN

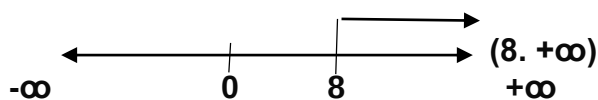
El sentido de una inecuación se refiere a la **orientación de su signo de desigualdad** ($<$, $>$, $\leq$, $\geq$), el cual indica cuál expresión es mayor. A diferencia de las ecuaciones (igualdades), las inecuaciones establecen un intervalo de valores que satisfacen la relación, comúnmente graficados como intervalos o conjuntos.

Aspectos clave sobre el sentido de una inecuación:

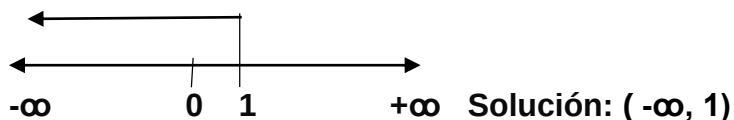
- **Signos de sentido:** Se utilizan para denotar menor que ($<$), mayor que ($>$), menor o igual que ($\leq$) o mayor o igual que ($\geq$).
- **Mantenimiento del sentido:** El sentido de la inecuación **no cambia** al sumar o restar la misma cantidad a ambos miembros, ni al multiplicar/dividir por un número positivo.
- **Inversión del sentido:** El sentido de la inecuación **se invierte** cuando se multiplica o divide ambos miembros por un número negativo.
- **Solución:** A diferencia de una igualdad única, la solución es un conjunto de valores o un intervalo numérico.

Ejercicio: Resolver. $x + 2 > 10$, despejamos la variable (x) y hallamos el intervalo. $x > 10 - 2$, $x > 8$. **(8, $+\infty$)**

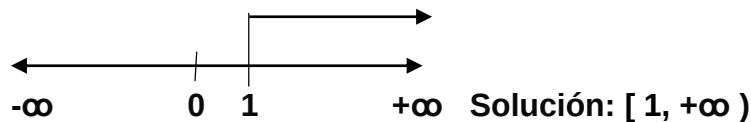
Solución: todos los numero mayores que 8. S. **(8, $+\infty$)**



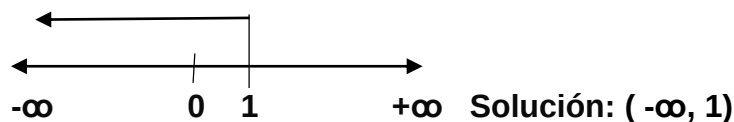
2) Ejercicio: Resolver. $2x + 1 < 4 - x$, despejamos la variable (x),
 $2x + x < 4 - 1 \Rightarrow 3x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{3}$, $x < 1$. **Solución: ($-\infty$, 1)**



3) Resolver: $2(x-3) + 5(x-1) \geq -4$, eliminamos paréntesis aplicando propiedad distributiva y luego desajamos la variable (x). $2x - 6 + 5x - 5 \geq -4 \Rightarrow 7x - 11 \geq -4$
 $7x \geq -4 + 11 \Rightarrow 7x \geq 7 \Rightarrow x \geq \frac{7}{7}$. **$x \geq 1$. Solución: $[1, +\infty)$**

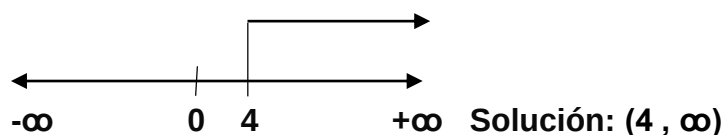


1) Resolver: $\frac{x-1}{2} - \frac{x-4}{3} < 1$, en este se eliminan los denominadores multiplicando por mcm de 2 y 3 . este es (6) $\frac{6(x-1)}{2} - \frac{6(x-4)}{3} < 6(1)$
 $3(x-1) - 2(x-4) < 6 \Rightarrow 3x - 3 - 2x + 8 < 6 \Rightarrow x + 5 < 6 \Rightarrow x < 6 - 5$
Solución: $x < 1$, $(-\infty, 1)$



Resolver: $\frac{5x-2}{3} - \frac{x-8}{4} > \frac{x+14}{2} - 2$, hallamos el mcm de los denominadores este es, mcm de 2,3,4 = (12) $\frac{12(5x-2)}{3} - \frac{12(x-8)}{4} > \frac{12(x+14)}{2} - 12(2)$
 $(20x - 8) - (3x - 24) > (6x + 84) - 24 \Rightarrow 20x - 8 - 3x + 24 > 6x + 84 - 24$
 $20x - 3x - 6x > 84 - 24 - 24 + 8 \Rightarrow 20x - 9x > 44 \Rightarrow 11x > 44$, $x > \frac{44}{11} \Rightarrow x > 4$

Solución: $x > 4$, $(4, \infty)$



INECUACIONES RACIONALES

Las inecuaciones con cocientes (racionales) son desigualdades de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)} > 0$ (o $<, \geq, \leq$). Para resolverlas, se deben pasar todos los términos a un lado para obtener cero al otro, simplificar, y encontrar los puntos críticos (donde el numerador o denominador son cero). Se analizan los signos en los intervalos resultantes, recordando que el denominador nunca puede ser cero.

Pasos para Resolver Inecuaciones con Cociente

1. **Ordenar y Simplificar:** Mover todos los términos al lado izquierdo de modo que el lado derecho sea cero (0). Obtener una sola fracción algebraicamente.
 2. **Hallar Puntos Críticos:** Encontrar los valores de (x) que hacen que el numerador sea igual a (P(x) = 0) y los que hacen que el denominador sea igual a (Q(x) = 0).
 3. **Definir Intervalos:** Ubicar los puntos críticos en una recta numérica para dividirla en intervalos.
 4. **Evaluar Signos:** Seleccionar un número de prueba dentro de cada intervalo para determinar si el cociente es positivo (+) o negativo (-) en esa zona.
 5. **Establecer la Solución:** Elegir los intervalos que cumplen la desigualdad.
1. **Importante:** Los valores que anulan el denominador (raíces de Q(x) **siempre** van con paréntesis () o corchetes abiertos) (intervalo abierto), porque la división por cero no está definida

Ejemplo: $\frac{x+4}{x-3} > 0$, observa que el miembro de la derecha es igual a cero
Hallamos los puntos críticos igualando a cero el numerador, $x + 4 = 0 \Rightarrow x = -4$
Igualamos a cero el denominador, $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$
Puntos críticos: $x = -4$ y $x = 3$, los graficamos en la recta numérica:



Evaluamos los signos en cada intervalo para determinar si el cociente es (+) o (-) en esa zona. En este caso la solución son aquellos valores que se encuentran dentro del intervalo cuyo resultado sea (+), es decir mayor que cero. Veamos:

- 1) **Intervalo (- ∞ , - 4)** . escogemos a el número (x= -5) lo sustituimos en la inecuación.
$$\frac{x+4}{x-3} > 0 \Rightarrow \frac{-5+4}{-5-3} > 0 \Rightarrow \frac{-1}{-8} > 0 \Rightarrow \frac{1}{8} > 0$$
 , el resultado es un valor (+)
- 2) **Intervalo (- 4 , 3)**, escogemos el numero cero (x= 0), lo sustituimos en la inecuación.
$$\frac{x+4}{x-3} > 0 \Rightarrow \frac{0+4}{0-3} > 0 \Rightarrow \frac{4}{-3} > 0 \Rightarrow -\frac{4}{3} > 0$$
 el resultado es un valor negativo

3) Intervalo (3 , ∞), escogemos el número (x = 4), lo sustituimos en la inecuación;

$$\frac{x+4}{x-3} > 0 \Rightarrow \frac{4+4}{4-3} > 0 \Rightarrow \frac{8}{1} > 0, \text{ el resultado es un valor positivo.}$$

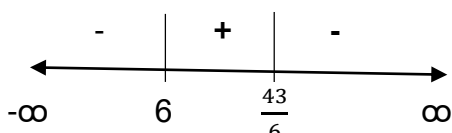
Solución: como la inecuación > 0 , la solución son los valores de los intervalos positivos. **Sol. $X \in (-\infty, -4) \cup (3, \infty)$**

Resolver: $\frac{x+1}{x-6} < 7$, pasamos el (7) al primer miembro y resolvemos la ecuación. $\frac{x+1}{x-6} < 7 \Rightarrow \frac{x+1}{x-6} - 7 < 0, \frac{x+1-7(x-6)}{x-6} < 0 \Rightarrow \frac{x+1-7x+42}{x-6} < 0$

$$\frac{-6x+43}{x-6} < 0 \text{ hallamos los puntos críticos:}$$

$$1) -6x + 43 = 0 \Rightarrow 6x = 43 \Rightarrow x = \frac{43}{6} = 7,17$$

$$2) x - 6 = 0, x = 6$$



Evaluamos los signos en cada intervalo.

4) Intervalo (- ∞ , 6), escogemos el número (x= 0), lo sustituimos en la inecuación; $\frac{-6x+43}{x-6} < 0$, ; $\frac{-6(0)+43}{0-6} < 0 \Rightarrow$; $\frac{43}{-6} < 0 \Rightarrow$; $-\frac{43}{6} < 0$

5) Intervalo (6, $\frac{43}{6}$), escogemos el número (x=7), lo sustituimos en la inecuación; $\frac{-6x+43}{x-6} < 0, \frac{-6(7)+43}{7-6} < 0, \frac{-42+43}{1} < 0 \Rightarrow \frac{1}{1} < 0$

6) Intervalo ($\frac{43}{6}$, ∞), escogemos el número (x=8), lo sustituimos en la inecuación. $\frac{-6x+43}{x-6} < 0, \frac{-6(8)+43}{8-6} < 0, \frac{-48+43}{2} < 0 \Rightarrow \frac{-5}{2} < 0$

Solución: como la inecuación < 0 , la solución son los valores de los intervalos negativos. **Sol. $X \in (-\infty, 6) \cup (\frac{43}{6}, \infty)$**

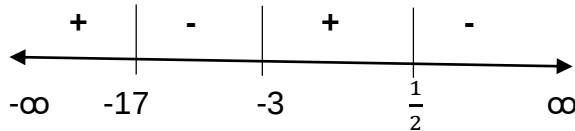
Resolver: $\frac{2}{x+3} \geq \frac{5}{2x-1}$ Movemos todos los términos al primer miembro

$$\frac{2}{x+3} - \frac{5}{2x-1} \geq 0 \Rightarrow \frac{2(2x-1)-5(x+3)}{(x+3)(2x-1)} \geq 0 \frac{4x-2-5x-15}{(x+3)(2x-1)} \geq 0, \frac{-x-17}{(x+3)(2x-1)} \geq 0$$

Hallamos los puntos críticos:

- 1) $-x - 17 = 0$, $x = -17$
- 2) $x + 3 = 0$, $x = -3$
- 3) $2x - 1 = 0$, $2x = 1$, $x = \frac{1}{2}$

Graficamos los puntos críticos



Evaluamos los signos en cada intervalo.

- 1) Intervalo $(-\infty, -17)$, escogemos el número $(x=-20)$, lo sustituimos en la inecuación $\frac{-x-17}{(x+3)(2x-1)} \geq 0$, $\frac{20-17}{(-20+3)(-40-1)} \geq 0$ $\frac{3}{(-17)(-41)} \geq 0$
 $\frac{3}{(-17)(-41)} \geq 0$, $\frac{3}{697} \geq 0$ (positivo)
- 2) Intervalo $(-17, -3)$, escogemos el número $(x=-4)$, lo sustituimos en la inecuación $\frac{-x-17}{(x+3)(2x-1)} \geq 0$, $\frac{-4-17}{(-4+3)(-8-1)} \geq 0$, $\frac{-21}{(-1)(-9)} \geq 0$,
 $\frac{-21}{9} \geq 0$ (negativo)
- 3) Intervalo $(-3, \frac{1}{2})$, escogemos el número $(x=0)$, lo sustituimos en la inecuación $\frac{-x-17}{(x+3)(2x-1)} \geq 0$, $\frac{-0-17}{(0+3)(0-1)} \geq 0$, $\frac{-17}{(3)(-1)} \geq 0$, $\frac{-17}{-3} \geq 0$
 $\frac{17}{3} \geq 0$ (positivo)
- 4) Intervalo $(\frac{1}{2}, \infty)$, escogemos el número $(x=1)$, lo sustituimos en la inecuación $\frac{-x-17}{(x+3)(2x-1)} \geq 0$, $\frac{-1-17}{(1+3)(2-1)} \geq 0$, $\frac{-18}{(4)(1)} \geq 0$, $\frac{-18}{4} \geq 0$,
(negativo)

Solución : $x \in (-\infty, 17] \cup (-3, \frac{1}{2})$

1) Ejercicio: $x^2 - 6x + 8 \geq 0$

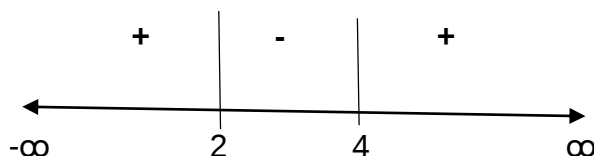
2) Factorizamos $x^2 - 6x + 8 \geq 0 \Rightarrow (x - 4)(x - 2) \geq 0$

3) Hallamos los puntos críticos

a) $x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4$

b) $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$

4) Graficamos los puntos críticos.



Evaluamos los signos en cada intervalo.

- 1) Intervalo $(-\infty, 2]$, escogemos el número $(x=-0)$, lo sustituimos en la inecuación : $X^2 - 6x + 8 \geq 0$, : $0^2 - 6(0) + 8 \geq 0$, $\Rightarrow 8 \geq 0$
 - 2) Intervalo $[2, 4]$, escogemos el número $(x=3)$, lo sustituimos en la inecuación : $X^2 - 6x + 8 \geq 0$, : $3^2 - 6(3) + 8 \geq 0$, $9 - 18 + 8 \geq 0$
 $17 - 18 \geq 0 \Rightarrow -18 \geq 0$
 - 3) Intervalo $[4, \infty)$, escogemos el número $(x=5)$, lo sustituimos en la inecuación : $X^2 - 6x + 8 \geq 0$, $5^2 - 6(5) + 8 \geq 0 \Rightarrow 25 - 30 + 8 \geq 0$
 $33 - 30 \geq 0 \Rightarrow 3 \geq 0$
- Solucion:** $X \in (-\infty, 2] \cup [4, \infty)$

Ejercicios:

a) $X^2 - 2x - 3 < 0$

Sol. $x \in (-1, 3)$

b) $X^2 - 5x + 6 > 0$

Sol. $x \in (-\infty, 2) \cup (3, \infty)$

https://www.youtube.com/watch?v=3hoeBMp0cQw&list=PLeySRPnY35dE0X9snOak4s9hv8vb1_TbL

<https://www.youtube.com/watch?v=y9vDsarVxtg>

<https://www.youtube.com/watch?v=yPSuv-CoZ3g&t=889s>

<https://www.youtube.com/watch?v=BZwdwOUTWDw>