Tema 15

INECUACIONES LINEALES

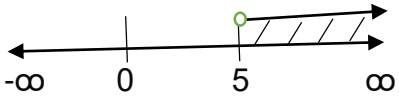
Las inecuaciones lineales con una incógnita son desigualdades algebraicas (usando >, ≥, <, ≤) de primer grado, cuyo conjunto solución suele ser un intervalo de números reales, a menudo infinito. Se resuelven igual que las ecuaciones de primer grado, agrupando términos, pero invirtiendo el sentido de la desigualdad si se multiplica o divide por un número negativo.

Conceptos Clave

- **Forma estándar:** (ax + b < c , ax + b ≤ c , ax + b > c ó ax + b ≥ c) .
- **Signos:** Representan menor, mayor, menor o igual, o mayor o igual.
- **Solución:** No es un solo número, sino un **conjunto de valores** (un intervalo) que satisface la desigualdad.
- **Representación:** Se expresan mediante intervalos (ej. (2 , ∞)) o gráficamente en la recta numérica

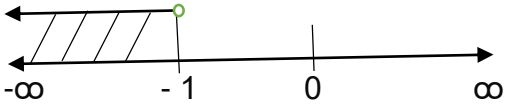
EJEMPLO: 2x - 2 > 8 , despejamos (x) , 2x > 8 + 2 => 2x > 10 => x > $\frac{10}{2}$, **x > 5**
Solución: x > 5 , intervalo (5 , ∞)

Gráficamente.



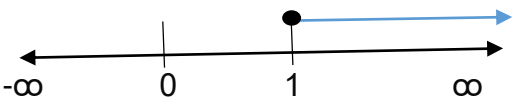
Ejercicio: 7x + 5x < 2x – 10, despejamos (x), **7x + 5x – 2x < – 10 => 10x < - 10**
X < $\frac{10}{10}$, solución : x < - 1 intervalo: (- ∞ , 1)

Gráficamente.



Ejercicio: 2(x + 1) – 3 (x – 2) ≤ x + 6, resolvemos, 2x + 2 – 3x + 6 ≤ x + 6, 2x – 3x – x ≤ 6 – 2 – 6 => 2x – 4x ≤ - 2, - 2x ≤ -2 => 2x ≥ 2, x ≥ $\frac{2}{2}$ **, x ≥ 1**
Solución: x ≥ 1. Intervalo; [1 , ∞)

Gráficamente



EJERCICIOS:

1) **4X + 2 < 6x – 3**
2) **– 3x + 8 > 10**
3) $x - 4(x - 7) \leq 16$
4) **– x + $\frac{2}{3}$ ≥ x + 1**

SISTEMA DE INECUACIONES LINEALES CON UNA INCOGNITA

Un sistema de inecuaciones lineales con una incógnita es un conjunto de dos o más inecuaciones de primer grado que deben cumplirse simultáneamente. Se resuelve despejando la incógnita en cada una, obteniendo intervalos solución y buscando su intersección en la recta numérica. Si los intervalos no se cruzan, el sistema no tiene solución.

Pasos para Resolver el Sistema

1. **Resolver individualmente:**
   Se despeja la incógnita (X) en cada inecuación por separado, siguiendo las reglas de desigualdad (cambiar el sentido al multiplicar/dividir por números negativos).
2. **Representación gráfica:** Se dibujan los conjuntos solución de cada inecuación en una recta real.
3. **Intersección:** La solución final es el intervalo o región donde se cruzan o coinciden las soluciones de todas las inecuaciones.
4. **Expresar la solución:** El resultado se escribe en forma de intervalo, por ejemplo: [5, 8) , (- ∞, 2) , o como conjunto vacío Ø si no hay solución común.

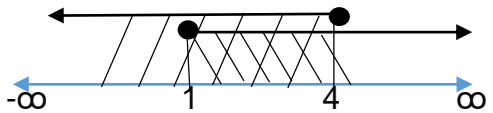
1) Ejemplo:

$$\begin{cases} 4x - 3 \leq 13 \ (1) \\ 2x - 1 \geq 1 \ (2) \end{cases}$$

Resolvemos (1) 4x – 3 ≤ 13 , 4x ≤ 13 + 3 => 4x ≤ 16 , x ≤ $\frac{16}{4}$, x ≤ 4 . (- ∞, 4]

Resolvemos (2) 2x – 1 ≥ 1 , 2x ≥ 1 + 1=> x ≥ $\frac{2}{2}$, x ≥ 1 intervalo. [1 , ∞)

Gráficamente interceptamos intervalos.



Solución: x ϵ [1 , 4]

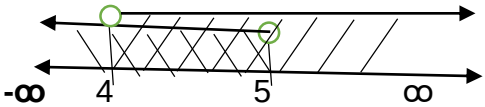
2) Resolver:

$$\begin{cases} 5x - 10 > 3x - 2 \ (1) \\ 3x + 1 < 2x + 6 \ (2) \end{cases}$$

(1) $5x - 10 > 3x - 2$, **5x – 3x > - 2 + 10 => 2x > 8 , x > $\frac{8}{2}$, x > 4.=>(4 , ∞)**

(2) $3x + 1 < 2x + 6 , 3x - 2x < 6 - 1 \Rightarrow x < 5 \Rightarrow (-\omega, 5)$

Gráficamente interceptamos intervalos



Solución; x ϵ (4 , 5)

SISTEMA DE INECUACIONES LINEALES CON DOS INCOGNITA

https://www.youtube.com/watch?v=u9Tuvd0FDlc

Un sistema de inecuaciones con dos incógnitas involucra dos inecuaciones que contienen dos variables y cuyas soluciones son los pares de valores que satisfacen simultáneamente ambas inecuaciones; para encontrar las soluciones se grafican las inecuaciones en un plano cartesiano y la región de soluciones es la intersección de las regiones definidas por cada una.

Resolver: $\begin{cases} \mathbf{2x + y \leq 3\ (1)} \\ \mathbf{x + y \geq 1\ (2)} \end{cases}$

1) Transformamos la desigualdad en igualdad.

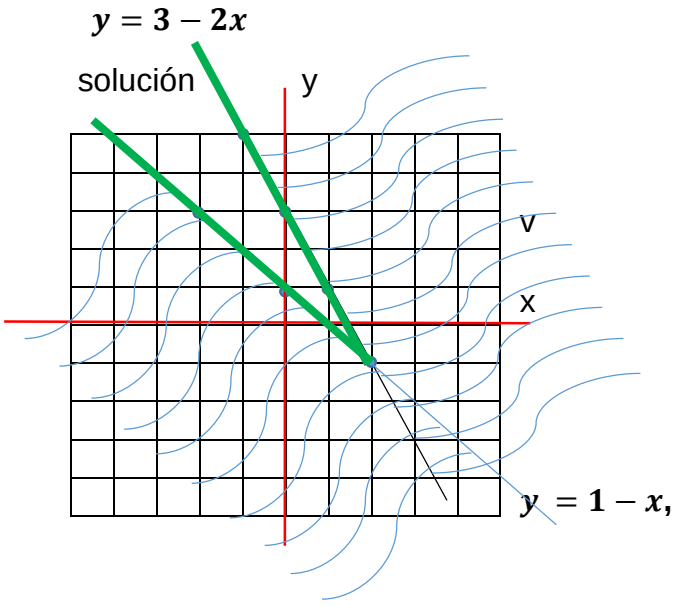
$\mathbf{2x + y = 3}$ **despejamos (y) ,** y = 3 – 2x , por ser una ecuación lineal damos tres valores arbitrarios para hallar tres puntos para graficarla

$\boldsymbol{si\ x = -1, sustituimos\ en\ , y = 3 - 2x, y = 3 - 2(-1), y = 3 + 2, y = 5}$
p_1(- 1, 5)

$\boldsymbol{si\ x = 0}$, $\boldsymbol{sustituimos\ en\ , y = 3 - 2x,\ y = 3 - 2(0), y = 3 - 0\ , y = 3}$
p_2 (0,3)

$\boldsymbol{si\ x = 1, sustituimos\ en\ y = 3 - 2x, y = 3 - 2(1), y = 3 - 2\ , y = 1,}$
p3 (1, 1)

2) Transformamos la desigualdad en igualdad
$\mathbf{x + y = 1}$ **, despejamos (y)** $\boldsymbol{y = 1 - x}$**,** por ser una ecuación lineal damos tres valores arbitrarios para hallar tres puntos para graficarla
$\boldsymbol{si\ x = -2,}$, $\boldsymbol{sustituimos\ en, y = 1 - x,}$ **y = 1 + 2, y= 1 p_1 (-2, 3)**
Si x= 0 , , $\boldsymbol{sustituimos\ en, y = 1 - x,}$ **y = 1 – 0 , y = 1, p_2 (0 . 1)**
X= 2 , $\boldsymbol{sustituimos\ en, y = 1 - x, y = 1 - 2, y = -1,}$ **p_3 (2, -1)**



Se sustituye el punto (0,0) en cada inecuación para verificar si se cumple la desigualdad. $\boldsymbol{2x + y \leq 3, 2(0) + 0 \leq 3, 0 \leq 3\ verdadero}$, marcamos la zona donde no se cumple la desigualdad.

Se sustituye el punto (0,0) en cada inecuación para verificar si se cumple la desigualdad $\boldsymbol{x + y \geq 1, 0 + 0 \geq 1\ falso}$ por ser falso marcamos esa zona ya que no se cumple la desigualdad.
La solución del sistema se encuentra en la zona donde no aparece marcada.

Resolver.

$$\begin{cases} 2x + y < 3\ (1) \\ x - 2y \geq -1\ (2) \end{cases}$$

(1) Transformamos la desigualdad en igualdad

$2x + y < 3$ por ser una ecuación lineal damos tres valores arbitrarios para hallar tres puntos para graficarla

X =-1. $2x + y = 3$, 2(-1) + y = 3 , -2 + y = 3, y = 3 + 2 , **y = 5 p_1(-1,5)**

X= 0 . . $2x + y = 3$, 2(0) + y= 3, 0 +y = 3 , **y =3 p_2(0 , 3)**

X =1, $2x + y = 3$, 2(1) + y = 3, y= 3 -2 **, y = 1 p_3(1, 1)**

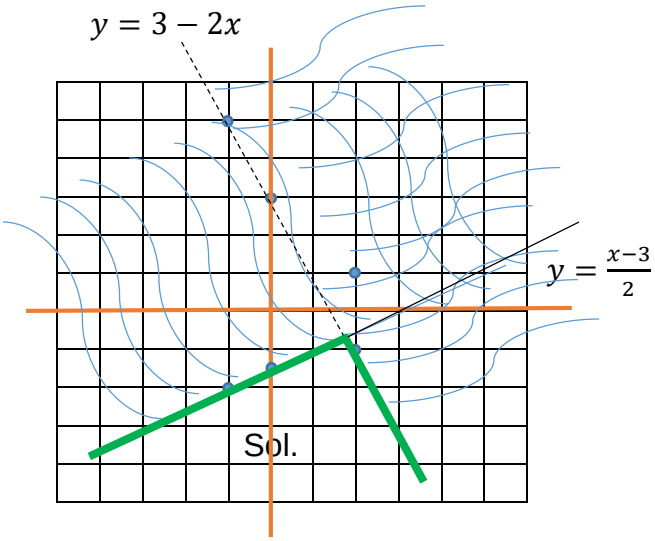
(2) Transformamos la desigualdad en igualdad

$x - 2y \geq 3$ por ser una ecuación lineal damos tres valores arbitrarios para hallar tres puntos para graficarla.

X= -1 $x - 2y = 3$, 2y= x -3, y = $\frac{x-3}{2}$ => y= -2 p_1(-1,-2)

X=0 , y = $\frac{x-3}{2}$ => y = $\frac{0-3}{2}$ =- $\frac{3}{2}$= 1,5, y= 1,5 p_2(0 , 1,5)

X= 1 , y = $\frac{x-3}{2} = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$, y = -1 p_3(1, -1)



Se sustituye el punto (0,0) en cada inecuación para verificar si se cumple la desigualdad. $\boldsymbol{2x + y < -1,\ 2(0) + 0 < 3, 0 < -1\ falso}$, marcamos la zona donde no se cumple la desigualdad

Se sustituye el punto (0,0) en cada inecuación para verificar si se cumple la desigualdad. $x - 2y \geq -1$, $\mathbf{0 - 2(0) \geq -1, 0 \geq -1}$ $\boldsymbol{verdadero}$, marcamos la zona donde no se cumple la desigualdad
La solución del sistema se encuentra en la zona donde no aparece marcada.

Ejercicio: Resolver

1) $\begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ x - y \geq -1 \end{cases}$

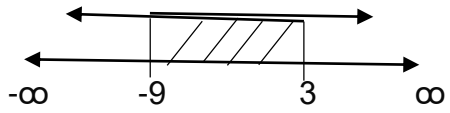
INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Las inecuaciones con valor absoluto se resuelven eliminando las barras de valor absoluto mediante propiedades específicas. Para $|x| < a$ (con a > 0) , se resuelve - a < x < a . Para $|x| > a$, se resuelven dos casos separados: x < - a o x > a, uniendo luego las soluciones. Estos métodos transforman la inecuación en expresiones algebraicas lineales estándar.

Métodos de Resolución

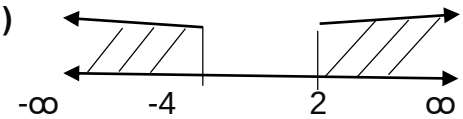
1) **Caso Menor que ($|x| < a$ o $|x| \leq a$):**
   El valor absoluto está entre dos números, indicando una distancia al cero menor que (a) Se resuelve como una inecuación compuesta:
   x > -a ∧ x < a ; **- a < x < a** ó x ≥ -a ∧ x ≤ a ; **- a ≤ x ≤ a.**

Ejemplo: $|x + 3| \leq 6$. **Aplicamos la propiedad:** - a ≤ x ≤ a.
$|x + 3| \leq 6$. **=>** - 6 ≤ x + 3 ≤ 6 despejamos (x), - 3 – 6 ≤ x ≤ 6 – 3 =>
-9 ≤ x ≤ 3 **solución: x ϵ** $[-9, 3]$



2) **Caso Mayor que ($|x| > a$ o $|x| \geq a$):**
   La distancia al cero es mayor que (a) , resultando en dos intervalos opuestos. Se resuelve como (x ≤ - a ó x ≥ a) , *Ejemplo:*
   $|3x + 3| \geq 9$, **Aplicamos la propiedad: (x ≤ - a ó x ≥ a)** ,
   1) 3x + 3 ≤ - 9 => 3x ≤ - 9 – 3 => 3x ≤ - 12 , **x ≤ - 4**
   2) 3x + 3 ≥ 9 => 3x ≥ 9 – 3 => 3x ≥ 6 , x ≥ $\frac{6}{3}$ **, x ≥ 2.**

Solucion: (- ∞, - 4] U [2, ∞)



1) Valores absolutos en ambos lados ($|X| < |b|$) :

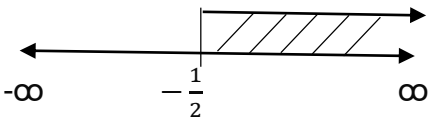
Una forma eficiente es elevar ambos miembros al cuadrado, $|x|^2 < |b|^2$, lo que elimina el valor absoluto, ya que $|x|^2 = x^2$.

Ejemplo: $|x-1| < |x+2|$, aplicamos la propiedad, $|x|^2 < |b|^2$,

$|x-1|^2 < |x+2|^2 = (x-1)^2 < (x+2)^2$ => $x^2 - 2x + 1 < x^2 + 4x + 4$

$x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 4x + 4) < 0$ => $x^2 - 2x + 1 - x^2 - 4x - 4 < 0$

- $6x - 3 < 0$ => $6x > -3$, $x > \frac{-3}{6}$ => $x > -\frac{1}{2}$ **solución:** $(-\frac{1}{2}, \infty)$



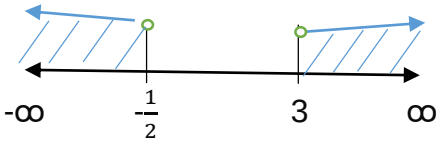
Ejercicios: $|3x-2| > x + 4$, aplicamos la propiedad **($|x| > a$ o $|x| \geq a$):** despejamos el modulo, $|3x-2| > x + 4$, x < -a ^ x > a

1) 3X – 2 < -(x + 4) => 3x – 2 < - x - 4 =>3x + x < - 4 + 2 , 4x **<- 2, x < -** $\frac{1}{2}$

Intervalo $(-\infty, -\frac{1}{2})$

2) 3X – 2 > x + 4 => 3x – x > 4 + 2, 2x > 6 => x > $\frac{6}{2}$, x > 3, intervalo (3, ∞)

Gráficamente



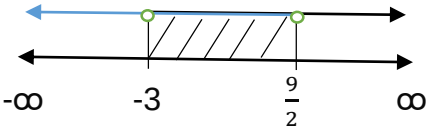
Solución: x ϵ **(-∞, -** $\frac{1}{2}$ **) U** (3, ∞)

Ejercicio: $\left|\frac{4x-3}{3}\right| < 5$ **,** aplicamos la propiedad **($|x| < a$ o $|x| \leq a$),=>**

- a < x < a. $-5 < \frac{4x-3}{3} < 5$, $3(-5) < 3\left(\frac{4x-3}{3}\right) < 3(5)$ => $-15 < 4x - 3 < 15$

$-15 + 3 < 4x < 15 + 3$, $-12 < 4x < 18$ => $\frac{-12}{4} < \frac{4x}{4} < \frac{18}{4}$, => **$-3 < x < \frac{9}{2}$**

Graficamos,



Solucion: **x ϵ (- 3,** $\frac{9}{2}$ **)**

Ejercicio: $\left|\frac{x-2}{x+3}\right| < 6$, aplicamos propiedad **($|x| < a$ o $|x| \leq a$): - a < x < a**

$-6 < \frac{x-2}{x+3} < 6$ tenemos dos inecuaciones, resolvemos por separado.

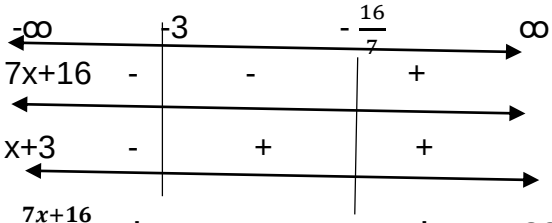
1) $-6 < \frac{x-2}{x+3}$ => $\frac{x-2}{x+3} + 6 > 0$, $\frac{x-2+6(x+3)}{x+3} > 0$, $\frac{x-2+6x+18}{x+3} > 0$, $\frac{7x+16}{x+3} > 0$

Determinamos puntos críticos: , $\frac{7x+16}{x+3} > 0$

$7x + 16 = 0$, $7x = -16$, $x = -\frac{16}{7} = -2{,}2$ => $x = -2{,}2$

$X + 3 = 0$, $x = -3$

Graficamos los puntos críticos,



$\frac{7x+16}{x+3} > 0$ **solucion 1: (-∞, -3) U (**$-\frac{16}{7}$, ∞), es la zona positiva donde cumple la condición > 0

2) $\frac{x-2}{x+3} < 6, \frac{x-2}{x+3} - 6 < 0, \frac{x-2-6(x+3)}{x+3} < 0$, $\frac{x-2-6x-18}{x+3} < 0, \frac{-5x-20}{x+3} < 0,$

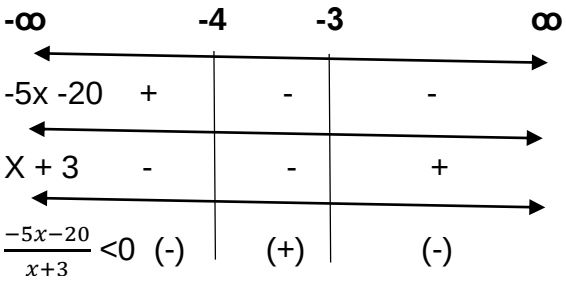
Determinamos puntos críticos: $\frac{-5x-20}{x+3} < 0,$

-5x -20 =0, 5x = -20=> x = $-\frac{20}{5}$ = x= -4

X + 3 = 0 **x = -3**

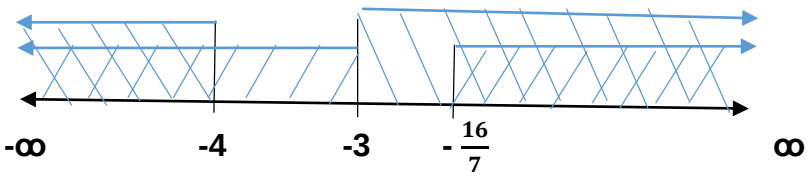
Graficamos los puntos críticos,

Solucion 2: (-∞, -4) U (-3 , ∞), es la zona negativa donde cumple con la codicion < 0



Solución final es la intercepción de la s1 ∩ s2

Solucion 1: (-∞, -3) U ($-\frac{16}{7}$, ∞),
Solucion 2: (-∞, -4) U (-3 , ∞),



Solución: (-∞, -4) U ($-\frac{16}{7}$**, ∞)**

https://www.youtube.com/watch?v=sHWLQXSNzGQ