

TEMA 17

RELACION Y FUNCIONES

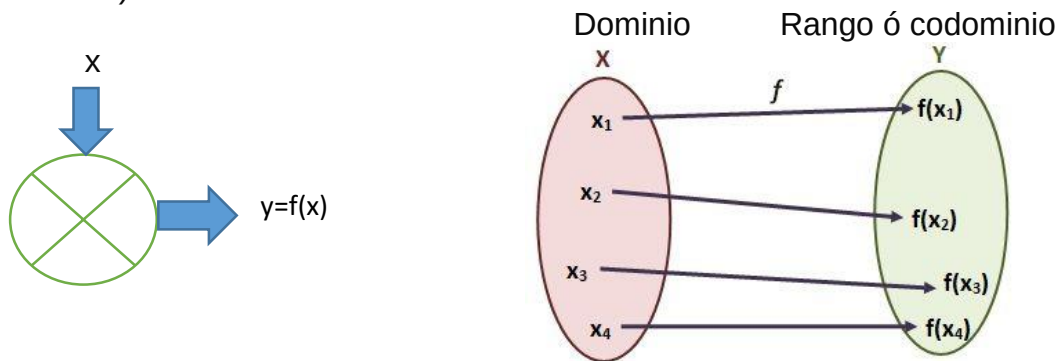
QUE ES UNA RELACION

Una **relación** es una correspondencia entre dos conjuntos, mientras que una función es un tipo especial de relación donde cada elemento del primer conjunto se conecta con uno y solo un elemento del segundo conjunto

- Una relación es un vínculo entre elementos de un conjunto inicial (dominio (x)) y un conjunto final (rango (y)).
- A un elemento del dominio le puede corresponder **uno o más** elementos del segundo conjunto rango.

Una **función** es una regla matemática que relaciona cada elemento de un conjunto de entrada (llamado **dominio**, usualmente x) con **un único** elemento de un conjunto de salida (llamado **rango** o codominio, usualmente (y) o $f(x)$).

Se puede visualizar como una máquina: en la cual, entra un valor (x, independiente), la función lo procesa, y obtienes una única salida (y, dependiente).



Conceptos clave:

- **Dominio:** El conjunto de todos los posibles valores de entrada (x) para los que la función está definida.
- **Rango/ Imagen:** El conjunto de todos los valores de salida (y) que produce la función.
- **Unicidad:** Una entrada (x) no puede tener dos salidas (y) diferentes, aunque dos entradas distintas pueden tener la misma salida.
- **Representación:** Se denota usualmente como $y = f(x)$

Dominio Y Rango de una función

El **dominio** de una función es el conjunto de todos los valores de entrada posibles (generalmente x) para los cuales la función está definida, mientras que el **rango** (o imagen) es el conjunto de todos los valores de salida resultantes (generalmente y o $f(x)$)

1. Dominio (Valores de entrada (x))

- **Definición:** Qué valores de x puedo poner en la función sin que se "rompa" (sin obtener divisiones por cero, raíces cuadradas de números negativos, etc.).
- **En una gráfica:** Se lee de **izquierda a derecha** sobre el eje horizontal (eje X).
- **Restricciones Comunes:**
- **Fracciones:** El denominador no puede ser cero (denominador $\neq 0$).
- **Raíces pares:** Lo de adentro debe ser mayor o igual a cero ($\sqrt{f(x)} \rightarrow f(x) \geq 0$)

2. Rango (Valores de salida - y)

- **Definición:** Qué valores de y produce la función al ingresar todos los valores del dominio.
- **En una gráfica:** Se lee de **abajo hacia arriba** sobre el eje vertical (eje Y).

1. Función Polinómica (Lineal/Cuadrática)

Ejercicio: Hallar dominio y rango de $f(x) = 3x - 5$

- **Dominio:** Al ser una función lineal (polinomio de grado 1), no tiene restricciones (no hay divisiones por cero ni raíces pares).
- **Dom $f(x) = \mathbb{R}$ (todos los números reales) o $(-\infty, \infty)$, es decir cualquier valor de x , y siempre tiene un valor.**
- **Rango:** Una línea recta continua sin restricciones de pendiente también cubre todos los valores reales en y
- **Ran $f(x) = \mathbb{R}$ o $(-\infty, \infty)$**

2. Función Cuadrática (Parábola)

Ejercicio: Hallar dominio y rango de $f(x) = x^2 + 1$.

- **Dominio:** Es un polinomio de segundo grado, por lo que acepta cualquier número real.
- **Dom $f(x) = \mathbb{R}$ ó $(-\infty, \infty)$, es decir cualquier valor de x , y siempre tiene un valor.**
- **Rango:** Como x^2 siempre es mayor o igual a 0, el valor más pequeño que toma $f(x)$, ocurre cuando $x = 0$, resultando en $0 + 1 = 1$. La gráfica abre hacia arriba.
$$F(x) = x^2 + 1, \Rightarrow y = x^2 + 1 \text{ despejamos } x, x^2 = y - 1 \rightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{y - 1}$$
$$x = \sqrt{y - 1}, \text{ restricción } y - 1 \geq 0 \rightarrow y \geq 1, [1, \infty)$$
$$\text{Ran } f(x) = [1, \infty)$$

3. Función Racional (Fracción)

Ejercicio: Hallar dominio y rango de $f(x) = \frac{2}{x-3}$.

- **Dominio:** El denominador no puede ser cero. Resolvemos $x - 3 \neq 0$, lo que significa $x \neq 3$
 - **Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{3\}$ ó $(-\infty, 3) \cup (3, \infty)$.**
- **Rango:** Buscamos los valores que nunca puede tomar. Despejamos x
 $f(x) = \frac{2}{x-3} \rightarrow y = \frac{2}{x-3} \rightarrow y(x-3) = 2, xy - 3y = 2, xy = 2 + 3y \rightarrow x = \frac{2+3y}{y}$
(y) está en el denominador, restricción $y \neq 0$.
 - **Ran $f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$ ó $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.**

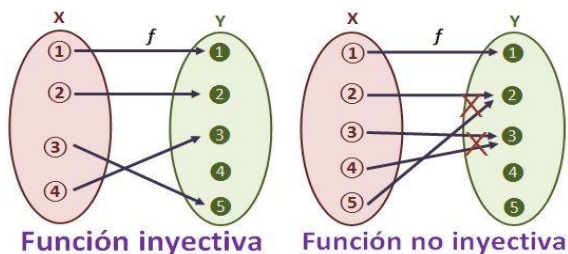
4. Función Raíz Cuadrada

Ejercicio: Hallar dominio y rango de $f(x) = \sqrt{x+4}$.

- **Dominio:** El radicando (lo de adentro) debe ser ≥ 0
 $x + 4 \geq 0 \rightarrow x \geq -4 \rightarrow [-4, \infty)$
 - **Dom $f(x) = [-4, \infty)$.**
- **Rango:** La raíz cuadrada principal siempre devuelve valores no negativos (≥ 0).
 $f(x) = \sqrt{x+4} \rightarrow y = \sqrt{x+4}$, despejamos $x, y^2 = (\sqrt{x+4})^2 \rightarrow y^2 = x+4$
 $x = y^2 - 4$
 - **Ran $f(x) = [0, \infty)$**

Función inyectiva:

La función f es inyectiva si cada elemento del conjunto final Y tiene un único elemento del conjunto inicial X al que le corresponde. Es decir, no pueden haber más de un valor de (X) que tenga la misma imagen (Y). Reciben también el nombre de funciones «uno a uno».



En términos matemáticos, una función f será **inyectiva** si dados dos puntos x_1 y x_2 : **si $f(x_1) = f(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$**

Ejemplo: $f(x) = 2x + 1$

$$f(x_1) = 2x_1 + 1$$

$$f(x_2) = 2x_2 + 1$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow 2x_1 + 1 - 1 = 2x_2 + 1 - 1, 2x_1 + 0 = 2x_2 + 0, \\ 2x_1 = 2x_2, \frac{2x_1}{2} = \frac{2x_2}{2} \Rightarrow x_1 = x_2$$

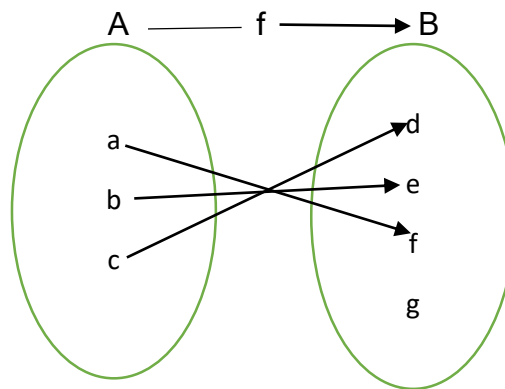
Entonces: $f(x) = 2x + 1$ es inyectiva.

Ejemplo 2

1.- Sea $A = \{a, b, c\}$ $B = \{d, e, f, g\}$; $f: A \rightarrow B$:

$$f = \{(a, f), (b, e), (c, d)\}$$

gráficamente:



Observa que cada elemento de A le corresponde **solo un** elemento de B y los elementos de B reciben solo una línea, por lo tanto, es inyectiva

Ejercicio: Determinar si $f(x) = 3x^2 - 2$ es inyectiva

Para demostrar si $f(x)$ es inyectiva hay que verificar si se cumple la propiedad

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$$

$$1) f(x_1) = 3x_1^2 - 2$$

$$2) f(x_2) = 3x_2^2 - 2$$

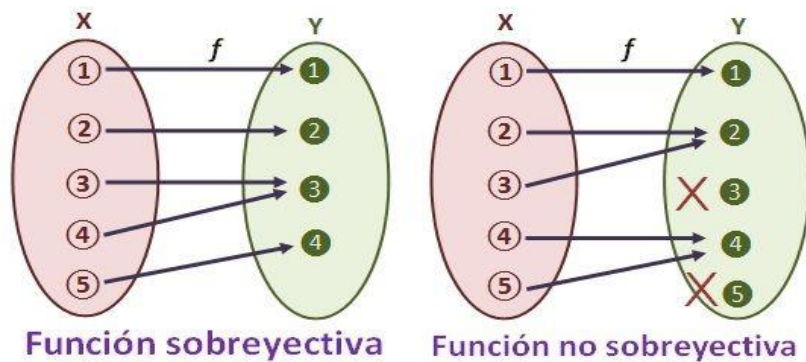
$$3x_1^2 - 2 = 3x_2^2 - 2, 3x_1^2 = 3x_2^2 - 2 + 2 \rightarrow 3x_1^2 = 3x_2^2 \rightarrow x_1^2 = x_2^2$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0 \rightarrow (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0 \text{ resolvemos por separado}$$

$x_1 + x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -x_2, x_1 - x_2 = 0 \rightarrow x_1 = x_2$ observa que se obtiene dos resultados diferentes por lo tanto $f(x)$ no es inyectiva

3) Función sobreyectiva

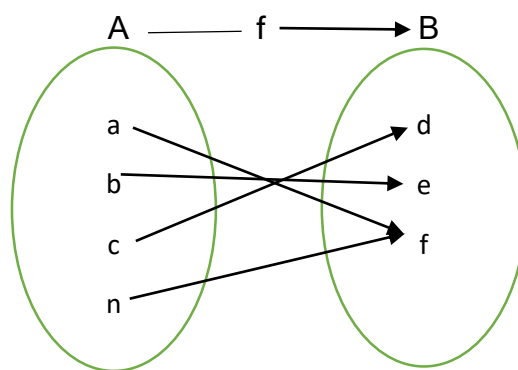
Una función f es **sobreyectiva** (o **suprayectiva**) si **todos** los elementos del conjunto final (Y) tienen **al menos** un elemento del conjunto inicial (X) al que le corresponde.



1.- Sea $A = \{a, b, c, n\}$ $B = \{d, e, f\}$; $f: A \rightarrow B$:

$f = \{(a,f), (b,e), (c,d), (n,f)\}$

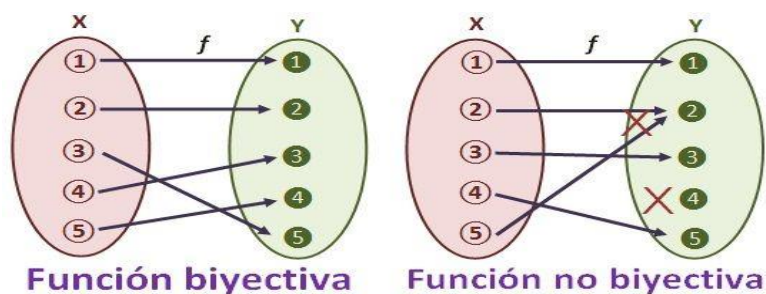
gráficamente:



Observa que todos elementos de B tienen al menos un elemento de A , sin embargo (f) es imagen de dos elementos diferentes de A , por lo tanto, es sobreyectiva

4) Función biyectiva

Una función f es biyectiva si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva. Es decir, si **todo** elemento del conjunto final Y tiene **al menos un** elemento del conjunto inicial X al que le corresponde (condición de función sobreyectiva) y **todos** los elementos del conjunto inicial X tiene **una única** imagen en el conjunto final Y (condición de función inyectiva).



Ejemplo: Sea la función $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la recta $F(x) = 5x + 1$

Verificamos la propiedad $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

$$F(x_1) = 5x_1 + 1$$

$$F(x_2) = 5x_2 + 1$$

$$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2, 5x_1 + 1 = 5x_2 + 1, 5x_1 = 5x_2 + 1 - 1, 5x_1 = 5x_2, \frac{5x_1}{5} = \frac{5x_2}{5}$$

$x_1 = x_2$, $f(x)$ es inyectiva.

De igual manera observamos que el codominio de la función es igual a su rango. Cumpliéndose así la condición de **sobreyectividad**.

Entonces $f(x)$ Al ser inyectiva y sobreyectiva al mismo tiempo podemos concluir que $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por la recta $F(x) = 5x + 1$ es una **función biyectiva**.

Función inversa

La **función inversa** (denotada como $f^{-1}(x)$) es aquella que **deshace** la acción de la función original $f(x)$. Básicamente, intercambia los roles del dominio y el rango: si la función original toma un valor x y lo convierte en y , la función inversa toma (y) y lo devuelve a (x)

1. ¿Cómo calcular la función inversa?

Para encontrar la inversa de una función, sigue estos pasos:

1. **Escribe la función** original como $y = f(x)$ y verificar si es inyectiva
2. **Intercambia** las variables x e y (donde hay (x) pones (y) , y viceversa).
3. **Despeja** la nueva variable (y) .
4. **Sustituye** y por $f^{-1}(x)$ para expresar la función inversa.

Ejemplo: hallar la función inversa de $f(x) = 5x + 2$

Verificamos si es $f(x)$ inyectiva, mediante la propiedad **$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$**

$$5x_1 + 2 = 5x_2 + 2 \rightarrow 5x_1 + 2 - 2 = 5x_2 + 2 - 2 \rightarrow 5x_1 = 5x_2 \rightarrow \frac{5x_1}{5} = \frac{5x_2}{5} \rightarrow x_1 = x_2$$

1) $Y = 5x + 2$, intercambiamos la variable (x) , $x = 5y + 2$

2) Despejamos (y) , $x = 5y + 2 \rightarrow x - 2 = 5y$, $y = \frac{x-2}{5}$

3) $y = \frac{x-2}{5} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-2}{5}$ inversa

Ejemplo: hallar la función inversa de $f(x) = \frac{6-x}{2x-3}$

Verificamos si es $f(x)$ inyectiva, mediante la propiedad **$f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$**

$$\frac{6-x_1}{2x_1-3} = \frac{6-x_2}{2x_2-3} \rightarrow (6-x_1)(2x_2-3) = (6-x_2)(2x_1-3) \rightarrow 12x_2 - 18 - 2x_1x_2 + 3x_1 = 12x_1 - 18 - 2x_1x_2 + 3x_2 \rightarrow 12x_2 - 2x_1x_2 + 3x_1 - 12x_1 + 2x_1x_2 - 3x_2 = 18 - 18, 9x_2 - 9x_1 = 0 \rightarrow 9x_2 = 9x_1$$

$$x_1 = x_2$$

1) $y = \frac{6-x}{2x-3}$ intercambiamos la variable (x) , $x = \frac{6-y}{2y-3}$

2) **despejamos (y)** , $x(2y-3) = 6-y$, $2xy-3x = 6-y$, $2xy+y = 6+3x$

$$y(2x+1) = 6 + 3x \rightarrow y = \frac{6+3x}{2x+1} \rightarrow f^{-1}(x) = \frac{6+3x}{2x+1} \text{ inversa}$$

Ejercicio: hallar la función inversa de $f(x) = \frac{1-x}{x}$

4) Función compuesta

Una **función compuesta** es una función formada por la aplicación sucesiva de dos o más funciones, donde la salida (resultado) de la primera función se convierte en la entrada de la segunda. En términos simples, es "una función dentro de otra". Se denota comúnmente como $(g \circ f)(x)$, lo que se lee "(g) compuesta con (f) ó (g) de (f) de (x)". Es decir: **$(g \circ f)(x) = g(f(x))$**

Conceptos Clave

Definición: $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

- **Orden:** Se aplica primero la función interior (f) y luego la exterior (g).
- **Notación:** El símbolo ($\circ$) indica composición, y se lee de derecha a izquierda: $(g \circ f)$ significa $g(f(x))$,
- **Dominio:** El dominio de $(g \circ f)$ es el conjunto de valores (x) en el dominio de (f) tales que $f(x)$ está en el dominio de (g)

Ejemplo: Sean las funciones $f(x) = 2x + 3$ y $g(x) = x + 1$. hallar $(g \circ f)(x)$?

$$f(x) = 2x + 3$$

$$g(x) = x + 1$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

1) Sustituimos $f(x)$ dentro de $g(x) = x + 1$

$$2) g(2x+3) = (2x+3) + 1$$

$$3) (g \circ f)(x) = 2x + 3 + 1 = 2x + 4$$

$$4) \text{ Solución: } (g \circ f)(x) = 2x + 4$$

2) Ejemplo: sea $f(x) = 3x + 5$, $g(x) = 4x + 2$, hallar $(f \circ g)(x) = ?$

Por definición, $(f \circ g)(x) = f(g(x))$

Sustituimos $g(x)$ dentro de $f(x)$, es decir donde aparece (x) en $f(x)$ lo sustituimos por $g(x)$. $\Rightarrow f(g(x)) = 3(4x+2) + 5$

$$(f \circ g)(x) = 3(4x+2) + 5 = 12x + 6 + 5 = 12x + 11$$

$$\text{Solución: } (f \circ g)(x) = 12x + 11$$

3) Encuentra el valor de $f(g(3))$ si $f(x) = 2x + 5$ y $g(x) = x + 6$.

Hallamos $g(3)$, si $g(x) = x + 6 \rightarrow g(3) = 3 + 6 = 9 \rightarrow \mathbf{g(3) = 9}$
 $f(x) = 2x + 5$ entonces $f(g(3)) = 2(9) + 5 \rightarrow f(g(3)) = 18 + 5 = 23$
solución: $f(g(3)) = 23$

4) Sean las funciones $f(x) = x^2 + 2x - 1$ y $g(x) = 3x + 1$.

hallar $(f \circ g)(x)$?

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$, esto significa que donde se encuentra la variable (x) en $f(x)$ la vamos a sustituir por $g(x)$.

$f(x) = x^2 + 2x - 1$ y $g(x) = 3x + 1$. $\rightarrow f(g(x)) = (3x+1)^2 + 2(3x+1) - 1$

$f(g(x)) = (3x)^2 + 2(3x)(1) + (1)^2 + 2(3x) + 2(1) - 1$

$f(g(x)) = 9x^2 + 6x + \cancel{1} + 6x + 2 - \cancel{1} = 9x^2 + 12x \rightarrow \mathbf{f(g(x)) = 9x^2 + 12x}$

solución $(f \circ g)(x) = 9x^2 + 12x$

<https://www.youtube.com/watch?v=HAeSkQH1C-I>

<https://www.youtube.com/watch?v=xhBWUbY1VrM>

https://www.youtube.com/watch?v=RIqzDV-AV_Q

