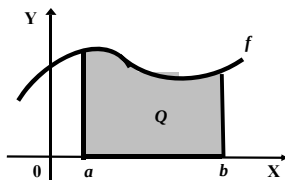


SECCION 3.2

AREA

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y no negativa. Sea Q la región del plano encerrada por el gráfico de f , el eje X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$. Nos planteamos el problema de hallar el área de esta región Q .

Las fórmulas de áreas dadas en la geometría de secundaria no son aquí aplicables. El problema lo resolveremos construyendo una sucesión de aproximaciones al área de Q en tal forma que el límite de esta sucesión sea precisamente el área buscada.



Procedemos de dos maneras: con rectángulos inscritos y con rectángulos circunscritos.

AREA CON RECTANGULOS INSCRITOS

Dividimos el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual longitud. Denotaremos con Δx esta longitud. Es claro que

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Si $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ son los extremos de estos subintervalos, entonces

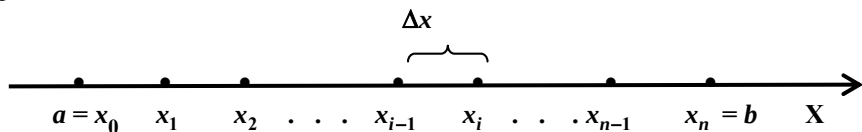
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_i < \dots < x_n = b \quad y$$

$$x_0 = a, \quad x_1 = a + \Delta x, \quad x_2 = a + 2\Delta x, \dots, \quad x_i = a + i\Delta x, \dots, \quad x_n = b$$

Al conjunto de subintervalos

$$[x_0, x_1], \quad [x_1, x_2], \quad \dots, \quad [x_{i-1}, x_i], \quad \dots, \quad [x_{n-1}, x_n]$$

lo llamaremos una **partición regular** de $[a, b]$. El número Δx es la **norma** de la partición.



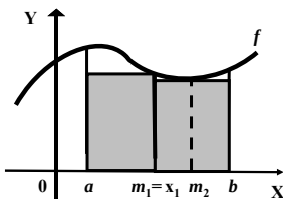
El término **regular** con el que acompañamos al concepto de partición lo hacemos con intención de reflejar la propiedad de que todos los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ de la partición tienen igual longitud. Más adelante presentaremos particiones que no son regulares.

Por ser f continua en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, existe un punto m_i en este subintervalo, tal que $f(m_i)$ es el mínimo absoluto de f en $[x_{i-1}, x_i]$. Construimos el

rectángulo r_i de base el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ y de altura igual a $f(m_i)$. El área de este rectángulo es

$$\text{área de } r_i = f(m_i)(x_i - x_{i-1}) = f(m_i)\Delta x$$

Este proceso se hace por cada $i = 1, 2, \dots, n$, y se obtienen n rectángulos inscritos en la región Q . Las figuras siguientes ilustran este proceso $n = 2$ y $n = 4$.



Si $\underline{S}_n$ es la suma de las áreas de los n rectángulos inscritos, entonces

$$\underline{S}_n = f(m_1)\Delta x + f(m_2)\Delta x + \dots + f(m_n)\Delta x$$

ó, con la notación sigma, $\underline{S}_n = \sum_{i=1}^n f(m_i)\Delta x$

A la expresión anterior la llamaremos **suma inferior**. Si $A(Q)$ es el área de la región Q , tenemos que:

$$\underline{S}_n \leq A(Q)$$

Si duplicamos el número n , entonces se duplicarán el número de rectángulos, los que tendrán la mitad de ancho; sin embargo, la suma de las áreas de los nuevos rectángulos aproximará mejor a $A(Q)$ que la suma anterior. Si seguimos con el proceso de duplicar el número n , cada vez obtendremos mejores aproximaciones para el área $A(Q)$. Se prueba en los cursos de cálculo avanzado que los números $\underline{S}_n$, cuando $n \rightarrow +\infty$, tiene un límite que es, precisamente, $A(Q)$. O sea

$$A(Q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{S}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x \quad (1)$$

AREA CON RECTANGULOS CIRCUNSCRITOS

Procedemos como en el caso anterior, con la variante de que en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, en lugar de tomar el mínimo de f , tomamos el máximo. Esto es, en $[x_{i-1}, x_i]$ hay un punto M_i tal que $f(M_i)$ es el máximo absoluto de f en $[x_{i-1}, x_i]$. Construimos el rectángulo R_i con base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $f(M_i)$

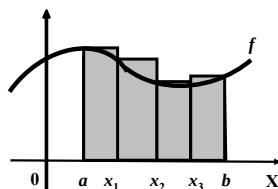
$$\text{Área de } R_i = f(M_i)(x_i - x_{i-1}) = f(M_i)\Delta x$$

Si $\overline{S}_n$ es la suma de las áreas de los n rectángulos, entonces

$$\overline{S}_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x$$

A la expresión anterior la llamaremos **suma superior**. Se cumple:

$$A(Q) \leq \overline{S}_n$$



Se prueba en los cursos de cálculo avanzado que las sumas superiores $\overline{S}_n$, cuando $n \rightarrow +\infty$, tiene un límite que es, precisamente, $A(Q)$. O sea

$$A(Q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{S}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x = A(Q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x$$

Esta igualdad nos permite ir un paso más adelante. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, en lugar de tomar m_i o M_i , donde f alcanza su mínimo y su máximo, tomamos un punto cualquiera c_i que cumpla $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$ y formamos la suma:

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

Como $f(m_i) \leq f(c_i) \leq f(M_i)$, debemos tener que $\underline{S}_n \leq S_n \leq \overline{S}_n$ y, por tanto, los tres límites son iguales:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{S}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{S}_n$$

El resultado anterior nos permite formalizar el concepto de área.

DEFINICION.

Sea $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua y no negativa. El área de la región Q limitada por el gráfico de f , el eje X y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ es

$$A(Q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$

donde $x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$ y $\Delta x = \frac{b-a}{n}$

EJEMPLO 1.

Mediante el método de rectángulos inscritos calcular el área de la región Q comprendida entre el gráfico de la función $f(x) = x^2$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

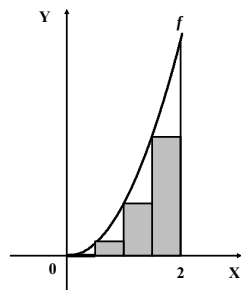
Solución

Dividimos el intervalo $[0, 2]$ en n subintervalos de longitud Δx .

Se tiene que $\Delta x = \frac{2-0}{n} = \frac{2}{n}$ y

$x_0 = 0$, $x_1 = 0 + \Delta x = \Delta x = \frac{2}{n}$

$x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{2}{n} + \frac{2}{n} = 2\left(\frac{2}{n}\right)$, $x_3 = x_2 + \Delta x = 2\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{2}{n} = 3\left(\frac{2}{n}\right)$



$$x_i = x_{i-1} + \Delta x = (i-1) \frac{2}{n} + \frac{2}{n} = i \left(\frac{2}{n} \right)$$

Por otro lado como $f(x) = x^2$ es creciente, el mínimo absoluto de f en cada subintervalo ocurre en el extremo izquierdo del subintervalo. Luego,

$$m_1 = 0 \quad y \quad f(m_1) = f(0) = 0^2 = 0$$

$$m_2 = x_1 = \frac{2}{n} \quad y \quad f(m_2) = f\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2$$

$$m_3 = x_2 = 2\left(\frac{2}{n}\right) \quad y \quad f(m_3) = f\left(2\left(\frac{2}{n}\right)\right) = 2^2 \left(\frac{2}{n}\right)^2$$

$$m_i = x_{i-1} = (i-1)\left(\frac{2}{n}\right) \quad y \quad f(m_i) = f\left((i-1)\left(\frac{2}{n}\right)\right) = (i-1)^2 \left(\frac{2}{n}\right)^2$$

$$\begin{aligned} \underline{S}_n &= f(m_1)\Delta x + f(m_2)\Delta x + \dots + f(m_i)\Delta x + \dots + f(m_n)\Delta x = \sum_{i=1}^n f(m_i)\Delta x \\ &= \sum_{i=1}^n \left[(i-1)^2 \left(\frac{2}{n} \right)^2 \right] \left(\frac{2}{n} \right) = \sum_{i=1}^n (i-1)^2 \frac{8}{n^3} = \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n (i^2 - 2i + 1) \\ &= \frac{8}{n^3} \left[\sum_{i=1}^n i^2 - 2 \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right] = \frac{8}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 2 \frac{n(n+1)}{2} + n \right] \\ &= \frac{8}{n^3} \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n - 6n^2}{6} \right] = \frac{4}{3n^3} [2n^3 - 3n^2 + n] = \frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \end{aligned}$$

Luego

$$A(Q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \underline{S}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{8}{3} - \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right] = \frac{8}{3} - 0 + 0 = \frac{8}{3}$$

EJEMPLO 2.

Mediante rectángulos circunscritos calcular el área de la región Q comprendida entre el gráfico de la función $f(x) = x^2$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

Solución

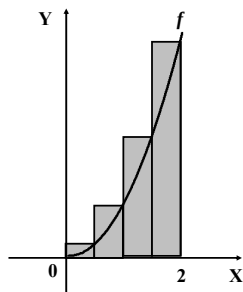
Dividimos $[0, 2]$ en n subintervalos longitud Δx .

$$\text{Se tiene que } \Delta x = \frac{2 - 0}{n} = \frac{2}{n} \quad y$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0 + \Delta x = \Delta x = \frac{2}{n}$$

$$x_2 = x_1 + \Delta x = \frac{2}{n} + \frac{2}{n} = 2 \left(\frac{2}{n} \right)$$

$$x_3 = x_2 + \Delta x = 2 \left(\frac{2}{n} \right) + \frac{2}{n} = 3 \left(\frac{2}{n} \right)$$



$$x_i = x_{i-1} + \Delta x = (i-1)\left(\frac{2}{n}\right) + \frac{2}{n} = i\left(\frac{2}{n}\right)$$

Como $f(x) = x^2$ es creciente, el máximo absoluto lo tenemos en el extremo derecho del subintervalo. Luego,

$$M_1 = x_1 = \frac{2}{n} \quad y \quad f(M_1) = f\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^2$$

$$M_2 = x_2 = 2\left(\frac{2}{n}\right) \quad y \quad f(M_2) = f\left(2\left(\frac{2}{n}\right)\right) = 2^2\left(\frac{2}{n}\right)^2$$

$$M_i = x_i = i\left(\frac{2}{n}\right) \quad y \quad f(M_i) = f\left(i\left(\frac{2}{n}\right)\right) = i^2\left(\frac{2}{n}\right)^2$$

$$\overline{S}_n = f(M_1) \Delta x + f(M_2) \Delta x + \dots + f(M_i) \Delta x + \dots + f(M_n) \Delta x = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x$$

$$= \sum_{i=1}^n \left[i^2 \left(\frac{2}{n} \right)^2 \right] \left(\frac{2}{n} \right) = \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{8}{n^3} \left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

$$= \frac{8}{n^3} \left[\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right] = \frac{4}{3n^3} [2n^3 + 3n^2 + n] = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}$$

En consecuencia,

$$A(Q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{S}_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2} \right) = \frac{8}{3}$$

PROBLEMAS RESUELTOS 3.2

PROBLEMA 1 Hallar el área de la región Q encerrada por el gráfico de $f(x) = x^3$, el eje X y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

Solución

Dividimos al intervalo $[1, 3]$ en n subintervalos

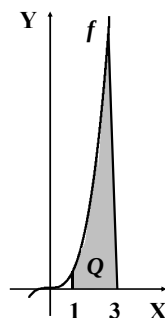
de longitud $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$. Se tiene:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1 + \frac{2}{n}, \quad \dots$$

$$x_i = 1 + i \frac{2}{n}, \quad \dots, \quad x_n = 3$$

Sea c_i el extremo derecho de $[x_{i-1}, x_i]$.

$$\text{Esto es, } c_i = x_i = 1 + i \frac{2}{n} \quad y$$



$$\begin{aligned}
\overline{S}_n &= \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n f\left(1 + i \frac{2}{n}\right) \left(\frac{2}{n}\right) \\
&= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 + i \frac{2}{n}\right)^3 = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left[1 + 3\left(i \frac{2}{n}\right) + 3\left(i \frac{2}{n}\right)^2 + \left(i \frac{2}{n}\right)^3\right] \\
&= \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n 1 + \frac{12}{n^2} \sum_{i=1}^n i + \frac{24}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2 + \frac{16}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3 \\
&= \frac{2}{n} n + \frac{12}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} + \frac{24}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{16}{n^4} \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= 2 + 6\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 4\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + 4\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$A(Q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \overline{S}_n = 2 + 6(1+0) + 4(1+0)(2+0) + 4(1+0)^2 = 20$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.2

Mediante el método de los rectángulos inscritos o circunscritos, calcular el área de la región encerrada por el gráfico f , el eje X y las rectas $x = a$, $x = b$.

1. $f(x) = -2x + 10$, $a = 2$, $b = 5$ Rpta. 9
2. $f(x) = 4 - 3x^2$, $a = -1$, $b = 1$ Rpta. 6
3. $f(x) = x^3$, $a = 0$, $b = 4$ Rpta. 64
4. $f(x) = 1 - x^3$, $a = 0$, $b = 1$ Rpta. 3/4
5. $f(x) = x^2 - x^3$, $a = 0$, $b = 1$ Rpta. 1/12

SECCION 3.3

LA INTEGRAL DEFINIDA

SUMAS DE RIEMANN

Las sumas inferiores y las sumas superiores:

$$\underline{S}_n = \sum_{i=1}^n f(m_i) \Delta x, \quad \overline{S}_n = \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta x,$$

son casos particulares de las llamadas **sumas de Riemann**, a las que describimos a continuación.

Una **partición** $\mathcal{P}$ del intervalo $[a, b]$ es un conjunto de subintervalos:

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$$

de $[a, b]$ de modo que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Se llama **norma** de la partición $\mathcal{P}$, y se denota por $\|\mathcal{P}\|$, al máximo de las longitudes $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \dots, n$. Esto es,

$$\|\mathcal{P}\| = \text{Máximo} \{ \Delta_i x, i = 1, 2, \dots, n \}$$

Una partición que se caracteriza por tener todos sus subintervalos de igual longitud es una **partición regular**. Las particiones tomadas para construir las sumas inferiores y superiores, tratadas en la sección anterior, son particiones regulares. En una partición regular se cumple que:

$$\|\mathcal{P}\| = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Una **selección** para la partición $\mathcal{P}$ es una colección de puntos

$$S = \{ c_1, c_2, c_3, \dots, c_n \}$$

donde cada c_i es tomado en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. El punto c_i puede ser el extremo izquierdo, el extremo derecho o cualquier otro punto interior del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Esto es,

$$x_{i-1} \leq c_i \leq x_i$$

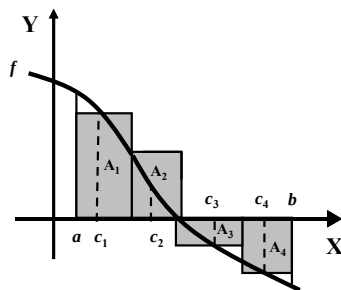
Ahora consideremos una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, no necesariamente continua, y que puede tomar valores positivos o valores negativos. La siguiente definición fue introducida, por primera vez, por **G. F. B. Riemann (1826-1866)** con el objeto de obtener una definición rigurosa de integral definida.

DEFINICION. La **suma de Riemann de orden n** de la función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ determinada por la partición $\mathcal{P}$ y la selección S , es

$$S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_i x$$

Como la función f puede tomar valores negativos algunos $f(c_i)$ pueden ser negativos. En este caso la suma Riemann es igual a la suma de las áreas de los rectángulos que están sobre el eje X más el área de los rectángulos bajo el eje X con signo negativo. Así, en la figura siguiente

$$S_4 = \sum_{i=1}^4 f(c_i) \Delta_i x = A_1 + A_2 - A_3 - A_4$$



EJEMPLO 1. a. Sea $\mathcal{P}$ la partición de $[-1, 2]$ determinada por los puntos $\{-1, 0, 3/2, 2\}$. Hallar $\|\mathcal{P}\|$.

- b. Sea la selección $S = \{c_1, c_2, c_3\}$, donde c_i es el punto medio del intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Hallar la suma de Riemann de la función $f(x) = x^3$, determinada por la partición $\mathcal{P}$ y la selección S .

Solución

a. Se tiene que:

$$a = x_0 = -1, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{3}{2}, \quad x_3 = 2 = b$$

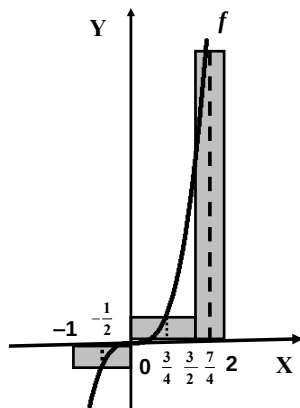
$$\Delta_1 x = x_1 - x_0 = 0 - (-1) = 1,$$

$$\Delta_2 x = x_2 - x_1 = \frac{3}{2} - 0 = \frac{3}{2},$$

$$\Delta_3 x = x_3 - x_2 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$

Luego,

$$\|\mathcal{P}\| = \text{máximo de } \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2} \right\} = \frac{3}{2}$$



b. $c_1 = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{3/2+0}{2} = \frac{3}{4}, \quad c_3 = \frac{2+3/2}{2} = \frac{7}{4}$

Luego,

$$\begin{aligned} S_3 &= f(c_1) \Delta_1 x + f(c_2) \Delta_2 x + f(c_3) \Delta_3 x \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^3 (1) + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{7}{4}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8} + \frac{81}{128} + \frac{343}{128} = \frac{51}{16} \end{aligned}$$

Ahora ya estamos en condiciones de presentar el concepto más importante del curso, el de **integral definida**. Aunque la idea de la integral definida fue conocida y utilizada desde la época de Arquímedes (287–212 A. C.) fue **G. F. B. Riemann** quien logró una formulación satisfactoria. Esta es la formulación que aquí presentamos. Esta integral, ahora es conocida como la integral de Riemann. La idea principal es tomar límites de sumas de Riemann. La única restricción que exigiremos a la función f es que esté definida en el intervalo $[a, b]$. No pedimos continuidad ni que f sea no negativa.

DEFINICION

Una función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es **integrable en $[a, b]$** si existe

un número real, que denotaremos por $\int_a^b f(x) dx$, tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_i x$$

El número $\int_a^b f(x) dx$ es la **integral definida de f de a a b** . Los números a y b

son los **límites de integración**. Más precisamente, **a es el límite inferior** y **b es el límite superior**.

El límite dado en la definición, en términos más precisos, significa:

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que para toda partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ que cumple $\|\mathcal{P}\| < \delta$ y para cualquier selección $S = \{c_i\}$ de $\mathcal{P}$, se cumple que

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_i x \right| < \varepsilon$$

La variable x en $\int_a^b f(x) dx$ es una **variable “muda”**, en el sentido de que puede cambiarse por cualquier otra, sin que se altere el concepto. Así:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(z) dz = \int_a^b f(\theta) d\theta$$

OBSERVACIONES.

1. Esta definición explica la escogencia del símbolo de la integral como una S alargada, ya que la integral definida es el límite de una suma.
2. No debe confundirse la integral definida con la integral indefinida. La primera es un número; mientras que la segunda es una función. Sin embargo ambos conceptos están íntimamente ligados a través de los dos teoremas fundamentales del cálculo, los que veremos a continuación.

La integral definida de una función es un límite, por lo tanto, éste puede o no existir. El siguiente teorema nos da una condición que garantiza la existencia.

Recordemos que una función real **f es acotada**, si existen m y M , números reales, tales que:

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ para todo } x \text{ en el dominio de } f.$$

La gran mayoría de las funciones que aparecen en este texto cumplen con esta condición, en particular, toda función $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a, b]$. En efecto, toda función continua en un intervalo cerrado tiene mínimo y máximo (absolutos).

La demostración del siguiente teorema ésta fuera del alcance de este texto.

TEOREMA 3.4 Teorema de Integrabilidad

Si la **función f es acotada en $[a, b]$** y si es **continua** en este intervalo, con excepción de un número finito de puntos, entonces **f es integrable en $[a, b]$** .

En particular, si **f es continua en todo el intervalo $[a, b]$** , entonces **f es integrable en $[a, b]$** .

De acuerdo a este teorema, son integrables en todo intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Los polinomios.
2. Las funciones seno y coseno.
3. Las funciones racionales cuyo denominador no tenga ceros en $[a, b]$.

Si de antemano se sabe que una función es integrable en un intervalo, o sea, se sabe que existe la integral $\int_a^b f(x) dx$, entonces se puede llegar a ella mediante sumas de Riemann regulares, que son relativamente fáciles de calcular. Para este tipo de sumas, en vista de que,

$$\|\mathcal{P}\| = \Delta x = \frac{b-a}{n} \quad \text{se tiene que,} \quad \|\mathcal{P}\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow n \rightarrow +\infty,$$

EJEMPLO 2. Hallar $\int_0^3 (4 - x^2) dx$

Solución

La función integrando $f(x) = 4 - x^2$ es continua en el intervalo $[0, 3]$. El teorema anterior nos asegura que tal integral existe. Sabiendo con seguridad de que esta existe, entonces podemos llegar a ella mediante límites de sumas de Riemann regulares. Bien, tomemos la partición regular de $[0, 3]$:

$$\Delta x = \frac{3}{n}, \quad x_0 = 0, \quad x_1 = \frac{3}{n}, \quad x_2 = 2\frac{3}{n}, \dots, \quad x_i = i\frac{3}{n}, \dots, \quad x_n = 3$$

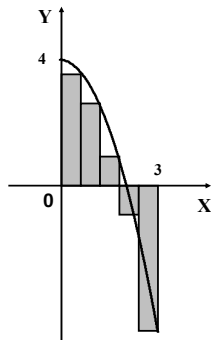
$$\text{Tomamos } c_i = x_i = i\frac{3}{n},$$

La suma de Riemann correspondiente es

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n \left[4 - \left(i\frac{3}{n} \right)^2 \right] \left(\frac{3}{n} \right) \\ &= \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left[4 - \left(i\frac{3}{n} \right)^2 \right] = \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n 4 - \left(\frac{3}{n} \right)^3 \sum_{i=1}^n i^2 \\ &= \frac{3}{n} (4n) - \frac{3^3}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &= 12 - \frac{9}{2n^3} (2n^3 + 3n^2 + n) = 12 - \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \end{aligned}$$

Luego,

$$\int_0^3 (4 - x^2) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x$$



$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[12 - \frac{9}{2} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2} \right) \right] = 12 - \frac{9}{2} (2 + 0 + 0) = 3$$

La relación entre el área de regiones discutidas en la sección anterior y la integral definida lo establece el teorema siguiente.

TEOREMA 3.5 Si f es continua y no negativa en el intervalo $[a, b]$ y Q es la región encerrada por el gráfico de f , eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, entonces el área de Q está dada por

$$A(Q) = \int_a^b f(x) dx$$

Demostración

Por ser f continua, el teorema 3.4 nos asegura que existe la integral $\int_a^b f(x) dx$

Por definición, $\int_a^b f(x) dx$ es el límite de sumas de Riemann. En particular, también es el límite de sumas de Riemann regulares. Pero, por definición, $A(Q)$ es límite de sumas de Riemann regulares. Luego,

$$A(Q) = \int_a^b f(x) dx$$

EJEMPLO 3.

Hallar $\int_0^2 x^2 dx$

Solución

Por el teorema anterior, la integral dada es el área de la región Q . Esto es

$$\int_0^2 x^2 dx = A(Q)$$

Pero, en el ejemplo 2 de la sección anterior encontramos que $A(Q) = 8/3$. Luego

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

PROPIEDADES DE LA INTEGRAL DEFINIDA

En la definición de $\int_a^b f(x) dx$ hemos supuesto que $a < b$. Debemos establecer el significado de esta integral para los casos $a = b$ y $a > b$.

DEFINICION.

1. Si f está definida en a , entonces $\int_a^a f(x) dx = 0$

2. Si $a > b$, $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

Algunas propiedades básicas de la integral definida son presentadas en los dos teoremas siguientes.

TEOREMA 3.6

Si f y g son integrables en $[a, b]$ y k es constante, entonces

$$1. \int_a^b dx = b - a$$

$$2. \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

$$3. \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

Demostración

Sea $\mathcal{P}$ cualquier partición de $[a, b]$ con una selección $\{c_i\}$

1. Como $\int_a^b dx = \int_a^b 1 dx$, $\int_a^b dx$ es la integral definida de la función $f(x) = 1$.

La suma de Riemann de esta función constante $f(x) = 1$ es:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_i x = \sum_{i=1}^n \Delta_i x = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_n - x_{n-1}) = x_n - x_0 = b - a$$

Luego,

$$\int_a^b dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_i x = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} [b - a] = b - a$$

2. Por ser f integrable en $[a, b]$ tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_i x \Rightarrow k \int_a^b f(x) dx = k \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_i x \\ &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n k f(c_i) \Delta_i x = \int_a^b k f(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_i x \pm \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(c_i) \Delta_i x \\ &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(c_i) \pm g(c_i)] \Delta_i x \\ &= \int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx \end{aligned}$$

EJEMPLO 4. Evaluar $\int_0^2 (6x^2 - 5) dx$

Solución

$$\int_0^2 (6x^2 - 5) dx = \int_0^2 6x^2 dx - \int_0^2 5 dx = 6 \int_0^2 x^2 dx - 5 \int_0^2 dx$$

Teniendo en cuenta el ejemplo 2 y por la parte 1 del teorema anterior,

$$\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \quad \text{y} \quad \int_0^2 dx = 2 - 0 = 2$$

Luego,

$$\int_0^2 (6x^2 - 5) dx = 6 \left(\frac{8}{3} \right) - 5(2) = 6$$

TEOREMA 3.7 Sean f y g dos funciones integrables en $[a, b]$

1. $f(x) \geq 0$ en $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$

2. Propiedad de comparación:

$$f(x) \leq g(x) \text{ en } [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

3. Propiedad de acotamiento:

$$m \leq f(x) \leq M \text{ en } [a, b] \Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Demostración

Sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a, b]$ determinada por los puntos:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Sea $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ cualquier selección.

1. Se tiene:

$$f(x) \geq 0 \Rightarrow f(c_i) \geq 0 \Rightarrow f(c_i) \Delta_i x \geq 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_i x \geq 0 \Rightarrow$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_i x \geq 0$$

2. Sea $h(x) = g(x) - f(x)$. Ahora, teniendo en cuenta la propiedad 1,

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow g(x) - f(x) \geq 0 \Rightarrow h(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \geq 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b (g(x) - f(x)) dx &\geq 0 \Rightarrow \int_a^b g(x) dx - \int_a^b f(x) dx \geq 0 \\ \Rightarrow \int_a^b g(x) dx &\geq \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad m \leq f(x) \leq M &\Rightarrow \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx \quad (\text{por 2}) \\ &\Rightarrow m \int_a^b dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \int_a^b dx \quad (\text{por 2, Teo. 3.6}) \\ &\Rightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a) \quad (\text{por 1, Teo. 3.6}) \end{aligned}$$

EJEMPLO 5. Probar que $3 \leq \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx \leq 15$

Solución

Hallamos los extremos absolutos de $f(x) = x^2 - 2x + 2$ en el intervalo $[0, 3]$.

Puntos críticos: $f'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1$

Tiene sólo un punto crítico: 1

Evaluamos f en los puntos críticos y en los extremos del intervalo $[0, 3]$:

$$f(1) = 1, \quad f(0) = 2, \quad f(3) = 5.$$

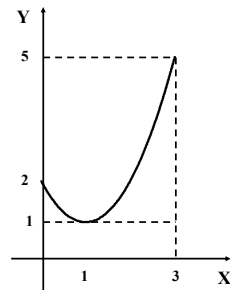
Luego, $f(1) = 1$ es el mínimo absoluto y $f(3) = 5$ es el máximo absoluto.

En consecuencia, se cumple que:

$$1 \leq x^2 - 2x + 2 \leq 5, \quad \forall x \in [0, 3]$$

Aplicando la propiedad de la acotación, tenemos:

$$1(3-0) \leq \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx \leq 5(3-0) \Rightarrow 3 \leq \int_0^3 (x^2 - 2x + 2) dx \leq 15$$



PRIMER TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO

La derivación y la integración, las dos operaciones básicas del Cálculo, están conectadas a través del siguiente resultado que, por su importancia, es conocido con el nombre de **primer teorema fundamental del cálculo**.

TEOREMA 3.8 Primer Teorema Fundamental del Cálculo.

Si f es continua en el intervalo $[a, b]$ y F es la función

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \text{ entonces } F'(x) = f(x)$$

Demostración

Caso 1: f es no negativa.

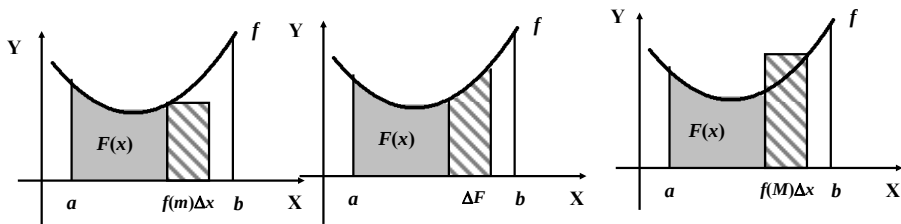
En este caso, por el teorema 3.5, la función

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

mide el área de la región bajo el gráfico de f en el intervalo $[a, x]$

Si agregamos a x un incremento Δx , el área se incrementa en ΔF . Sea $f(m)$ el mínimo y $f(M)$ el máximo de f en $[x, x + \Delta x]$. se tiene que

$$f(m)\Delta x \leq \Delta F \leq f(M)\Delta x$$



Dividimos entre Δx la desigualdad anterior:

$$f(m) \leq \frac{\Delta F}{\Delta x} \leq f(M)$$

Tomando límites en la desigualdad anterior cuando $\Delta x \rightarrow 0$:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(m) \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} \leq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(M)$$

Pero, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = F'(x)$ y, por ser f continua,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(m) = f(x) \quad \text{y} \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(M) = f(x)$$

Reemplazando estos valores en la desigualdad anterior,

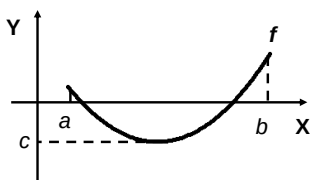
$$f(x) \leq F'(x) \leq f(x) \Rightarrow F'(x) = f(x)$$

Caso 2: f toma valores negativos.

Si c es el mínimo de f en $[a, b]$, entonces, para todo x en $[a, b]$,

$$f(x) \geq c \quad \text{ó bien} \quad f(x) - c \geq 0.$$

Luego, la función $g(x) = f(x) - c$ es continua y no negativa.



Si $G(x) = \int_a^x g(t) dt$, entonces, por el caso 1, $G'(x) = g(x)$. Pero,

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_a^x g(t) dt = \int_a^x (f(t) - c) dt = \int_a^x f(t) dt - c \int_a^x 1 dt \\ &= F(x) - c(x - a) \end{aligned}$$

Luego,

$$F(x) = G(x) + c(x - a)$$

Derivando esta igualdad:

$$F'(x) = G'(x) + c = g(x) + c = f(x) - c + c = f(x)$$

OBSERVACION.

La conclusión del teorema anterior, con la notación de Leibniz, nos dice que:

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

COROLARIO.

Si f es continua, h es una función diferenciable en $[a, b]$ y

$$H(x) = \int_a^{h(x)} f(t) dt, \text{ entonces } H'(x) = f(h(x))h'(x)$$

Demostración

Sea $F(x) = \int_a^x f(t) dt$. Se tiene que

$$F(h(x)) = \int_a^{h(x)} f(t) dt = H(x).$$

Esto es, $H(x) = F(h(x))$.

Luego, aplicando la regla de la cadena y el teorema anterior, se tiene:

$$H'(x) = F'(h(x))h'(x) = f(h(x))h'(x)$$

EJEMPLO 6.

Hallar: a. $\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{e^t}{t+1} dt$

$$\text{b. } H'(x) \text{ si } H(x) = \int_0^{x^3} \frac{e^t}{t+1} dt \qquad \text{c. } G'(x) \text{ si } G(x) = \int_{\sqrt{x}}^0 \frac{e^t}{t+1} dt$$

Solución

a. Por el teorema anterior, $\frac{d}{dx} \int_0^x \frac{e^t}{t+1} dt = \frac{e^x}{x+1}$

b. Si $h(x) = x^3$ y $f(t) = \frac{e^t}{t+1}$ se tiene que

$$H(x) = \int_0^{x^3} \frac{e^t}{t+1} dt = \int_0^{h(x)} f(t) dt$$

Luego, por el corolario anterior,

$$H'(x) = f(h(x))h'(x) = \frac{e^{x^3}}{x^3+1} (3x^2) = \frac{3x^2 e^{x^3}}{x^3+1}$$

c. Si $h(x) = \sqrt{x}$ y $f(t) = \frac{e^t}{t+1}$ se tiene que

$$G(x) = \int_{\sqrt{x}}^0 \frac{e^t}{t+1} dt = - \int_0^{\sqrt{x}} \frac{e^t}{t+1} dt = - \int_0^{h(x)} f(t) dt$$

$$\text{Luego, } G'(x) = -f(h(x))h'(x) = -\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+1} \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = -\frac{e^{\sqrt{x}}}{2(x+\sqrt{x})}$$

SEGUNDO TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CALCULO

La evaluación de las integrales definidas mediante sumas de Riemann es lenta y tediosa. El siguiente resultado, conocido como el segundo teorema fundamental del cálculo, nos proporciona el método más adecuado y elegante.

TEOREMA 3.9 Segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

Si f es continua en $[a, b]$ y F es una antiderivada de f , entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Demostración

Por el teorema 3.4 sabemos que existe la integral $\int_a^b f(x) dx$. Por definición, esta integral es límite de sumas de Riemann. Tomemos una partición de $[a, b]$, determinada por los puntos:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < \dots < x_n = b$$

Tenemos que

$$\begin{aligned}
 F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) \\
 &= [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \dots + [F(x_1) - F(x_0)] \\
 &= \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})]
 \end{aligned}$$

Por el teorema del valor medio (para derivadas) en cada subintervalo $[x_i, x_{i-1}]$ existe un c_i tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i) \Delta_i x$$

Reemplazando esta igualdad en la anterior se tiene

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_i x$$

Observar que la suma de la derecha es una suma de Riemann de f en $[a, b]$.

Tomando límites obtenemos el resultado buscado:

$$F(b) - F(a) = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta_i x = \int_a^b f(x) dx$$

NOTACION. La diferencia $F(b) - F(a)$ se denota así: $F(x) \Big|_a^b$. Esto es,

$$F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Ahora, con esta notación, la conclusión del segundo teorema fundamental del cálculo podemos escribirlo así:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

OBSERVACIONES.

- a. El teorema anterior establece una conexión directa entre la integral definida y la indefinida. Esta conexión se ilustra mejor usando como la antiderivada de f a la integral indefinida, del modo siguiente:

$$\int_a^b f(x) dx = \int f(x) dx \Big|_a^b$$

- b. Para calcular la integral definida $\int_a^b f(x) dx$, se procede en 2 pasos:

Paso 1. Hallamos la integral indefinida $\int f(x) dx = F(x) + C$

Paso 2. Evaluamos $F(b) - F(a)$. Prescindimos de la constante C , ya que ésta se simplifica. En efecto: $[F(b) + C] - [F(a) + C] = F(b) - F(a)$

EJEMPLO 7. Evaluar $\int_0^2 x^2 dx$

Solución

Tenemos que $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$. Luego, $\int_0^2 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$

Muchas veces, el cálculo de la integral indefinida puede hacerse directamente.

EJEMPLO 8. Se tiene que:

$$\begin{aligned} \text{a. } \int_{-2}^4 (x^3 - 6x + 2) dx &= \left[\frac{x^4}{4} - 3x^2 + 2x \right]_{-2}^4 \\ &= \left(\frac{4^4}{4} - 3(4)^2 + 2(4) \right) - \left(\frac{(-2)^4}{4} - 3(-2)^2 + 2(-2) \right) = 36 \end{aligned}$$

$$\text{b. } \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = \left[-\cos \theta \right]_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = -2$$

$$\text{c. } \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} \Big|_0^a = \frac{1}{a} \tan^{-1}(1) - \frac{1}{a} \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{4a} - 0 = \frac{\pi}{4a}$$

$$\text{d. } \int_1^e \ln x dx = \left[x \ln x - x \right]_1^e = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = 0 + 1 = 1$$

$$\text{e. } \int_{-2}^{-3} \frac{dx}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_{-2}^{-3} = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 3) = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{3}$$

EJEMPLO 9. Evaluar $\int_1^9 \left[\frac{1}{t^2} - \sqrt{t} \right] dt$

Solución

$$\begin{aligned} \int_1^9 \left[\frac{1}{t^2} - \sqrt{t} \right] dt &= \int_1^9 \left[t^{-2} - t^{1/2} \right] dt = \left[-\frac{1}{t} - \frac{2}{3} t^{3/2} \right]_1^9 \\ &= \left(-\frac{1}{9} - \frac{2}{3} (9)^{3/2} \right) - \left(-\frac{1}{1} - \frac{2}{3} (1)^{3/2} \right) = -\frac{148}{9} \end{aligned}$$

EJEMPLO 10.

Hallar el área de la región Q encerrada por la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{5x+4}$ el eje X , las rectas $x=0$, $x=1$.

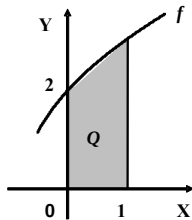
Solución

Sabemos que $A(Q) = \int_0^1 \sqrt{5x+4} \, dx$

Si $u = 5x+4$, entonces $du = 5 \, dx$ y

$$\begin{aligned} \int \sqrt{5x+4} \, dx &= \frac{1}{5} \int \sqrt{5x+4} (5 \, dx) = \frac{1}{5} \int \sqrt{u} \, du = \\ &= \frac{1}{5} \int u^{1/2} \, du = \frac{2}{15} u^{3/2} + C = \frac{2}{15} (5x+4)^{3/2} + C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Luego, } A(Q) &= \int_0^1 \sqrt{5x+4} \, dx = \left[\frac{2}{15} (5x+4)^{3/2} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{15} (5(1)+4)^{3/2} - \frac{2}{15} (5(0)+4)^{3/2} = \frac{54}{15} - \frac{16}{15} = \frac{38}{15} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 11.**

Evaluar $\int_1^4 \sqrt{t} \ln t \, dt$

Solución

Usando la fórmula de reducción 34, tenemos:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{t} \ln t \, dt &= \int t^{1/2} \ln t \, dt = \frac{2}{3} t^{3/2} \ln t - \frac{2}{3} \int t^{1/2} \, dt \\ &= \frac{2}{3} t^{3/2} \ln t - \frac{4}{9} t^{3/2} + C \end{aligned}$$

$$\text{Luego, } \int_1^4 \sqrt{t} \ln t \, dt = \left[\frac{2}{3} t^{3/2} \ln t - \frac{4}{9} t^{3/2} \right]_1^4 = \frac{16}{3} \ln 4 - \frac{28}{9} \approx 4,282,00$$

TEOREMA 3.10**Propiedad Aditiva de Intervalos.**

Si f es continua en $[a, b]$ y $a < c < b$, entonces f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$ y se cumple que:

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$$

Demostración

Ver el problema resuelto 17.

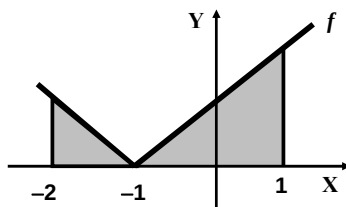
EJEMPLO 12. Hallar el área de la región encerrada por la gráfica de la función $f(x) = |x + 1|$ el eje X, las rectas $x = -2$, $x = 1$.

Solución

El área es $A = \int_{-2}^1 |x + 1| dx$

La función $f(x) = |x + 1|$ es continua en el intervalo $[-2, 1]$ y, por tanto, es integrable en este intervalo. Además,

$$|x + 1| = \begin{cases} -x - 1, & x < -1 \\ x + 1, & x \geq -1 \end{cases}$$



Dividamos el intervalo $[-2, 1]$ en los intervalos $[-2, -1]$ y $[-1, 1]$ para obtener:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 |x + 1| dx = \int_{-2}^{-1} (-x - 1) dx + \int_{-1}^1 (x + 1) dx \\ &= \left[-\frac{x^2}{2} - x \right]_{-2}^{-1} + \left[\frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 = \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

REGLA DE SUSTITUCION PARA INTEGRALES DEFINIDAS

Vamos a extender la regla de sustitución al caso de las integrales definidas.

TEOREMA 3.11 Si g es diferenciable en $[a, b]$ y f es continua en el rango de $u = g(x)$, entonces

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

Demostración

Sea F una antiderivada de f . Entonces $F(g(x))$ es una antiderivada de $f(g(x))g'(x)$. Por el Segundo Teorema Fundamental del Cálculo, tenemos

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = F(g(b)) - F(g(a)) \quad (1)$$

Invocando otra vez al segundo teorema fundamental del cálculo,

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = F(g(b)) - F(g(a)) \quad (2)$$

De (1) y (2) obtenemos:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du$$

EJEMPLO 13. Hallar $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x^3 + 9}}$

Solución

Sea $u = g(x) = 2x^3 + 9$. Entonces

$$du = 6x^2 dx, \quad x = 0 \Rightarrow u = g(0) = 9 \quad \text{y} \quad x = 2 \Rightarrow u = g(2) = 25.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x^3 + 9}} &= \frac{1}{6} \int_0^2 \frac{6x^2 dx}{\sqrt{2x^3 + 9}} = \frac{1}{6} \int_{g(0)}^{g(2)} \frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{1}{6} \int_9^{25} u^{-1/2} du \\ &= \frac{1}{6} \left[2u^{1/2} \right]_9^{25} = \frac{2}{6} \left[\sqrt{u} \right]_9^{25} = \frac{1}{3} [\sqrt{25} - \sqrt{9}] = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

EJEMPLO 14. Hallar $\int_0^{\pi/4} \sin^2 2\theta \cos 2\theta d\theta$

Solución

Sea $u = g(\theta) = \sin 2\theta$. Entonces $du = 2 \cos 2\theta d\theta$ y

$$\theta = 0 \Rightarrow u = g(0) = \sin 2(0) = 0. \quad \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = g(\pi/4) = \sin(2(\pi/4)) = 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \sin^2 2\theta \cos 2\theta d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sin^2 2\theta (2 \cos 2\theta d\theta) \\ &= \frac{1}{2} \int_{g(0)}^{g(\pi/4)} u^2 du = \frac{1}{2} \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{2} \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

PROBLEMAS RESUELTOS 3.3

PROBLEMA 1. Evaluar: a. $\frac{d}{dx} \int_0^x e^{-t^2} dt$

b. $\frac{d}{dx} \int_x^0 e^{-t^2} dt$

c. $\frac{d}{dx} \int_0^2 e^{-t^2} dt$

d. $\int_0^2 \left(\frac{d}{dx} (e^{-x^2}) \right) dx$

Solución

a. Por el teorema 3.8: $\frac{d}{dx} \int_0^x e^{-t^2} dt = e^{-x^2}$

b. Intercambiando los límites de integración y usando el resultado anterior:

$$\frac{d}{dx} \int_x^0 e^{-t^2} dt = -\frac{d}{dx} \int_0^x e^{-t^2} dt = -e^{-x^2}$$

c. La integral $\int_0^2 e^{-t^2} dt$ es una constante. Luego, $\frac{d}{dx} \int_0^2 e^{-t^2} dt = 0$

d. Una antiderivada de $\frac{d}{dx}(e^{-x^2})$ es e^{-x^2} . Luego,

$$\int_0^2 \left(\frac{d}{dx}(e^{-x^2}) \right) dx = \left[e^{-x^2} \right]_0^2 = e^{-2^2} - e^{-0^2} = e^{-4} - 1 \approx -0.98$$

PROBLEMA 2. Hallar la derivada de cada una de las siguientes funciones:

1. $F(x) = \int_0^{\ln x} \sqrt{1+t^3} dt$ 2. $G(x) = \int_{\sin x}^0 \sqrt{1+t^3} dt$ 3. $H(x) = \int_{\sin x}^{\ln x} \sqrt{1+t^3} dt$

Solución

Sea $g(u) = \int_0^u \sqrt{1+t^3} dt$, entonces $g'(u) = \sqrt{1+u^3}$ (Teo. 3. 8)

1. Si $h(x) = \ln x$, entonces $F(x) = g(h(x))$. Luego, por la regla de la cadena,

$$F'(x) = g'(h(x))h'(x) = g'(\ln x)h'(x) = \sqrt{1+(\ln x)^3} \left(\frac{1}{x} \right) = \frac{\sqrt{1+\ln^3 x}}{x}$$

2. Si $h(x) = \sin x$, entonces

$$G(x) = \int_{\sin x}^0 \sqrt{1+t^3} dt = - \int_0^{\sin x} \sqrt{1+t^3} dt = -g(h(x))$$

Ahora, aplicado la regla de la cadena:

$$G'(x) = -g'(h(x))h'(x) = -\sqrt{1+\sin^3 x} (\cos x) = -\cos x \sqrt{1+\sin^3 x}$$

3. Usando la propiedad aditiva de los intervalos:

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_{\sin x}^{\ln x} \sqrt{1+t^3} dt = \int_{\sin x}^0 \sqrt{1+t^3} dt + \int_0^{\ln x} \sqrt{1+t^3} dt \\ &= \int_0^{\ln x} \sqrt{1+t^3} dt - \int_0^{\sin x} \sqrt{1+t^3} dt = F(x) - G(x) \end{aligned}$$

Esto es, $H(x) = F(x) - G(x)$

Luego, derivando,

$$H'(x) = F'(x) - G'(x) = \frac{\sqrt{1+\ln^3 x}}{x} - \cos x \sqrt{1+\sin^3 x}.$$

PROBLEMA 3. Calcular $\int_4^9 \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} dt$

Solución

Hacemos el cambio de variable $u = 1 + \sqrt{t}$. En este caso,

$$t = (u-1)^2, \quad dt = 2(u-1) du \quad \text{y} \quad 1 - \sqrt{t} = 2 - u$$

Además, $t = 4 \Rightarrow u = 3$ y $t = 9 \Rightarrow u = 4$. Luego,

$$\begin{aligned} \int_4^9 \frac{1-\sqrt{t}}{1+\sqrt{t}} dt &= \int_3^4 \frac{(2-u)}{u} [2(u-1) du] = 2 \int_3^4 \left(-u + 3 - \frac{2}{u} \right) du \\ &= \left(-u^2 + 6u - 4 \ln |u| \right) \Big|_3^4 = 4 \ln \frac{3}{4} - 1 \end{aligned}$$

PROBLEMA 4. Calcular $\int_0^{2\pi/3} \frac{dx}{5+4\cos x}$

Solución

Hacemos el cambio de variable $z = \tan \frac{x}{2}$, para el cual

$$\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2} \quad \text{y} \quad dx = \frac{2 dz}{1+z^2}$$

$$x = 0 \Rightarrow z = \tan \frac{0}{2} \Rightarrow z = 0; \quad x = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow z = \tan \frac{2\pi/3}{2} = \sqrt{3}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi/3} \frac{dx}{5+4\cos x} &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2 dz}{5+4 \frac{1-z^2}{1+z^2}} = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2 dz}{9+z^2} = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{dz}{3^2+z^2} \\ &= \frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{z}{3} \Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \tan^{-1} \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{2}{3} \tan^{-1} 0 = \frac{2}{3} \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{9} \end{aligned}$$

PROBLEMA 5. Calcular $\int_0^{16} \frac{x^{1/4} dx}{1 + x^{1/2}}$

Solución

Sea $x = z^4$. Entonces $dx = 4z^3 dz$, $x = 0 \Rightarrow z = 0$, $x = 16 \Rightarrow z = 2$.

Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^{16} \frac{x^{1/4} dx}{1 + x^{1/2}} &= \int_0^2 \frac{z(4z^3 dz)}{1 + z^2} = 4 \int_0^2 \left(z^2 - 1 + \frac{1}{1+z^2} \right) dz \\ &= 4 \left[\frac{z^3}{3} - z + \tan^{-1} z \right]_0^2 = \frac{8}{3} + 4 \tan^{-1} 2 \end{aligned}$$

PROBLEMA 6. Calcular $\int_0^{\pi} \sqrt{2+2 \cos \alpha} d\alpha$

Solución

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sqrt{2+2 \cos \alpha} d\alpha &= \int_0^{\pi} \sqrt{2(1+\cos \alpha)} d\alpha = \int_0^{\pi} \sqrt{4 \left(\frac{1+\cos \alpha}{2} \right)} d\alpha \\ &= 2 \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} d\alpha = 2 \int_0^{\pi} \cos \frac{\alpha}{2} d\alpha \\ &= 4 \left[\sin \frac{\alpha}{2} \right]_0^{\pi} = 4 \sin \frac{\pi}{2} - 4 \sin 0 = 4 \end{aligned}$$

PROBLEMA 7. Calcular $\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$

Solución

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}}$$

Sea $u = x - 2$. Entonces $du = dx$, $x = 2 \Rightarrow u = 0$, $x = 5 \Rightarrow u = 3$

Luego,

$$\int_2^5 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_0^3 \frac{du}{\sqrt{9-u^2}} = \left[\sin^{-1} \frac{u}{3} \right]_0^3 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}$$

PROBLEMA 8. Calcular $\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Solución

Sea $u = \operatorname{sen}^{-1} t$. Entonces $du = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $t=0 \Rightarrow u=0$, $t=\frac{1}{2} \Rightarrow u=\frac{\pi}{6}$

Luego,

$$\int_0^{1/2} \frac{\operatorname{sen}^{-1} t}{\sqrt{1-t^2}} dt = \int_0^{\pi/6} u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^{\pi/6} = \frac{\pi^2}{72}$$

PROBLEMA 9. Calcular $\int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}}$

Solución

Sea $u = y^3$. Entonces $du = 3y^2 dy$, $y=0 \Rightarrow u=0$, $y=1 \Rightarrow u=1$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{y^2 dy}{\sqrt{y^6+4}} &= \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{3y^2 dy}{\sqrt{(y^3)^2+4}} = \frac{1}{3} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u^2+2^2}} \\ &= \frac{1}{3} \ln \left(u + \sqrt{u^2+4} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \ln \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

PROBLEMA 10. Calcular $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\cosh^2 x}$

Solución

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\cosh^2 x} &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \operatorname{sech}^2 x dx = \tanh x \Big|_{\ln 2}^{\ln 3} = \tanh(\ln 3) - \tanh(\ln 2) \\ &= \frac{e^{\ln 3} - e^{-\ln 3}}{e^{\ln 3} + e^{-\ln 3}} - \frac{e^{\ln 2} - e^{-\ln 2}}{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}} = \frac{3-3^{-1}}{3+3^{-1}} - \frac{2-2^{-1}}{2+2^{-1}} = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

PROBLEMA 11. Hallar $\int_{-2}^3 |x^2-1| dx$

Solución

Sea $f(x) = |x^2-1|$. De acuerdo a la definición de valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & \text{si } x^2-1 \geq 0 \\ -x^2+1, & \text{si } x^2-1 < 0 \end{cases}$$

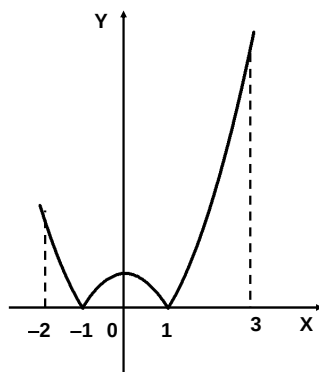
Pero,

$$x^2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ó } x \geq 1$$

$$x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Por tanto, la función f puede escribirse así:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{si } x \leq -1 \\ -x^2 + 1, & \text{si } -1 < x < 1 \\ x^2 - 1, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$



Ahora,

$$\begin{aligned} \int_{-2}^3 |x^2 - 1| dx &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1) dx + \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx + \int_1^3 (x^2 - 1) dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{-2}^{-1} + \left[-\frac{x^3}{3} + x \right]_{-1}^1 + \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_1^3 \\ &= \left(-1 + \frac{7}{3} \right) + \left(2 - \frac{2}{3} \right) + \left(7 - \frac{1}{3} \right) = \frac{28}{3} \end{aligned}$$

PROBLEMA 12. Mediante una integral definida hallar el siguiente límite:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right)$$

Solución

En $S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$ sacamos factor común $\frac{1}{n}$:

$$S_n = \left(\frac{1}{1+1/n} + \frac{1}{1+2/n} + \dots + \frac{1}{n+n/n} \right) \frac{1}{n}$$

Vemos que S_n es la suma de Riemann para la función $f(x) = \frac{1}{1+x}$, correspondiente a la partición regular del intervalo $[0, 1]$ determinada por

$$\Delta x = \frac{1}{n}; \quad x_i = \frac{i}{n}, i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ y la selección } c_i = x_i = \frac{i}{n}$$

En efecto:

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1+i/n} \right) \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}$$

Luego,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n+i} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \left[\ln(1+x) \right]_0^1 = \ln(2) - \ln(1) = \ln 2$$

PROBLEMA 13. Hallar el área de la región Q encerrada por el eje X y los gráficos de las funciones $y = \sqrt{x+1}$, $y = -x + 5$.

Solución

Halleemos los puntos donde los gráficos de las funciones se interceptan.

$$\sqrt{x+1} = -x + 5 \Rightarrow x^2 - 11x + 24 = 0 \Rightarrow x = 3 \text{ ó } x = 8$$

Desechamos la solución $x = 8$ porque ésta no satisface la ecuación inicial. Ahora, para $x = 3$ obtenemos $y = 2$. Esto significa que ambos gráficos se interceptan en el punto $(3, 2)$.

Por otro lado, el eje X es cortado por el gráfico de $y = \sqrt{x+1}$ en $x = -1$ y por el gráfico de $y = -x + 5$ en $x = 5$.

Observando el diagrama vemos que:

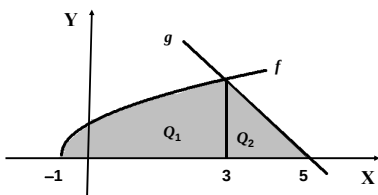
$$A(Q) = A(Q_1) + A(Q_2)$$

Pero,

$$A(Q_1) = \int_{-1}^3 \sqrt{x+1} \, dx = \left[\frac{2}{3} (x+1)^{3/2} \right]_{-1}^3 = \frac{16}{3}$$

$$A(Q_2) = \int_3^5 (-x+5) \, dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 5x \right]_3^5 = 2$$

$$\text{Luego, } A(Q) = \frac{16}{3} + 2 = \frac{22}{3}$$



PROBLEMA 14. Hallar el área de la región Q limitada por el eje X , la catenaria

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \text{ y las rectas } x = -a, x = a$$

Solución

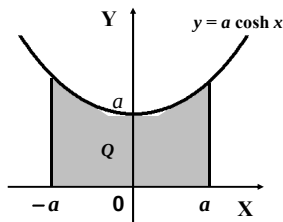
$$A(Q) = \int_{-a}^a a \cosh \frac{x}{a} \, dx$$

Sea $u = \frac{x}{a}$. Entonces

$$du = \frac{dx}{a}, \quad x = -a \Rightarrow u = -1, \quad x = a \Rightarrow u = 1.$$

Luego,

$$\begin{aligned} A(Q) &= \int_{-a}^a a \cosh \frac{x}{a} \, dx = a^2 \int_{-a}^a \cosh \frac{x}{a} \left(\frac{dx}{a} \right) = a^2 \int_{-1}^1 \cosh u \, du \\ &= a^2 \sinh u \Big|_{-1}^1 = a^2 [\sinh(1) - \sinh(-1)] = 2a^2 \sinh(1) \end{aligned}$$



$$= 2a^2 \left(\frac{e^1 - e^{-1}}{2} \right) = a^2 \left(e - \frac{1}{e} \right)$$

PROBLEMA 15. Probar que $\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \sin^2 x} \, dx \leq \frac{\pi\sqrt{5}}{4}$

Solución

Podemos proceder como en el ejemplo 5, hallando los valores extremos de la función $f(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{4} \sin^2 x}$ en el intervalo cerrado $[0, \pi/2]$. Sin embargo, con el ánimo de mostrar otros caminos, procedemos de otra forma.

Sabemos que, para todo real x se tiene:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{4} \sin^2 x \leq \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$1 + 0 \leq 1 + \frac{1}{4} \sin^2 x \leq 1 + \frac{1}{4} \Rightarrow 1 \leq 1 + \frac{1}{4} \sin^2 x \leq \frac{5}{4} \Rightarrow$$

$$\sqrt{1} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{4} \sin^2 x} \leq \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow 1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{4} \sin^2 x} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}$$

La desigualdad anterior es cierta para todo x real. En particular se cumple:

$$1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{4} \sin^2 x} \leq \frac{\sqrt{5}}{2}, \quad \forall x \in [0, \pi/2].$$

Luego, por la propiedad de acotamiento,

$$\frac{\pi}{2} \leq \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + \frac{1}{4} \sin^2 x} \, dx \leq \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi\sqrt{5}}{4}$$

PROBLEMA 16. Probar que $\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$

Solución

Usaremos la siguiente propiedad del valor absoluto:

$$|x| \leq k \Leftrightarrow -k \leq x \leq k$$

Bien, tenemos que:

$$f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)| \Rightarrow$$

$$-\int_a^b |f(x)| \, dx \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \Rightarrow \left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx$$

PROBLEMA 17. (Teorema 3.10). Si f es continua en $[a, b]$ y $a < c < b$, entonces f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$ y se cumple:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

Solución

Si f es continua en $[a, b]$, entonces f es continua en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Por el teorema 3.4, f es integrable en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Por otro lado, por el teorema 3.8, f tiene una antiderivada en $[a, b]$. Sea F esta antiderivada.

Ahora, usando el segundo teorema fundamental del cálculo, tenemos que

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= F(b) - F(a) = [F(b) - F(c)] + [F(c) - F(a)] \\ &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.3

En los problemas del 1 al 42, evaluar las integrales definidas

- | | | | |
|---|--------------------------|---|----------------------------------|
| 1. $\int_1^4 5 dx$ | Rpta. 15 | 2. $\int_0^3 (2+e) dx$ | Rpta. $3(2+e)$ |
| 3. $\int_{-2}^3 4x dx$ | Rpta. 10 | 4. $\int_{-1/2}^{1/2} (2y-1) dy$ | Rpta. -1 |
| 5. $\int_{-1}^1 (6u^2 - 4u + 1) du$ | Rpta. 6 | 6. $\int_{-1}^3 z^3 dz$ | Rpta. 20 |
| 7. $\int_0^2 (t-2) dt$ | Rpta. -2 | 8. $\int_0^2 3y^2 (y^3 + 1) dy$ | Rpta. 40 |
| 9. $\int_1^{25} \sqrt{u} du$ | Rpta. $\frac{248}{3}$ | 10. $\int_1^4 5\sqrt{x}(x-1) dx$ | Rpta. $\frac{116}{3}$ |
| 11. $\int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - 1 \right) dy$ | Rpta. -1 | 12. $\int_1^5 \sqrt{x-1} dx$ | Rpta. $\frac{16}{3}$ |
| 13. $\int_0^1 6t\sqrt{t^2+1} dt$ | Rpta. $4\sqrt{2} - 2$ | 14. $\int_1^4 \frac{du}{\sqrt{4u+9}}$ | Rpta. $\frac{1}{2}(5-\sqrt{13})$ |
| 15. $\int_0^1 x^2 e^{x^3} dx$ | Rpta. $\frac{1}{3}(e-1)$ | 16. $\int_0^8 \frac{w dw}{(1+w)^{3/2}}$ | Rpta. $\frac{8}{3}$ |

$$17. \int_{-8}^0 \frac{z - z^2}{4\sqrt[3]{z}} dz \quad \text{Rpta. } \frac{144}{5}$$

$$18. \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \quad \text{Rpta. } \frac{1}{2}$$

$$19. \int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln x)} \quad \text{Rpta } \ln 2$$

$$20. \int_0^1 (3x+4)e^{2x} dx \quad \text{Rpta } \frac{11e^2}{4} - \frac{5}{4}$$

$$21. \int_0^4 9\sqrt{x}\sqrt{1+x\sqrt{x}} dx \quad \text{Rpta } 104$$

$$22. \int_a^{8a} \frac{dx}{\sqrt{2ax}} \quad \text{Rpta } 4 - \sqrt{2}$$

$$23. \int_1^{\ln 2} \frac{e^{2x} - 1}{e^x} dx \quad \text{Rpta } \frac{5}{2} - e - \frac{1}{e}$$

$$24. \int_{-1}^1 |x| dx \quad \text{Rpta } 1$$

$$25. \int_{-3}^3 |x^3| dx \quad \text{Rpta } \frac{81}{2}$$

$$26. \int_2^2 e^{-x^2} dx \quad \text{Rpta } 0$$

$$27. \int_{-2}^3 \sqrt{|x| - x} dx \quad \text{Rpta } \frac{8}{3}$$

$$28. \int_{-1}^2 |x^2 - x| dx \quad \text{Rpta } \frac{11}{2}$$

$$29. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}} \quad \text{Rpta } \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

$$30. \int_3^4 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2} \quad \text{Rpta } \ln \frac{4}{3}$$

$$31. \int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx \quad \text{Rpta } 1 - \cos 1$$

$$32. \int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^3 x dx \quad \text{Rpta } \frac{1}{12}$$

$$33. \int_0^{\pi/4} \sec^4 x dx \quad \text{Rpta } \frac{4}{3}$$

$$34. \int_{\pi/6}^{\pi/3} \cot^4 x dx \quad \text{Rpta } \frac{8}{9\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6}$$

$$35. \int_0^{\pi} |\cos^3 x| dx \quad \text{Rpta } \frac{4}{3}$$

$$36. \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx \quad \text{Rpta } \tan^{-1} e - \frac{\pi}{4}$$

$$37. \int_e^{e^2} \frac{dx}{x \ln x} \quad \text{Rpta } \ln 2$$

$$38. \int_0^1 z^2 2^{-z^3} dz \quad \text{Rpta } \frac{1}{6 \ln 2}$$

$$39. \int_0^1 \sinh^2 x dx \quad \text{Rpta } \frac{1}{4} \sinh(2) - \frac{1}{2}$$

$$40. \int_0^1 \cosh x e^{\sinh x} dx \quad \text{Rpta } e^{\sinh 1} - 1$$

$$41. \int_0^1 \frac{\cosh 2x}{1 + \sinh 2x} dx \quad \text{Rpta } \frac{1}{2} \ln(1 + \sinh(2)) = \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2}\right)$$

$$42. \int_0^1 \frac{e^{2x} - e^{-2x}}{e^{2x} + e^{-2x}} dx \quad \text{Rpta } \frac{1}{2} \ln(\cosh(2))$$

En los problemas del 43 al 48 hallar el límite dado, expresándolo como una integral definida y evaluando la integral.

$$43. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i}{n}$$

$$\text{Rpta. } \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

$$44. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^4} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^3}$$

$$\text{Rpta. } \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$$

$$45. \lim_{n \rightarrow +\infty} 8 \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(2i)^2}{n^2}$$

$$\text{Rpta. } \int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3}$$

$$46. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{n}{(n+i)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+(i/n))^2}$$

$$\text{Rpta. } \int_0^1 \frac{1}{(1+x)^2} dx = \frac{1}{2}$$

$$47. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n+i}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{1+(i/n)}}$$

$$\text{Rpta. } 2(\sqrt{2} - 1)$$

$$48. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n e^{2i/n}$$

$$\text{Rpta. } \int_0^2 e^x dx = e^2 - 1$$

En los problemas del 49 al 52 hallar la derivada de la función dada.

$$49. F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \sin(t^2) dt$$

$$\text{Rpta. } \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$$

$$50. G(x) = \int_{-x^4}^0 \sin(t^2) dt$$

$$\text{Rpta. } 4x^3 \sin(x^8)$$

$$51. H(x) = \int_{-x^4}^{\sqrt{x}} \sin(t^2) dt$$

$$\text{Rpta. } 4x^3 \sin(x^8) + \frac{\sin x}{2\sqrt{x}}$$

$$52. L(x) = \int_{\tan x}^{1/x} e^{-t^2} dt$$

$$\text{Rpta. } -\frac{1}{x^2} e^{-1/x^2} - \sec^2 x e^{-\tan^2 x}$$

En los problemas del 53 al 55 probar las desigualdades dadas.

$$53. 1 \leq \int_1^4 \frac{7}{x^2+5} dx \leq \frac{7}{2}$$

$$54. \frac{\pi}{6} \leq \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin x dx \leq \frac{\pi}{3}$$

$$55. 1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx \leq \sqrt{2} \approx 1.414$$

$$56. \text{ a. Probar: } \sqrt{1+x^3} \leq 1+x^3, \forall x \geq 0. \text{ Sugerencia: } 1+x^3 \leq (1+x^3)^2$$

b. Usar la parte a para mejorar la desigualdad 55, probando que:

$$1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^3} dx \leq \frac{5}{4} = 1.25$$

$$57. \text{ a Pruebe que: } 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 4-2x^2 \leq 4-x^2-x^3 \leq 4-x^2$$

$$\text{ b Usar la parte a para probar que } \frac{\pi}{6} \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2-x^3}} \leq \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

58. Si f es continua, probar que: $\int_a^b f(-x) dx = \int_{-b}^{-a} f(x) dx$.

Sugerencia: Sea $u = -x$

59. Si f es continua, probar que: $\int_a^b f(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx$.

Sugerencia: Sea $u = x + c$.

60. Probar que: $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$

Sugerencia: Sea $u = 1 - x$.

61. a. Si f es continua, probar que $\int_0^{\pi/2} f(\cos x) dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) dx$.

Sugerencia: Sea $u = \pi/2 - x$.

b. Usando la parte a, probar que: $\int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx$.

En los problemas del 62 al 65 hallar el área de la región encerrada por el gráfico de la función dada, el eje X y las rectas verticales indicadas.

62. $f(x) = x^2 + 1$, $x = 0$, $x = 3$ Rpta. 12

63. $h(x) = e^{2x}$, $x = 0$, $x = \ln 3$ Rpta. 4

64. $g(x) = 1 + \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$ Rpta. 23/3

65. $f(x) = \ln x$, $x = 1$, $x = e$ Rpta. 1

66. Hallar el área de la región encerrada por el gráfico de $f(x) = -x^2 + 9$ y el eje X.

Rpta. 36

67. Hallar el área de la región encerrada por el eje X, las rectas $x = -1$, $x = 3$ y el

gráfico de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x & \text{si } x > 1 \end{cases}$ Rpta. $\frac{14}{3}$

68. Hallar el área de la región encerrada por el eje X, las rectas $x = -1$, $x = 4$ y el

gráfico de la función $f(x) = |x^3|$. Rpta. $\frac{257}{4}$

69. Hallar el área de la región encerrada por el eje X, el eje Y, la recta $x = 5$ y el

gráfico de la función $f(x) = |2x - 6|$. Rpta. 13

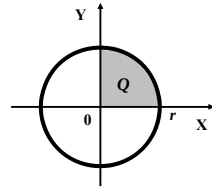
70. Hallar el área de la región encerrada por los gráficos de $f(x) = 1/x$, $g(x) = 2x$, la

recta $x = e^2$ y el semieje positivo de las X. Rpta. $\frac{5}{2} + \frac{1}{2} \ln 2$

71. Probar que el área de un círculo de radio r es πr^2

Sugerencia: Tomar la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$

Observar que $A(Q) = \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} dx$

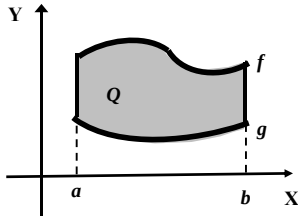
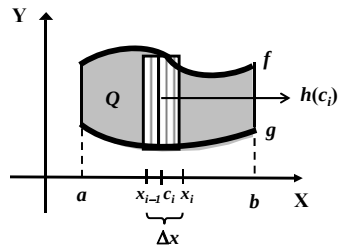


SECCION 3.4

AREA ENTRE CURVAS

CASO I. RECTANGULOS VERTICALES

Area de una región Q encerrada por dos rectas verticales $x = a$, $x = b$ y los gráficos de dos funciones continuas $y = f(x)$ e $y = g(x)$.



TEOREMA 3.12

Sean $y = f(x)$ e $y = g(x)$ dos funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(x) \geq g(x)$, $\forall x$ en $[a, b]$.

Si Q es la región encerrada por las rectas verticales $x = a$, $x = b$ y los gráficos de f y g , entonces el área de Q es:

$$A(Q) = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

Demostración

La función $h(x) = f(x) - g(x)$, por ser diferencia de dos funciones continuas, es continua. Por el teorema 3.4, h es integrable en $[a, b]$. Tomemos una partición regular de $[a, b]$ de longitud $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tomamos un punto c_i y construimos el rectángulo vertical de base $\Delta x = x_i - x_{i-1}$ y altura $h(c_i) = f(c_i) - g(c_i)$. El área de este rectángulo es

$$h(c_i) \Delta x = [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x$$

A este rectángulo se le llama **elemento de área**. La suma del área de estos rectángulos nos da una aproximación al área de Q . El área exacta es:

$$A(Q) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n [f(c_i) - g(c_i)] \Delta x = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

OBSERVACION. Geométricamente, la relación $f(x) \geq g(x)$ en $[a, b]$ significa que el gráfico de f está arriba del gráfico de g . En estos términos, el teorema anterior nos dice que

$$A(Q) = \int_a^b [\text{función superior} - \text{función inferior}] dx$$

El área de una región bajo una curva, tratado en la sección anterior, es un caso particular del área de una región entre dos curvas; es el caso $g = 0$.

EJEMPLO 1. Hallar el área de la región Q encerrada por las rectas $x = 0$, $x = 1$ y los gráficos de las funciones

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1, \quad g(x) = x^3 - 1$$

Solución

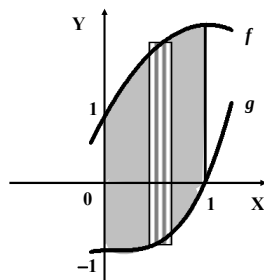
Observemos que en $[0, 1]$ la función

superior es $f(x) = -x^2 + 2x + 1$ y la

función inferior es $g(x) = x^3 - 1$.

Luego,

$$\begin{aligned} A(Q) &= \int_0^1 [(-x^2 + 2x + 1) - (x^3 - 1)] dx = \int_0^1 [-x^3 - x^2 + 2x + 2] dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + x^2 + 2x \right]_0^1 = -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + 1 + 2 = \frac{29}{12} \end{aligned}$$



EJEMPLO 2. Hallar el área de la región Q encerrada por los gráficos de

$$f(x) = 3 - x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = x + 1$$

Solución

En este caso, los valores a y b , que dan las dos rectas verticales $x = a$ y $x = b$, son dados por los puntos de intersección de ambos gráficos. Tenemos:

$$3 - x^2 = x + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1) = 0$$

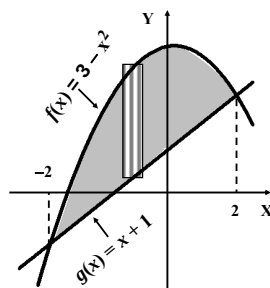
$$\Leftrightarrow x = -2 \quad \text{ó} \quad x = 1.$$

En $[-2, 1]$, la función superior es $f(x) = 3 - x^2$

y la función inferior, $g(x) = x + 1$.

Luego,

$$A(Q) = \int_{-2}^1 [(3 - x^2) - (x + 1)] dx = \int_{-2}^1 [(-x^2 - x + 2)] dx$$



$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right) \Big|_{-2}^1 = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \left(\frac{8}{3} - 2 - 4 \right) = \frac{9}{2}$$

EJEMPLO 3. Hallar el área de la región Q encerrada por los gráficos de las funciones

$$f(x) = x^3 - x^2 - 2x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{7}{4}x$$

Solución

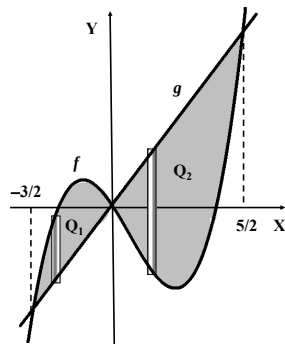
Halle los puntos de intersección de los gráficos:

$$x^3 - x^2 - 2x = \frac{7}{4}x \Leftrightarrow 4x^3 - 4x^2 - 15x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(4x^2 - 4x - 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(4x - 10)(4x + 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{5}{2}, \quad x_3 = -\frac{3}{2}$$



Vemos que la región Q está dividida en dos subregiones disjuntas Q_1 y Q_2 . En Q_1 la superior es f . En cambio, en Q_2 la función superior es g . Por tal motivo, el área de estas subregiones debe ser calculada separadamente.

En Q_1 , $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[-3/2, 0]$. Luego,

$$\begin{aligned} A(Q_1) &= \int_{-3/2}^0 [f(x) - g(x)] dx = \int_{-3/2}^0 \left[(x^3 - x^2 - 2x) - \frac{7}{4}x \right] dx \\ &= \int_{-3/2}^0 \left[x^3 - x^2 - \frac{15}{4}x \right] dx = \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{15}{8}x^2 \right) \Big|_{-3/2}^0 = \frac{117}{64} \end{aligned}$$

En Q_2 , $g(x) \geq f(x)$ para todo x en $[0, 5/2]$. Luego,

$$\begin{aligned} A(Q_2) &= \int_0^{5/2} [g(x) - f(x)] dx = \int_0^{5/2} \left[\frac{7}{4}x - (x^3 - x^2 - 2x) \right] dx \\ &= \int_0^{5/2} \left[-x^3 + x^2 + \frac{15}{4}x \right] dx = \left(-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{15}{8}x^2 \right) \Big|_0^{5/2} = \frac{1.375}{192} \end{aligned}$$

Por último

$$A(Q) = A(Q_1) + A(Q_2) = \frac{117}{64} + \frac{1.375}{192} = \frac{1.726}{192} = \frac{863}{96}$$

Algunas regiones presentan ciertas simetrías. En este caso, los cálculos pueden simplificarse. El siguiente ejemplo nos ilustra esta situación.

EJEMPLO 4. Hallar el área de la región Q encerrada por los gráficos de:

$$y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = -x^2 + 6$$

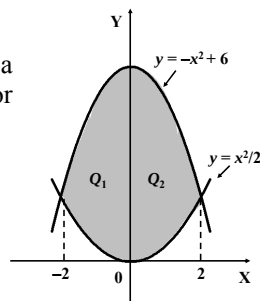
Solución

Hallemos los puntos de intersección:

$$\frac{1}{2}x^2 = -x^2 + 6 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ó } x = 2$$

La región Q es simétrica respecto al eje Y , el cual divide a la región en dos subregiones, Q_1 y Q_2 de igual área. Por tanto, el área de Q es el doble del área de Q_2 . Luego,

$$\begin{aligned} A(Q) &= 2A(Q_2) = 2 \int_0^2 \left[(-x^2 + 6) - \left(\frac{1}{2}x^2 \right) \right] dx \\ &= 2 \int_0^2 \left[-\frac{3}{2}x^2 + 6 \right] dx = 2 \left[-\frac{1}{2}x^3 + 6x \right]_0^2 = 16 \end{aligned}$$



EJEMPLO 5. Hallar el área de la región Q encerrada por el gráfico

$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x \quad \text{y el eje } X$$

Solución

Hallemos la intersección de f con el eje X .

$$x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x+1)(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0, \quad x = -1, \quad x = 3$$

Dividimos la región Q en dos subregiones: Q_1 y Q_2

En Q_1 , la función superior es $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$

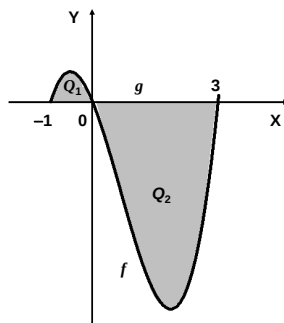
y la inferior, $g(x) = 0$. Luego,

$$A(Q_1) = \int_{-1}^0 \left[x^3 - 2x^2 - 3x - 0 \right] dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-1}^0 = \frac{7}{12}$$

En Q_2 , la función superior es $g(x) = 0$ y

la inferior es $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$. Luego,

$$\begin{aligned} A(Q_2) &= \int_0^3 \left[0 - (x^3 - 2x^2 - 3x) \right] dx = \int_0^3 \left[-x^3 + 2x^2 + 3x \right] dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 = \frac{45}{4} \end{aligned}$$

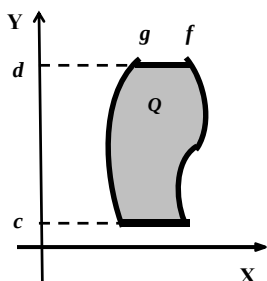
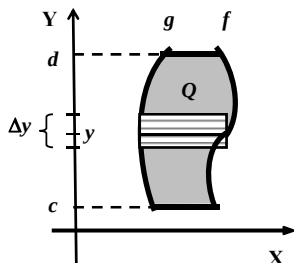


Por último,

$$A(Q) = A(Q_1) + A(Q_2) = \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6}$$

CASO II: RECTÁNGULOS HORIZONTALES

Area de una región Q encerrada por dos rectas horizontales $y = c$ e $y = d$ y los gráficos de dos funciones continuas $x = f(y)$, $x = g(y)$.



TEOREMA 11.13 Sean $x = f(y)$ y $x = g(y)$ funciones continuas en $[c, d]$ tales que $f(y) \geq g(y)$ en $[c, d]$.

Si Q es la región encerrada por los gráficos de f y de g y las rectas horizontales $y = c$ e $y = d$, entonces

$$A(Q) = \int_c^d [f(y) - g(y)] dy$$

Demostración

Se procede como en la prueba del teorema anterior, tomando una partición del intervalo $[c, d]$ de longitud $\Delta y = \frac{d-c}{n}$. El elemento de área, en este caso, es un rectángulo horizontal de base Δy y altura $h(y) = [f(y) - g(y)]$.

OBSERVACION. Geométricamente, la relación $f(y) \geq g(y)$ significa que el gráfico de f está a la derecha del gráfico de g . Luego, en estos términos, el teorema anterior dice que:

$$A(Q) = \int_c^d [\text{función de la derecha} - \text{función de la izquierda}] dy$$

EJEMPLO 6. Hallar el área de la región Q encerrada por los gráficos de las ecuaciones

$$x = -y + 1 \quad y \quad x = 3 - y^2$$

Solución

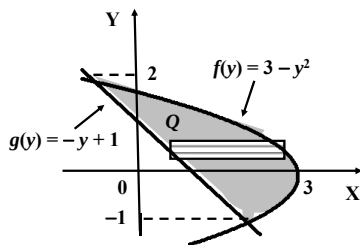
Hallemos la intersección de los gráficos:

$$-y + 1 = 3 - y^2 \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(y - 2)(y + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ ó } y = -1$$

Los gráficos se intersectan en:

$$(-1, 2) \text{ y } (2, -1).$$



El intervalo de integración es $[-1, 2]$ en el eje Y. En este intervalo, $f(y) = 3 - y^2$ está a la derecha y $g(y) = -y + 1$ está a la izquierda. Luego,

$$\begin{aligned} A(Q) &= \int_{-1}^2 [(3 - y^2) - (-y + 1)] dy = \int_{-1}^2 [-y^2 + y + 2] dy \\ &= \left[-\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 + 2y \right]_{-1}^2 = \left(-\frac{8}{3} + 2 + 4 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 \right) = \frac{9}{2} \end{aligned}$$

OBSERVACION.

El área de la región anterior se puede calcular también con el método del Caso I, dividiendo a Q en dos subregiones, por lo cual es preciso calcular dos integrales.

EJEMPLO 7.

Hallar el área de la región comprendida entre el eje X, la recta horizontal $y = 3$ y encerrada por los gráficos de las funciones

$$x = \frac{1}{8}y^3 \quad \text{y} \quad x = -y^2 + \frac{5}{2}y$$

Solución

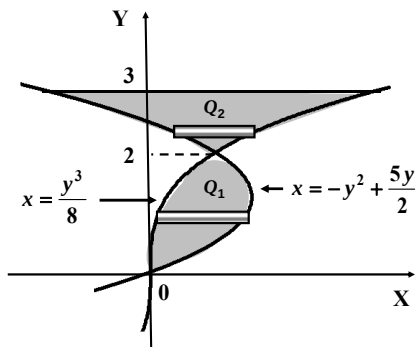
Hallemos las intersecciones:

$$\frac{1}{8}y^3 = -y^2 + \frac{5}{2}y \Leftrightarrow$$

$$y(y + 10)(y - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = 0, y = -10, y = 2$$

Como la región Q está entre el eje X, que tiene por ecuación $y = 0$, y la recta horizontal $y = 3$.



El intervalo de integración es $[0, 3]$ sobre el eje Y. A la región Q la dividimos en las subregiones, Q_1 y Q_2 .

$$A(Q_1) = \int_0^2 \left[\left(-y^2 + \frac{5}{2}y \right) - \left(\frac{1}{8}y^3 \right) \right] dy = \left[-\frac{1}{3}y^3 + \frac{5}{4}y^2 - \frac{1}{32}y^4 \right]_0^2 = \frac{11}{6}$$

$$\begin{aligned}
 A(Q_2) &= \int_2^3 \left[\frac{1}{8}y^3 - \left(-y^2 + \frac{5}{2}y\right) \right] dy = \int_2^3 \left[\frac{1}{8}y^3 + y^2 - \frac{5}{2}y \right] dy \\
 &= \left(\frac{1}{32}y^4 + \frac{1}{3}y^3 - \frac{5}{4}y^2 \right) \Big|_2^3 = \left(\frac{81}{32} + 9 - \frac{45}{4} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{8}{3} - 5 \right) = \frac{203}{96}
 \end{aligned}$$

Luego,

$$A(Q) = A(Q_1) + A(Q_2) = \frac{11}{6} + \frac{203}{96} = \frac{379}{96}$$

PROBLEMAS RESUELTOS 3.4

PROBLEMA 1.

Hallar el área de la región Q encerrada por la parábola

$$x^2 = 4ay \text{ y la Bruja de Agnesi } y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}, a > 0$$

Solución

Halleemos los puntos de intersección:

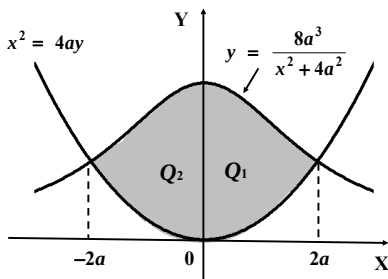
$$\frac{1}{4a}x^2 = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} \Leftrightarrow$$

$$x^2(x^2 + 4a^2) = 32a^3 \Leftrightarrow$$

$$x^4 + 4a^2x^2 - 32a^4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x^2 + 8a^2)(x^2 - 4a^2) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 = 4a^2 \Rightarrow x = -2a \text{ ó } x = 2a$$



La región Q está formada por dos subregiones simétricas, Q_1 y Q_2 . Luego,

$$\begin{aligned}
 A(Q) &= 2A(Q_1) = 2 \int_0^{2a} \left(\frac{8a^3}{x^2 + 4a^2} - \frac{1}{4a}x^2 \right) dx \\
 &= 16a^3 \int_0^{2a} \frac{1}{x^2 + (2a)^2} dx - \frac{1}{2a} \int_0^{2a} x^2 dx \\
 &= 16a^3 \left[\frac{1}{2a} \tan^{-1} \frac{x}{2a} \right]_0^{2a} - \frac{1}{2a} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^{2a} = 8a^2 \tan^{-1}(1) - \frac{4}{3}a^2 \\
 &= 8a^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) - \frac{4}{3}a^2 = \frac{3\pi - 4}{3}a^2
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 2. Hallar el área de la región Q , que es la intersección de los círculos encerrados por las circunferencias:

$$C_1: x^2 + y^2 = 4, \quad C_2: x^2 + y^2 = 4x$$

Solución

Hallamos los puntos de intersección:

$$4 - x^2 = 4x - x^2 \Leftrightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow$$

$$y = \pm\sqrt{3}$$

Despejamos x en ambas ecuaciones:

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{4 - y^2}$$

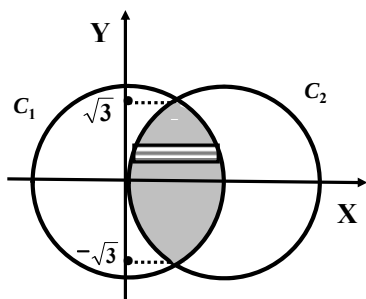
$$x^2 + y^2 = 4x \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{4 - y^2}$$

De estas curvas, las que conforman la región de intersección son:

$$x = \sqrt{4 - y^2} \quad y \quad x = 2 - \sqrt{4 - y^2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} A(Q) &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left[\sqrt{4 - y^2} - \left(2 - \sqrt{4 - y^2} \right) \right] dy = 2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \sqrt{4 - y^2} dy - 2 \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \\ &= 2 \left[\frac{y}{2} \sqrt{4 - y^2} + 2 \sin^{-1} \frac{y}{2} \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} - 2 \left[y \right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$



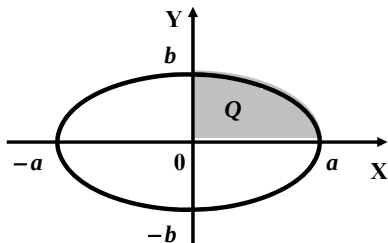
PROBLEMA 3. Verificar que el área de la región encerrada por la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{es} \quad A = \pi ab$$

Solución

Despejando y en términos de x se tiene:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$$



Sea Q la región acotada por la elipse que corresponde al primer cuadrante. La curva superior de la región Q corresponde al gráfico de la función

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \text{donde} \quad 0 \leq x \leq a$$

Por razones de simetría, el área acotada por la elipse es 4 veces el área de la región sombreada Q . Luego, el área buscada es:

$$\begin{aligned}
 A &= 4 \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} \, dx \\
 &= 4 \frac{b}{a} \left[\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{sen}^{-1} \frac{x}{a} \right]_0^a = 4 \frac{b}{a} \left[0 + \frac{a^2}{2} \frac{\pi}{2} \right] = \pi ab
 \end{aligned}$$

OBSERVACION. La circunferencia es una elipse en la que $a = b = r =$ radio. En consecuencia, de acuerdo al resultado anterior, el área del círculo es $\pi ab = \pi rr = \pi r^2$.

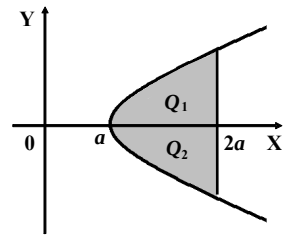
PROBLEMA 4. Hallar el área de la región Q acotada por la hipérbola

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ y la recta } x = 2a.$$

Solución

La región Q está formada por dos subregiones simétricas, Q_1 y Q_2 . Luego,

$$A(Q) = 2A(Q_1)$$



Por otro lado, despejando: $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$.

La región Q_1 es acotada por:

La gráfica de $y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$, el eje X y la recta $x = 2a$.

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
 A(Q) &= 2(Q_1) = 2 \int_a^{2a} \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = 2 \frac{b}{a} \int_a^{2a} \sqrt{x^2 - a^2} \, dx \\
 &= 2 \frac{b}{a} \left[\frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| \right]_a^{2a} \\
 &= 2 \frac{b}{a} \left[\frac{2a^2}{2} \sqrt{3} - \frac{a^2}{2} \ln \left| 2a + a\sqrt{3} \right| \right] - 2 \frac{b}{a} \left[0 - \frac{a^2}{2} \ln |a| \right] \\
 &= 2ab \left[\sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln (2 + \sqrt{3}) - \frac{1}{2} \ln a \right] + 2ab \left[\frac{1}{2} \ln a \right] \\
 &= 2ab \left[\sqrt{3} - \frac{1}{2} \ln (2 + \sqrt{3}) \right] = ab \left[2\sqrt{3} - \ln (2 + \sqrt{3}) \right]
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 5. Hallar el área de la región acotada por la astroide

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, a > 0$$

Solución

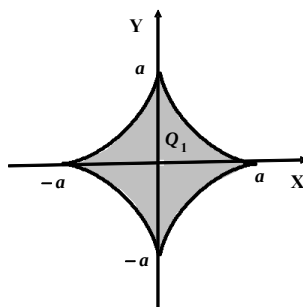
Despejamos y en términos de x :

$$y = \pm \left(a^{2/3} - x^{2/3} \right)^{2/3}$$

La parte superior de la curva corresponde al gráfico de la función:

$$y = \left(a^{2/3} - x^{2/3} \right)^{2/3}$$

Si Q es la región acotada por la curva y Q_1 es la región correspondiente al primer cuadrante, entonces



$$A(Q) = 4A(Q_1) = 4 \int_0^a \left(a^{2/3} - x^{2/3} \right)^{3/2} dx$$

Haciendo $x = a \sin^3 \theta$, se tiene que $dx = 3a \sin^2 \theta \cos \theta d\theta$. Además,

$$x = 0 \Rightarrow 0 = a \sin^3 \theta \Rightarrow \sin^3 \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0$$

$$x = a \Rightarrow a = a \sin^3 \theta \Rightarrow \sin^3 \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} A(Q) &= 4 \int_0^{\pi/2} \left(a^{2/3} - (a \sin^3 \theta)^{2/3} \right)^{3/2} (3a \sin^2 \theta \cos \theta d\theta) \\ &= 12a^2 \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2 \theta)^{3/2} (\sin^2 \theta \cos \theta d\theta) \\ &= 12a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos^3 \theta) ((1 - \cos^2 \theta) \cos \theta d\theta) = 12a^2 \int_0^{\pi/2} \cos^4 \theta \sin^2 \theta d\theta \quad (1) \end{aligned}$$

Aplicando tres veces la fórmula de reducción 29 de la tabla de integrales, tenemos:

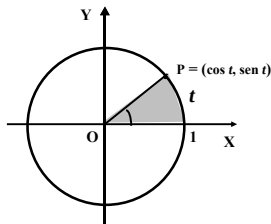
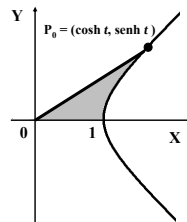
$$\begin{aligned} \int (\cos^4 \theta - \cos^6 \theta) d\theta &= \int \cos^4 \theta d\theta - \int \cos^6 \theta d\theta \\ &= \int \cos^4 \theta d\theta - \left[\frac{1}{6} \sin \theta \cos^5 \theta + \frac{5}{6} \int \cos^4 \theta d\theta \right] \\ &= -\frac{1}{6} \sin \theta \cos^5 \theta + \frac{1}{6} \int \cos^4 \theta d\theta \\ &= -\frac{1}{6} \sin \theta \cos^5 \theta + \frac{1}{6} \left[\frac{1}{4} \sin \theta \cos^3 \theta + \frac{3}{4} \int \cos^2 \theta d\theta \right] \\ &= -\frac{1}{6} \sin \theta \cos^5 \theta + \frac{1}{24} \sin \theta \cos^3 \theta + \frac{1}{8} \left[\frac{1}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \int d\theta \right] \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{6} \operatorname{sen} \theta \cos^5 \theta + \frac{1}{24} \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta + \frac{1}{16} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \frac{\theta}{16} + C$$

Finalmente, regresando a (1):

$$\begin{aligned} A(Q) &= 12a^2 \int_0^{\pi/2} (\cos^4 \theta - \cos^6 \theta) d\theta \\ &= 12a^2 \left[-\frac{1}{6} \operatorname{sen} \theta \cos^5 \theta + \frac{1}{24} \operatorname{sen} \theta \cos^3 \theta + \frac{1}{16} \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \frac{\theta}{16} \right]_0^{\pi/2} = \frac{3\pi}{8} a^2 \end{aligned}$$

PROBLEMA 6. Sea $t > 0$. En el círculo trigonométrico $x^2 + y^2 = 1$ tomamos el punto $P = (\cos t, \operatorname{sen} t)$. En la hipérbola $x^2 - y^2 = 1$ tomamos el punto $P_0 = (\cosh t, \sinh t)$. Probar que las dos regiones indicadas en los gráficos tienen igual área y ésta es $\frac{t}{2}$.



Solución

a. Círculo trigonométrico.

Sea S el sector circular determinado por el arco de t radianes. Para calcular su área no necesitamos usar la artillería de las integrales, nos basta un simple cálculo elemental. El círculo tiene radio 1 y su área es $\pi(1)^2 = \pi$. Esta área corresponde a toda la circunferencia, la cual tiene 2π radianes. Luego, el área del sector determinado por 1 radián es $\frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ y el área del sector S , determinado por t

radianes, es $A(S) = \frac{t}{2}$

a. Hipérbola.

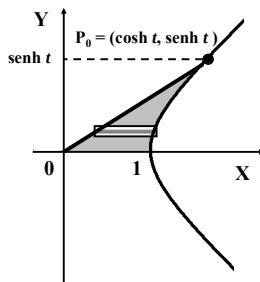
Sea Q la región indicada. Calculamos $A(Q)$ integrando mediante rectángulos horizontales.

La función de la derecha es $x = \sqrt{1 + y^2}$

La función de la izquierda es la recta que pasa por el origen y por el punto

$P_0 = (\cosh t, \sinh t)$. Luego su ecuación es

$$y = \frac{\sinh t}{\cosh t} x \Rightarrow x = \frac{\cosh t}{\sinh t} y$$



Luego,

$$\begin{aligned}
 A(Q) &= \int_0^{\sinh t} \left[\sqrt{1+y^2} - \frac{\cosh t}{\sinh t} y \, dy \right] \\
 &= \int_0^{\sinh t} \sqrt{1+y^2} \, dy - \frac{\cosh t}{\sinh t} \int_0^{\sinh t} y \, dy \\
 &= \left[\frac{y}{2} \sqrt{1+y^2} + \frac{1}{2} \ln \left| y + \sqrt{1+y^2} \right| \right]_0^{\sinh t} - \frac{\cosh t}{\sinh t} \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{\sinh t} \\
 &= \frac{\sinh t}{2} \sqrt{1+\sinh^2 t} + \frac{1}{2} \ln \left| \sinh t + \sqrt{1+\sinh^2 t} \right| - \frac{\cosh t}{\sinh t} \frac{\sinh^2 t}{2} \\
 &= \frac{1}{2} \sinh t \cosh t + \frac{1}{2} \ln \left| \sinh t + \cosh t \right| - \frac{1}{2} \sinh t \cosh t \\
 &= \frac{1}{2} \ln \left| \sinh t + \cosh t \right| = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{e^t - e^{-t}}{2} + \frac{e^t + e^{-t}}{2} \right| = \frac{1}{2} \ln e^t = \frac{t}{2}
 \end{aligned}$$

PROBLEMA 7. Hallar el área de la región encerrada por la curva

$$y^2 = x^2 (a^2 - x^2), \quad a > 0$$

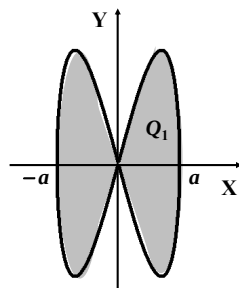
Solución

Sea Q la región encerrada por la curva y sea Q_1 la parte de la región Q situada en el primer cuadrante. Como la curva es simétrica respecto al eje X y al eje Y , se tiene que $A(Q) = 4(Q_1)$.

La curva corta al eje X en $x = -a$, $x = 0$ y $x = a$,

La parte de la curva que determina la región Q_1 es la gráfica de la función $y = x\sqrt{a^2 - x^2}$. Luego,

$$\begin{aligned}
 A(Q) &= 4 \int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = -2 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} (-2x \, dx) \\
 &= -\frac{4}{3} \left[(a^2 - x^2)^{3/2} \right]_0^a = \frac{4}{3} a^3
 \end{aligned}$$



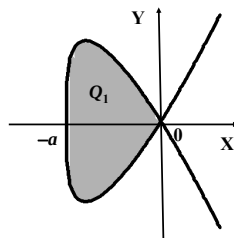
PROBLEMA 8. Hallar el área de la región encerrada por el lazo de la curva

$$y^2 = x^4 (x + a)$$

Solución

Sea Q la región encerrada por el lazo y sea Q_1 la parte de la región Q sobre el eje X . Como la curva es simétrica respecto al eje X , se tiene que

$$A(Q) = 2(Q_1).$$



La curva corta al eje X en $x = -a$ y $x = 0$

La parte de la curva que determina a Q_1 es la gráfica de $y = x^2 \sqrt{x+a}$. Luego,

$$A(Q) = 2A(Q_1) = 2 \int_{-a}^0 x^2 \sqrt{x+a} \, dx = 2 \int_{-a}^0 x^2 \sqrt{x+a} \, dx$$

Sea $x+a = u^2$. Entonces $x = u^2 - a$, $dx = 2u \, du$. Además,

$$x = -a \Rightarrow u = 0 \quad y \quad x = 0 \Rightarrow u = \sqrt{a}. \text{ Luego,}$$

$$\begin{aligned} A(Q) &= 2 \int_0^{\sqrt{a}} (u^2 - a)^2 u (2u \, du) = 4 \int_0^{\sqrt{a}} u^2 (u^2 - a)^2 \, du \\ &= 4 \int_0^{\sqrt{a}} (u^6 - 2au^4 + a^2 u^2) \, du = 4 \left[\frac{u^7}{7} - \frac{2au^5}{5} + \frac{a^2 u^3}{3} \right]_0^{\sqrt{a}} = \frac{32}{105} a^3 \sqrt{a} \end{aligned}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS 3.4

En los problemas del 1 al 7 hallar el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones dadas y las rectas indicadas.

1. $f(x) = x^2 + 2$, $g(x) = x$, $x = -1$, $x = 2$ Rpta. 15/2
2. $f(x) = -\frac{1}{9}x^2$, $g(x) = -x$, $x = 0$, $x = 2$ Rpta. 46/27
3. $y = \sqrt{x}$, $y = \frac{x}{3}$, $x = 1$, $x = 4$ Rpta. 13/6
4. $y = e^x$, $y = 2x$, $x = 0$, $x = 3$ Rpta. $e^3 - 10$
5. $y = \ln x$, $y = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}$, $x = 1$, $x = e$ Rpta. $\frac{1}{8}(2e - e^2 + 7)$
6. $y = 4x - x^2 + 8$, $y = x^2 - 2x$, $x = -1$, $x = 2$ Rpta. 27
7. $y = x^3$, $y = 9x$, $x = 1$, $x = 3$ Rpta. 16

En los problemas del 8 al 11 hallar el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones dadas y las rectas indicadas.

8. $f(y) = y^2$, $g(y) = 0$, $y = -1$, $y = 3$ Rpta. 28/3
9. $f(y) = \frac{1}{2}y^2 + 1$, $g(y) = y + 5$, $y = -1$, $y = 4$ Rpta. 50/3
10. $x = y^3$, $x = y^2 + 2$, $y = 0$, $y = 1$ Rpta. 25/12
11. $f(y) = \frac{12}{y}$, $g(y) = 0$, $y = 1$, $y = e^2$ Rpta. 24

En los problemas del 12 al 17 hallar el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones dadas.

12. $f(x) = x^2 - 4x$, $g(x) = x - 4$ Rpta. 9/2

13. $y = -x^2 + 2x + 1$, $y = 2x$ Rpta. 4/3

14. $y = x^3$, $y = 4x$ Rpta. 8

15. $y = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$, $y = 0$ Rpta. 37/12

16. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$, $g(x) = 0$ Rpta. 8

17. $y = -x^2 + 2x$, $y = x^2 - 6x$ Rpta. 64/3

En los problemas 18 y 19 hallar el área de la región encerrada por las curvas dadas.

18. $x = 8 + 2y - y^2$, $x = 3y + 2$ Rpta. 125/6

19. $x = \frac{1}{4}y^3$, $x = y^2$ Rpta. 16/3

20. Hallar el área de la región encerrada por la curva $\sqrt{y} + \sqrt{x} = \sqrt{a}$ y los ejes coordenados. Rpta. $a^2/6$

21. Hallar el área de la región encerrada por los gráficos de $f(x) = xe^x$ y $g(x) = ex$.
Rpta. $\frac{e}{2} - 1$

22. Hallar el área de la región encerrada por las rectas $x = 0$, $x = 3$ y los gráficos de las funciones $y = x^2 + 4$ e $y = x^3$ Rpta. 151/12

23. Hallar el área de la región encerrada por las rectas $x = 1/2$, $x = 2$ y los gráficos de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$ Rpta. 49/24

24. Hallar el área de la región encerrada por los gráficos de las funciones:

$y = e^x$, $y = \ln x$, $y = -x + 1$, $y = -x + e + 1$ Rpta. $\frac{e^2}{2} + e - 3$

25. Hallar el área de la región encerrada por el gráfico de $f(x) = \tan \frac{x}{2}$, el eje X y las rectas $x = 0$, $x = \pi/2$ Rpta. $\ln 2$

26. Hallar el área de la región encerrada en una semihonda de $y = \sin x$, y el eje X. Rpta. 2

27. Hallar el área de la región encerrada por $y = \sec x$, el eje X y las rectas $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$ Rpta. $2 \ln(\sqrt{2} + 1)$