

MATEMÁTICA I

DERIVADA

1.- RECTA TANGENTE.-

- 1.1.- Idea intuitiva de recta tangente.
- 1.2.- Definición de Pendiente de la Recta Tangente.
- 1.3.- Definición de Recta Tangente. Ejemplos. Ejercicios.

2.- DERIVADA DE UNA FUNCION.

- 2.1.- Definición.
- 2.2.- Notación de la Derivada. Ejemplos. Ejercicios.

3.- DIFERENCIABILIDAD Y CONTINUIDAD

- 3.1.- Teorema. Ejemplo.
- 3.2.- Derivadas Unilaterales. Ejemplos. Ejercicios.

Enlaces electrónicos recomendados.

<http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/>

www.cnice.mecd.es/Descartes/

www.mitareanet.com

1.- RECTA TANGENTE.-

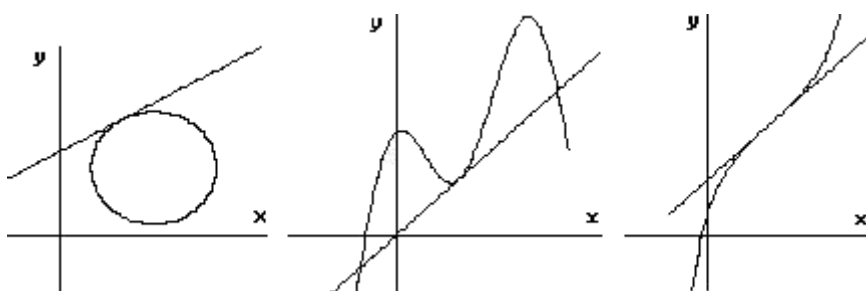
Cuando surgen cuestiones concernientes a la razón entre dos cantidades variables, entramos en los dominios del Cálculo Diferencial. Son por tanto objeto de estudio del cálculo diferencial temas como la velocidad (razón entre la distancia recorrida y el tiempo empleado en recorrerla) de una partícula en un momento determinado, la pendiente (razón entre la diferencia de las ordenadas y las abscisas de dos puntos en el plano cartesiano) de la recta tangente a una gráfica en un punto dado de ésta, etc.

1.1.- IDEA INTUITIVA DE RECTA TANGENTE

Todo el mundo tiene una idea clara de lo que es la recta tangente a una circunferencia en uno de sus puntos, pero si tratamos de generalizar esta idea a otras curvas nos encontramos con cuestiones que esa idea no resuelve.

-¿Puede la recta tangente cortar a la curva en más de un punto?

-¿Puede atravesar la recta tangente a la curva por el punto de tangencia?



Pendiente de una recta secante:

Si $h \neq 0$, entonces los dos puntos distintos $(a, f(a))$ y $(a+h, f(a+h))$ determinan, como en la figura siguiente, una recta cuya pendiente es: $m_s = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$



Pendiente de la Recta Tangente:

Como indica la figura anterior, la “tangente” en $(a, f(a))$ parece ser el límite, en algún sentido, de estas “secantes”, cuando h se aproxima a 0. Hasta aquí no hemos hablado nunca del “límite” de rectas, pero *podemos* hablar del límite de sus pendientes: La pendiente de la tangente $(a, f(a))$ debería ser:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

1.2.- Definición 1: (Pendiente de la recta tangente)

Si f es una función continua en a , entonces la pendiente m de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(a, f(a))$ está dada por:

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Otra forma de denotar la pendiente de la recta tangente es usando incrementos en lugar de la distancia h ; a continuación se hace una breve descripción del significado de los incrementos y luego se definirá nuevamente la pendiente de la recta tangente usando esta notación.

Incrementos: Cuando una cantidad variable x pasa de un valor inicial x_0 a otro valor x_1 , se dice que ha tenido un incremento. Para calcular este incremento basta con hallar la diferencia entre el valor final y el inicial. Para denotar esta diferencia se utiliza el símbolo Δx , que se lee "delta x " y se tiene que

$$\Delta x = x_1 - x_0$$

El incremento puede ser positivo o negativo, dependiendo de si la variable aumenta o disminuye al pasar de un valor a otro. Por ejemplo, si el valor inicial de una variable x_1 , es igual a 3, y el valor final x_2 es igual a 7, el incremento $\Delta x = x_2 - x_1 = 7 - 3 = 4$: la variable se ha incrementado positivamente en 4 unidades. En cambio, si el valor inicial es 7 y el valor final 3, $\Delta x = x_2 - x_1 = 3 - 7 = -4$: la variable ha tenido un incremento negativo de 4 unidades.

El incremento Δx de una variable x es el aumento o disminución que experimenta, desde un valor $x = x_0$ a otro $x = x_1$ de su campo de variación.

Si se da un incremento Δx a la variable x , (es decir, si x pasa de $x = x_0$ a $x = x_0 + \Delta x$), la función $y = f(x)$ se verá incrementada en $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ a partir del valor $y = f(x_0)$. El cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{incremento de } y}{\text{incremento de } x}$$

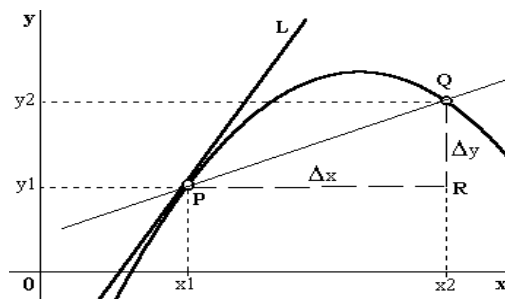
recibe el nombre de cociente incremental de la función en el intervalo comprendido entre $x = x_0$ a $x = x_0 + \Delta x$.

Definición 2: (Pendiente de la recta tangente)

Si f es una función continua en x_1 , entonces la pendiente m de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $P(x_1, f(x_1))$ está dada por:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Gráficamente se tiene:



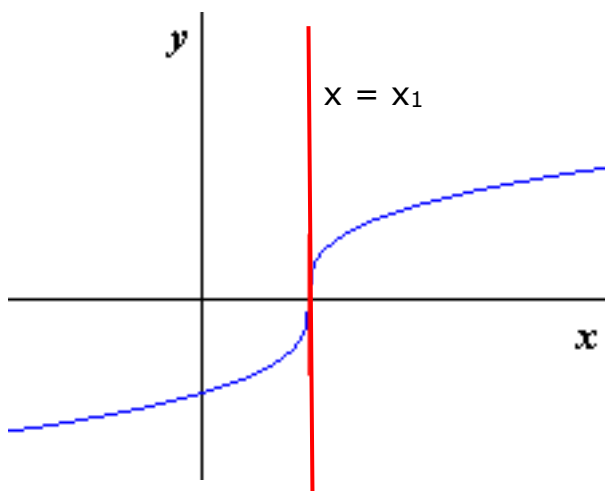
Nota: Esta fórmula servirá más adelante para la definición de derivada. En este aspecto, la derivada de una función sirve para hallar el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de una función en un punto particular.

-Una recta tangente horizontal (paralela al eje x) tiene una pendiente igual a cero.

- La definición de la recta tangente a una curva no incluye la posibilidad de una recta tangente vertical. Para éstas, se usa la siguiente definición:

Si f es continua en x_1 y $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = +\infty$ o $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = -\infty$

La recta vertical $x = x_1$, que pasa por $(x_1, f(x_1))$ es una **recta tangente vertical** a la gráfica de f .



- La **recta normal** a una gráfica en un punto dado es aquella que es perpendicular a la recta tangente a la gráfica en dicho punto. La pendiente de la recta normal está dada por $m_n = -\frac{1}{m}$ donde m es la pendiente de la tangente.

- Para determinar la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en un punto dado, la definición de la misma nos pide realizar los cuatro pasos siguientes:

- 1.- Escribir la definición de la pendiente.
- 2.- Sustituir en esta definición la fórmula dada para la función f evaluada en x y en $x + \Delta x$.
- 3.- Hacer las sustituciones algebraicas necesarias hasta que pueda llevarse a cabo el paso 4
- 4.- Determinar el límite cuando $\Delta x \rightarrow 0$ ($\Delta x \neq 0$ pero muy cercano a cero).

1.3.- Definición 3 (Recta Tangente): Se llama recta tangente a una curva en un punto dado a la recta que lleva la misma dirección de la curva en ese punto.

Ejemplos:

- 1.- Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de ecuación $y = -2x^2 + 4x$ en el punto de coordenadas (1, 2)

Solución:

- i) En primer lugar evaluamos la función f en x_1 y en $(x_1 + \Delta x)$

$$f(x_1) = -2(x_1)^2 + 4x_1$$

$$\begin{aligned} f(x_1 + \Delta x) &= -2(x_1 + \Delta x)^2 + 4(x_1 + \Delta x) \\ &= -2((x_1)^2 + 2x_1\Delta x + (\Delta x)^2) + 4x_1 + 4\Delta x \\ &= -2(x_1)^2 - 4x_1\Delta x - 2(\Delta x)^2 + 4x_1 + 4\Delta x \end{aligned}$$

- ii) Se sustituye en la fórmula dada por la definición 1:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

- iii) Se evalúa el límite con respecto a Δx :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (-4x - 2\Delta x + 4) = -4x - 2 \cdot 0 + 4 = -4x + 4$$

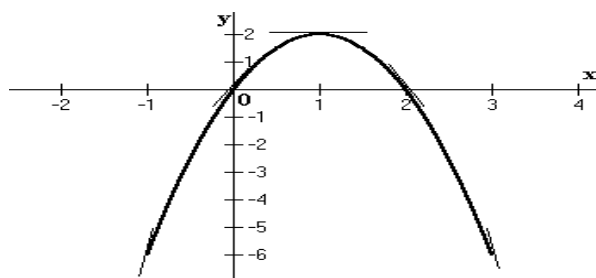
Por lo tanto, la pendiente de la recta tangente en $x_1 = 1$ viene dada por:

$$m(x_1) = -4x_1 + 4 \Rightarrow m(1) = -4 \cdot 1 + 4 = 0 \quad \therefore m(1) = 0 \text{ (recta tangente horizontal)}.$$

- iv) Así, la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(1,2)$ viene dada por la ecuación (usando la forma punto-pendiente de la ecuación de una recta)

$$y - f(x_1) = m(x - x_1) \Rightarrow y - 2 = 0(x - 1) \Rightarrow y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2$$

Gráficamente se tiene:



2.- DERIVADA DE UNA FUNCION:

La noción de derivada tuvo su origen en la búsqueda de soluciones a dos problemas, uno de la geometría y otro de la física, que son: el de encontrar rectas tangentes a una curva y el de hallar la velocidad instantánea de un objeto en movimiento.

Recordemos que la pendiente de la recta tangente en un punto $(x_1, f(x_1))$ viene dada por:

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

La pendiente m de la ecuación anterior depende de la función f y del número x_1 .

El límite utilizado para definir la pendiente de una recta tangente se utiliza para definir una de las dos operaciones fundamentales del cálculo: **la derivada**.

De esta manera aparece una nueva función llamada “**derivada de la función**” f' , denotada por f' y la definición de la nueva función f' es:

2.1.- Definición 4 (Función Derivada): La **derivada de la función** f es la función f' , tal que su valor en un número x en el dominio de f , es:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

si este límite existe. Si el límite no existe se dice que la función f **no es derivable**.

Observaciones:

- ✓ Como f' se deriva de f , entonces f' se llama “*la derivada de la función f* ” y el proceso para calcular la fórmula para f' se llama “*derivación de f* ”.
- ✓ Una función es *diferenciable o derivable* en x si su derivada existe.
- ✓ El proceso u operación mediante el cual se halla la derivada de una función se llama *diferenciación*.

- ✓ Observa que la derivada de una función también es una función de la variable x . Esta nueva función proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto $(x, f(x))$, siempre que la gráfica tenga una recta tangente en dicho punto, es decir:

$$m(x) = f'(x)$$

- ✓ $f'(x)$ se lee “ f prima de x ”.

2.2.- Notación de la derivada:

- Para una función dada f , la derivada f' se designa a menudo por $\frac{df(x)}{dx}$ y se lee: “derivada de f con respecto a x .”
- La derivada de $y = f(x)$ con respecto a x también se puede representar por uno cualquiera de los símbolos siguientes:

$$\frac{dy}{dx}, D_x y, D_x f(x), y', f'.$$

Ejemplo:

1. Calcular la derivada de $f(x) = 4x^2 - 2x + 6$

Solución: En primer lugar se evalúa f en x y en Δx

$$f(x) = 4x^2 - 2x + 6,$$

$$\Rightarrow f(x + \Delta x) = 4(x + \Delta x)^2 - 2(x + \Delta x) + 6 = 4x^2 + 8(\Delta x)x + 4(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x + 6.$$

$$y \quad f(x + \Delta x) - f(x) = 4x^2 + 8(\Delta x)x + 4(\Delta x)^2 - 2x - 2\Delta x + 6 - (4x^2 - 2x + 6);$$

$$\therefore f(x + \Delta x) - f(x) = 8(\Delta x)x + 4(\Delta x)^2 - 2\Delta x = \Delta x(8x + 4\Delta x - 2) \quad (1)$$

Sustituyendo, se obtiene:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x(8x + 4\Delta x - 2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (8x + 4\Delta x - 2) = 8x + 4(0) - 2;$$

$$\therefore f'(x) = 8x - 2$$

2. Hallar la pendiente de la gráfica de f en los puntos $(0,0)$ y $(1,8)$.

Solución

En el punto $(0,0)$ la pendiente es $m(0) = f'(0) = 8(0) - 2 = -2$.

En el punto $(1,8)$ la pendiente es $m(1) = f'(1) = 8(1) - 2 = 8 - 2 = 6$

3.- DIFERENCIABILIDAD Y CONTINUIDAD

Si una curva tiene tangente en un punto, la curva no puede dar un salto o tener un pico en ese punto. La formulación precisa de este hecho es un teorema importante.

3.1.- Teorema: Sea f una función definida en un intervalo que contiene al número c . Si f es diferenciable (derivable) en c entonces f es continua en c .

El recíproco no es cierto; es decir, continuidad no implica diferenciabilidad.

Ejemplo: Demuestre que $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ y $f'(0)$ no existe.

Solución: En primer lugar se define el valor absoluto:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Estudiamos la continuidad de f en $x = 0$.

- $f(0) = 0$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x) = 0$

- $\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

iii) $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ Así, la función f es continua en $x = 0$.

Estudiamos ahora la derivabilidad de f en $x = 0$. Para ello introduciremos el concepto de derivadas unilaterales (similar a los límites unilaterales).

Así como existen límites unilaterales también podemos hablar de derivadas unilaterales.

A continuación se dan las definiciones de derivadas por la derecha y por la izquierda de una función en un punto determinado.

3.2.- Derivadas Unilaterales:

Derivada por la derecha: Si f está definida en x_1 , la derivada por la derecha de x_1 se define como:

$$f'_+(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad \text{o equivalentemente} \quad f'_+(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

si el límite existe.

Derivada por la izquierda: Si f está definida en x_1 , la derivada por la izquierda de x_1 se define como:

$$f'_-(x_1) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \quad \text{o equivalentemente} \quad f'_-(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1},$$

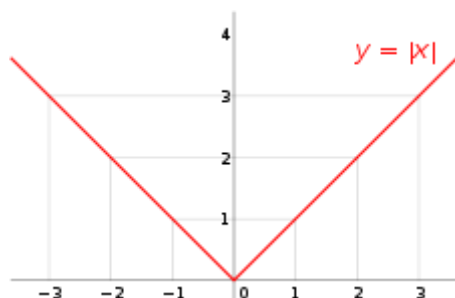
si el límite existe.

Una función f definida en un intervalo abierto que contiene a x_1 es diferenciable en x_1 si y sólo si $f'_+(x_1)$ y $f'_-(x_1)$ existen y son iguales.

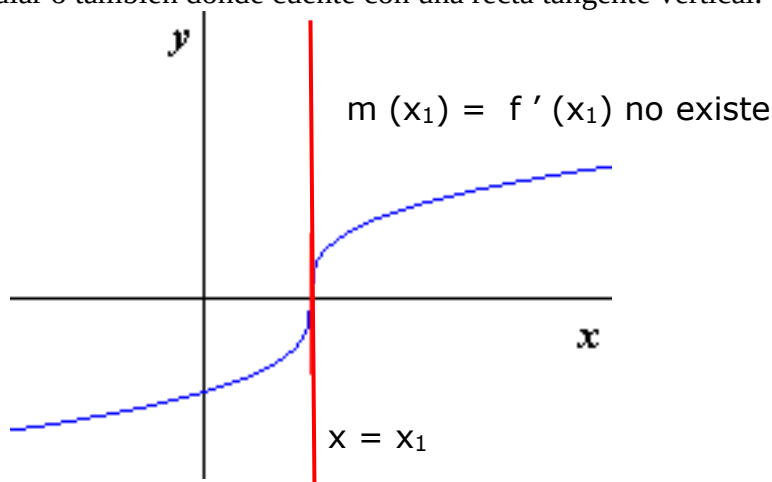
Con esta información, procedemos a estudiar la derivada de la función valor absoluto en $x = 0$

$$\left. \begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (-1) = -1 \\ f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1) = 1 \end{aligned} \right\} f'(0) \text{ no existe}$$

Por lo tanto la función valor absoluto no es derivable en $x = 0$.



Se puede observar que una función no es derivable en un punto donde su gráfica cuenta con un pico, vértice o punto angular o también donde cuente con una recta tangente vertical.



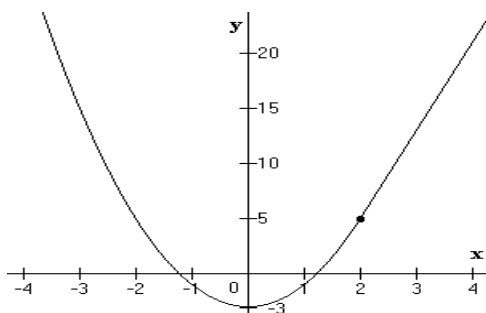
Resumidamente, podemos decir que una función no es diferenciable en un punto determinado por alguna de las tres razones siguientes:

1. La función es discontinua en el punto
2. La función es continua en el punto, pero por la gráfica de f no se puede trazar una recta tangente que pase por el punto (como en la gráfica de la función valor absoluto en 0)
3. La función es continua en el punto, y la gráfica tiene una recta tangente vertical que pasa por el punto.

Ejemplos: En los siguientes ejercicios hacer lo siguiente: (a) trace la gráfica de la función; (b) determine si f es continua en el punto dado; (c) calcule las derivadas por la derecha y por la izquierda, si existen; (d) determine si f es diferenciable en el punto dado

$$1) f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 8x - 11 & \text{si } x > 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2$$

Solución:



(b) Criterios de continuidad

$$i) f(2) = 2(2)^2 - 3 = 5$$

$$ii) \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x^2 - 3 = 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 8x - 11 = 5;$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$$

$$iii) f(2) = \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5;$$

por lo tanto, f es continua en 2.

(c) Derivadas unilaterales

$$\begin{aligned}f'_{-}(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^{-}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^{-}} \frac{(2x^2 - 3) - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^{-}} \frac{2(x^2 - 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^{-}} \frac{2(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} \\&= \lim_{x \rightarrow 2^{-}} 2(x + 2) = 2(2 + 2) = 2(4) = 8\end{aligned}$$

$$f'_{+}(2) = \lim_{x \rightarrow 2^{+}} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^{+}} \frac{(8x - 11) - 5}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^{+}} \frac{8(x - 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2^{+}} 8 = 8$$

(d) $f'_{-}(2) = f'_{+}(2)$; por lo que se concluye que f es diferenciable en 2.

2) $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$ en $x_1 = -1$

Solución:

(b) Criterios de continuidad

i) $f(-1) = \sqrt[3]{-1+1} = 0$

ii) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \sqrt[3]{x+1} = 0$

iii) $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$;

por lo tanto, f es continua en -1 .

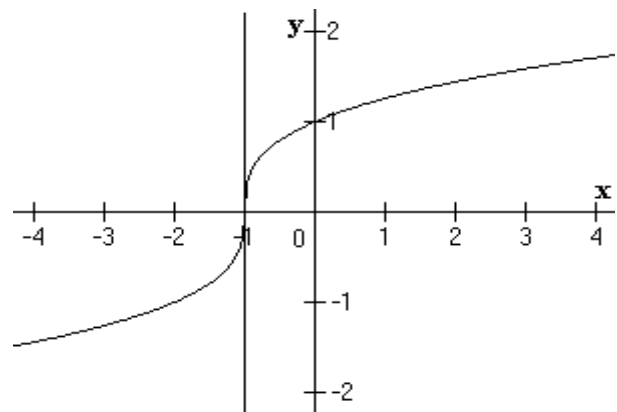
(c) Derivadas unilaterales

$$f'_{-}(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^{-}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^{-}} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 0}{x + 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -1^{-}} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1^{-}} \frac{1}{(x+1)^{2/3}} = +\infty$$

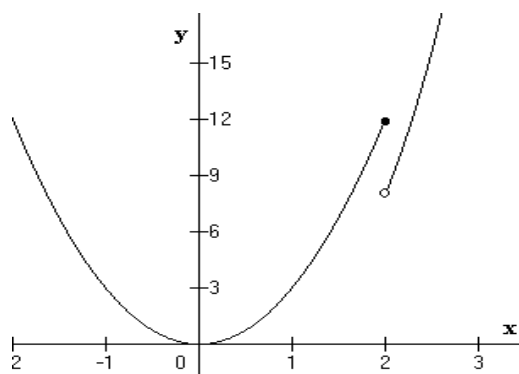
$$f'_{+}(-1) = \lim_{x \rightarrow -1^{+}} \frac{f(x) - f(-1)}{x - (-1)} = \lim_{x \rightarrow -1^{+}} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 0}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^{+}} \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^{+}} \frac{1}{(x+1)^{2/3}} = +\infty$$

(d) f no es diferenciable en -1 . La gráfica de f tiene una recta tangente vertical en $x = -1$.



$$3) f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 & \text{si } x > 2 \end{cases} \text{ en } x_1 = 2$$

Solución



(b) Continuidad de f

i) $f(2) = 3(2^2) - 3 = 12 - 3 = 9$

ii) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x^2 - 3) = 9$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^3 = 8$$

Por lo tanto $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no existe.

Luego f es discontinua en 2

(c) Derivadas unilaterales

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 12}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} 3(x + 2) = 3(2 + 2) = 12$$

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 9}{x - 2} = -\infty \text{ por (I)}$$

$$(I) \begin{cases} \text{Numerador: } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^3 - 9) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^+} x \right)^3 - 9 = (2^3) - 9 = -1 \\ \text{Denominador: } \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x - \lim_{x \rightarrow 2^+} 2 = 2 - 2 = 0 \text{ (a trav\u00e9s de valores positivos)} \end{cases}$$

(d) $f'_-(2) \neq f'_+(2)$, en consecuencia $f'(2)$ no existe, por lo tanto f no es diferenciable en 2.

Ejercicios: Dada las siguientes funciones, determinar si son continuas y derivables en los puntos dados:

$$1.- f(x) = \begin{cases} 5 - 6x & \text{si } x \leq 3 \\ -4 - x & \text{si } x > 3 \end{cases} \text{ en } x = 3 \quad 2.- f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases} \text{ en } x = 2$$

3.- Hallar el valor de m y n tales que la siguiente funci\u00f3n sea derivable en $x = -1$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < -1 \\ mx + n & \text{si } x \geq -1 \end{cases} \quad (\text{Se realizar\u00e1 en clase})$$