TEMA 18

FUNCIONES REALES DE VARIABLE REAL

Una función real de variable real es una regla de correspondencia f: X ⟶ Y que asocia a cada número real x de un conjunto (X) (dominio) un único número real y de un conjunto (Y) (codominio o rango), denotado como y = f(x). Se denominan así porque tanto el dominio como el conjunto de llegada son subconjuntos de los números reales R.

f : Dom f ⟶ R . x ⟶ y=f(x)

Donde:

1) *f* : Es la función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, es decir, una regla de correspondencia que asigna a cada valor $\mathbb{R}$ del dominio otro número real
2) Dom_f : Es el dominio de definición de la función *f*, también llamado campo de existencia. Esto es, el conjunto de posibles valores que puede tomar la entrada de la función, es decir, que tienen imagen. Puede ser, o bien el conjunto completo de los reales ($\mathbb{R}$), o bien un subconjunto de este.
3) $\mathbb{R}$: Es el codominio de la función, es decir, el conjunto de posibles valores que *podría* tomar la variable dependiente
4) *x* : Es la variable independiente. En este caso, un número real que hace las veces de entrada de la función
5) *y=f(x)* : Es la variable dependiente, imagen de *x*. Es un número real que hace las veces de salida. Para obtener su valor se aplica la función sobre el elemento *x*

FUNCION LINEAL .

https://www.youtube.com/watch?v=G-sduIBzvVU

https://www.youtube.com/watch?v=jVx1jBJDEpY

Una función lineal es una función polinómica de primer grado ($y=mx+b$) que representa una línea recta en el plano cartesiano. Su estructura consta de una pendiente (m) que define la inclinación y una ordenada al origen (b) que señala el corte con el eje Y. Estas funciones son siempre crecientes (m>0), decrecientes (m<0) o constantes (m=0)

Ejemplo: **Represente gráficamente la función f(x)= 4x -2** , para graficar una función lineal se representa el sistema de ejes cartesiano x, y y luego se construye una tabla de valores dándole valores arbitrarios a la variable independiente (x), para calcular el valor de la variable dependiente (y) a través de la ecuación f(x). para encontrar los puntos de la función f(x).

F(x)= 4x – 2 , Df(x) = R , la función existe x ϵ (- ∞, ∞)

Rango, y = 4x – 2 , y + 2 = 4x ⟶ x = $\frac{y+2}{4}$, Rf(x) = R , (- ∞, ∞)

tabla

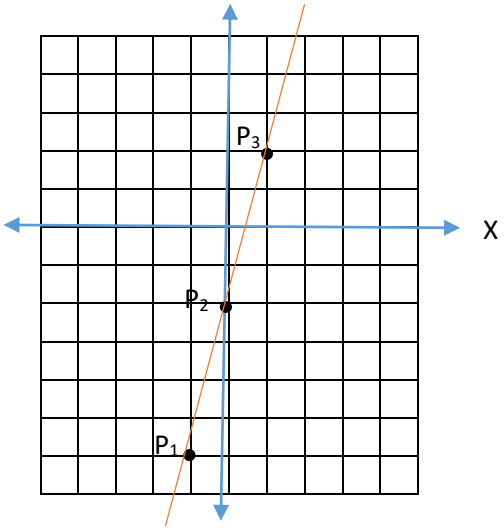
X	-1	0	1
Y	-6	-2	2

y = 4x – 2 , f(-1) = 4(-1) – 2 = -4 -2 = -6

f(0) = 4(0) – 2 = 0 – 2= -2

f(1) = 4(1) – 2 = 4 – 2 = 2

y y=4x-2 $p_1(-1, -6)$, $p_2(0, -2)$, $p_3(1, 2)$



Ejemplo: Dada f(x) = -2x +4, graficar la función.

Dominio f(x) = - 2x +4 .⟶R x ϵ (- ∞, ∞)

Rango f(x). y = -2x +4 , despejamos (x) 2x = 4 –y , x = $\frac{4-y}{2}$, Rf(x) = R

tabla

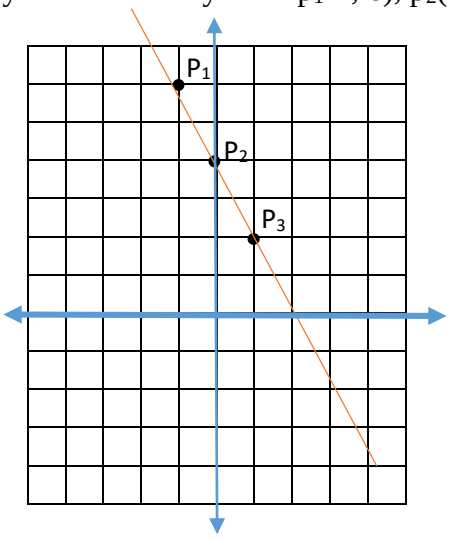
X	-1	0	1
Y	6	4	2

F(x) = - 2x + 4 , f(-1) = -2(-1) + 4 = 2 +4 = 6

f(0)= -2(0) + 4 = 0 + 4 = 4

f(1)= -2(1) + 4= -2 + 4 = 2

y = -2x +4 y p_1-1, 6), $p_2(0, 4)$, $p_3(1, 2)$



2) Graficar f(x)= 3x -2

Tabla de valores

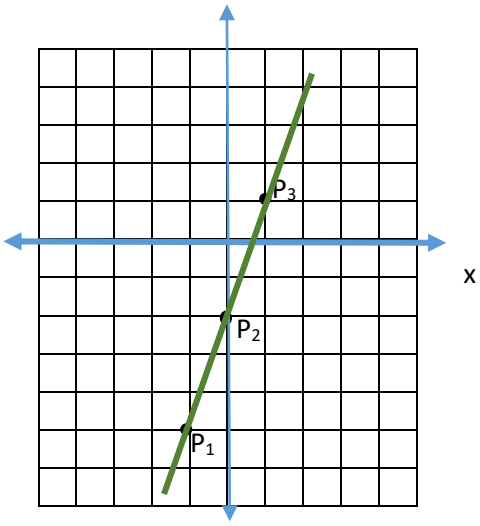
X	-1	0	1
y	-5	-2	1

f(x)= 3x -2

f(-1)= 3(-1) -2= -5

f(0)= 3(0) -2 = -2

f(1) =3(1) -2= 1



FUNCION CUADRATICA. ***https://www.youtube.com/watch?v=YlhOfpREfHE***

Una función cuadrática es un polinomio de segundo grado con la forma (f(x) = $ax^2 + bx + c$) ((a≠0)), cuya representación gráfica es una curva simétrica llamada **parábola**. La parábola se abre hacia arriba si (a>0) (cóncava) o hacia abajo si (a<0) (convexa), y su vértice representa el punto máximo o mínimo. x= $\frac{-b}{2a}$ es la coordenada (x) del vértice de la parábola. punto de las coordenadas V($\frac{-b}{2a}$, f($\frac{-b}{2a}$)

Dominio , rango y grafica de f(x)= $2x^2$ – 4x -1 Df(x) = R

y= $2x^2$ – 4x -1, en la ecuación los coeficientes son: a = 2 , b =-4 y c = -1, hallamos las coordenadas del vértice V($\frac{-b}{2a}$, f($\frac{-b}{2a}$) ⟶v(x ,y), x= $\frac{-b}{2a}$, y= f($\frac{-b}{2a}$)

x= $\frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2(2)} = \frac{4}{4} = 1$ **x=1 ;** para hallar el valor (y) sustituimos el valor de (x) en la ecuación, y= f($\frac{-b}{2a}$)⟶ y= $2(1)^2$ – 4(1) -1 = 2-4-1= 3 , **y=3,** el rango se encuentra en el eje (y) a partir de la coordenada (y) del vértice, entonces

Rf(x) = (3, ∞)

coordenadas de vértice v (1, 3)

construimos una tabla de valores para hallar los puntos que forman la función.

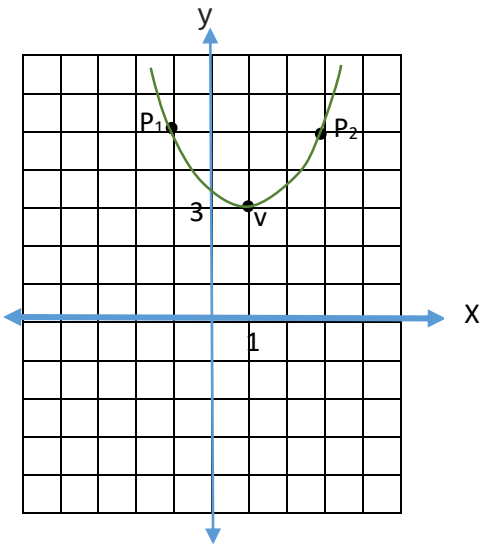
Gráficamente, f(x)= $2x^2$ – 4x -1

X	-1	1	3
Y	5	3	5

f(-1)= $2(-1)^2$ – 4(-1) -1 = 5

f(3)= $2(3)^2$ -4(3) -1= 5

a > 0, 2 > 0 ⟶ f(x) (cóncava), abre hacia arriba.



Graficar f(x)= x^2-8x+14

a=1 , b=-8 y c=14

V($\frac{-b}{2a}$, f($\frac{-b}{2a}$), v(4,-2)

a > 0 , 1 > 0 f(x) es concava abre hacia arriba

Rf(x), x ϵ (-2, ∞)

Grafica f(x)= x^2-8x+14

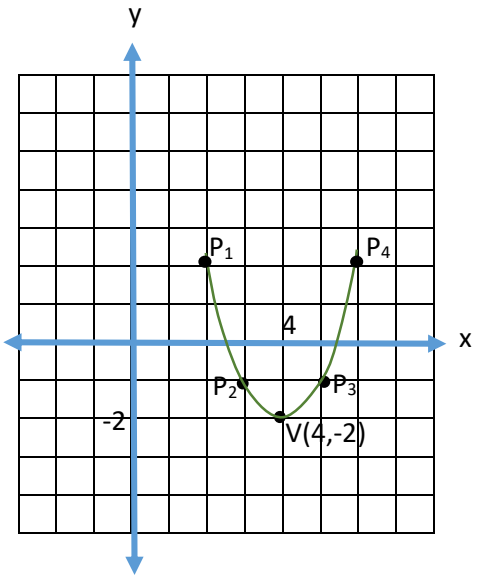


Tabla de valores

X	2	3	4	5	6
y	2	-1	-2	-1	2

f(x)= x^2-8x+14

f(3)= 3^2-8(3)+14= -1

f(2)=2^2-8(2)+14= 2

f(5)=5^2-8(5)+14=-1

f(6)=6^2-8(6)+14=2

Ejercicios : hallar dominio, rango y graficar

a) f(x) = x^2 – 2x -3 b) f(x) = x^2 – 4x +2 c) f(x) = - x^2 + 2x + 8

FUNCION EXPONENCIAL **https://www.youtube.com/watch?v=gea1Wz-yMC0**

Una función exponencial es una forma matemática ($f(x) = b^x$), donde la base (b) es una constante positiva ($b>0$) y distinta de 1 ($b \neq 1$), y la variable independiente (x) es el exponente. Se caracteriza por un crecimiento o decrecimiento muy rápido y constante.

Características Principales:

Dominio: Todos los números reales $(-\infty, \infty)$.

- **Rango:** Todos los números reales positivos $(0, \infty)$, lo que significa que la función nunca es cero o negativa.
- **Base (b):** Si ($b > 1$), la función es creciente (crecimiento exponencial). Si ($0 < b < 1$), la función es decreciente (decaimiento exponencial).
- **Intersección:** Siempre corta al eje (y) en el punto (0, 1), ya que ($b^0 = 1$) (si no hay desplazamientos verticales).
- **Asíntota:** Tiene una asíntota horizontal, generalmente en (y=0)

Forma General y Transformaciones:

La forma más general es ($f(x) = a.b^{x-h} + k$).

- **(k):** Determina el desplazamiento vertical y la nueva asíntota horizontal (y=k).
- **(a):** Si es negativa, refleja la función respecto al eje \(x\)
- **Si** se realizan transformaciones al exponente de la función, el Dominio y el Rango siguen siendo: Df(x): R , Ranf(x): (0, ∞)

,Ejemplo: $f(x) = 2^x$

Dominio f(x) = R

$f(x) = 2^x$ es creciente ya que a > 0, ⟶ **2 > 0**

formamos la tabla de valores dándole valores arbitrarios a la variable (x) para hallar los valores de la variable (y) y luego graficamos.

Tabla de valores

X	-2	-1	0	1	2
Y	0,25	0,5	1	2	4

$f(x) = 2^x$

K=0 , y=0 asíntota horizontal

$y= 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4} = 0,25$

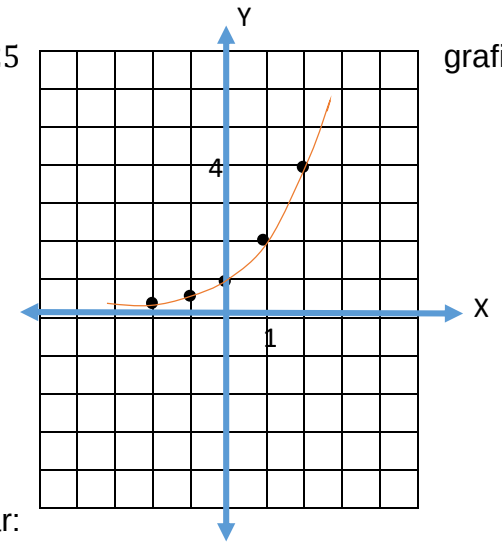
$y= 2^x$

$y= 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 0,5$

$y= 2^0 = 1$

$y= 2^1 = 2$

$y= 2^2 = 4$



grafica

Ejercicio: $f(x) = - 2^{x+1} + 3$, hallar: dominio y rango y graficar

1) -2 < 0 ⟶ a < 0 , f(x) es decreciente

2) K= 3 la asíntota horizontal pasa por y = 3
3) Dominio f(x): R

4) Rango f(x): (3, - ∞)

Tabla de valores

X	-2	-1	0	1	2
Y	2,5	2	1	1	-5

$f(x) = - 2^{x+1} + 3$

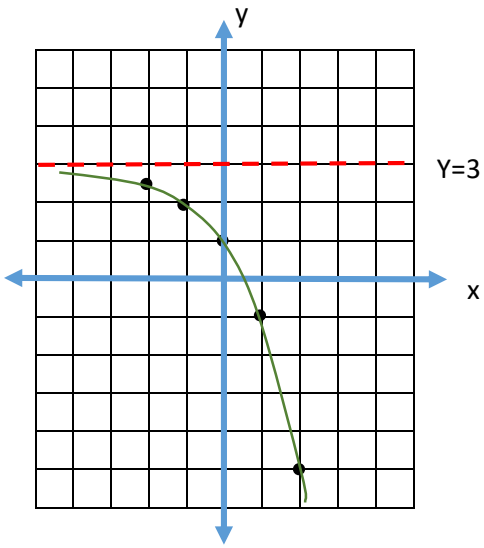
$f(-2)= -(2)^{-2+1} +3 = -(2)^{-1} + 3 = -\frac{1}{2} + 3= \frac{5}{2} = 2,5$

$f(-1)= -(2)^{-1+1} +3 = -(2)^{0} +3= -1+3= 2$

$f(0)= -(2)^{0+1} +3 = -(2) +3 = 1$

$f(1)= -(2)^{1+1} +3 = -(2)^{2} +3= -4+3= 1$

$f(2)= -(2)^{2+1} +3 = -(2)^{3} +3= -8 +3= -5$



FUNCION LOGARITMO

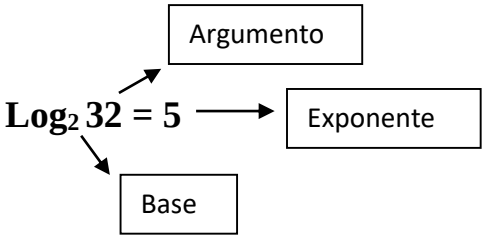
La función logarítmica, definida como $f(x)=\log_a(x)$, (donde $a>0$ y $a\neq1$), es la inversa de la función exponencial. Se caracteriza por tener un dominio de números reales positivos $(0,+\infty)$, un rango de todos los números reales, y una asíntota vertical, usualmente en $x=0$. La base (a) determina si la función crece ($a>1$) o decrece ($0<a<1$).

Características Principales

- **Definición:** Es la operación inversa a la potenciación, buscando el exponente (y) al que se debe elevar una base (a) para obtener (x) $(a^y = x)$.
- **Dominio:** La función solo está definida para valores positivos de (x) $(x>0)$.
- **Rango:**El conjunto de todos los números reales $(-\infty,+\infty)$.
- **Gráfica:** Pasa siempre por el punto (1,0) y tiene una asíntota vertical.
- **Inversa:** Es la función inversa de la exponencial $f(x) = a^x$

Tipos de Logaritmos

1. **Logaritmo Común:** Base 10, expresado como $\log(x)$.
2. **Logaritmo Natural:** Base (e)≈2.718), expresado como $\ln(x)$



Ejemplo. Hallar $Log_5 25$. Por definición $2^x = 25 \longrightarrow 5^x = 5^2$, por igualdad de potencias con igual base, tenemos x = 2 entonces $Log_5 25 = 2$

2) Hallar el valor de (x) $\log_2(8) = x$ por definición $2^x = 8$, $2^x = 2^3$ por igualdad de potencias con igual base x = 3, entonces $\log_2(8) = 3$

Ejercicios: hallar el valor de (x).

a) $Log_{5/2}125 = x$
b) $Log_{10}\ 0{,}001 = x$
c) $Log_2 32 = x$
d) $Log_9 \sqrt[4]{3} = x$

- Expresa los siguientes logaritmos en forma exponencial:

a) $Log_3 27 = 3$
b) $\log_2\ 8 = 3$
c) $\log_6\ 1/36 = -2$

Propiedades Algebraicas de los Logaritmos:

- Logaritmo de un producto: $(\log_a(m.\ n) = \log_a(m) + \log_a(n)$
- Logaritmo de un cociente: $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a(m) - \log_a(n)$
- Logaritmo de una potencia: $\log_a(m)^n = n.\log_a(m)$
- Logaritmo de la unidad: $\log_a(a) = 1$
- Logaritmo de la base: $\log_a(1) = 0$

Ejercicios:

a) $\log_a(5x) = \log_a 5 + \log_a x$
b) $\log_a\left(\frac{9}{5}\right) = \log_a 9 - \log_a 5$
c) $\log_a x^3 = 3 \log_a x$
d) $2 \log x + 3 \log y = \log x^2 + \log y^3 = \log(x^2 y^3)$
e) $\log 2 + \log 3 + \log 4 = \log(2.3.4) = \log 24$

Resolver:

a) $\log a + \log b + \log c =$
b) $\log a - \log x - \log y =$
c) $\log 10^8 =$
d) $\log 20 + \log \frac{10}{2} =$

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCION LOGARITMICA

https://www.youtube.com/watch?v=C0vUje9Uduc

El dominio de una función logarítmica básica ($f(x) = \log_b(x)$) son todos los números reales positivos ((0, ∞), ya que no existen logaritmos de números negativos o cero. El rango, por otro lado, comprende todos los números reales (-∞, ∞), lo que significa que la función puede tomar cualquier valor vertical

- **Dominio:** Se determina encontrando los valores de (x) que hacen que el argumento del logaritmo sea mayor que cero ((x > 0)). Si la función es más compleja, por ejemplo (f(x) = log(g(x)), se debe resolver (g(x) > 0).
- **Rango:** El rango de cualquier función logarítmica estándar siempre es el conjunto de todos los números reales (R).
- **Asíntota Vertical:** Existe una asíntota vertical donde el argumento del logaritmo es cero.
- **Relación Inversa:** El dominio de la función logarítmica es el rango de la función exponencial, y su rango es el dominio de la exponencial.

Ejemplo f(x) = Ln(6x -2) , Hallar el dominio

Para f(x) = Ln(6x -2), el argumento, **6x – 2 > 0,** resolvemos la inecuación , entonces $6x > 2 \longrightarrow x > \frac{2}{6} \longrightarrow \mathbf{x > \frac{1}{3}}$

Df(x): $x > \frac{1}{3}$, Df(x): $(\frac{1}{3}, \infty)$

Rf(x): x ϵ R . (-∞, ∞)

Hallamos la Asíntota vertical, 6x -2 = 0 resolvemos $6x = 2 \longrightarrow x = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$, la asíntota vertical para por el punto $x= \frac{1}{3}$

Tabla de valores

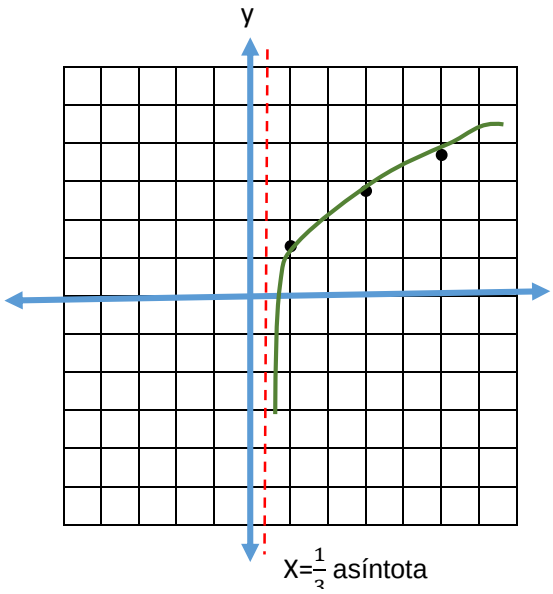
X	1	3	5
Y	1,38	2,77	3,33

F(x) = Ln(6x -2)

F(1) = Ln(6(1) -2) = ln(6-2)= ln4=1,38

F(3)= Ln(6(3) -2) = ln(18-2)= ln16=2,77

F(5) = Ln(6(5) -2) = Ln(30- 2) = Ln28= 3,33



FUNCION IRRACIONAL

Una función irracional es aquella donde la variable independiente (x) se encuentra dentro de un signo de raíz o radical. También se conocen como funciones radicales.

Características Principales

- **Forma general:** Se expresan como $f(x)=\sqrt[n]{g(x)}$, donde $g(x)$ es un polinomio o una función racional.
- **Índice impar:** Si la raíz tiene índice impar (como raíz cúbica), el dominio son todos los números reales ($\mathbb{R}$).
- **Índice par:** Si la raíz tiene índice par (como raíz cuadrada), el radicando debe ser mayor o igual a cero ($g(x)\geq 0$) para obtener valores reales.
- **Gráfica:** Su gráfica suele tener forma de una curva o media parábola desplazada en el plano

Cómo calcular el Dominio
El dominio de una función con índice par se calcula resolviendo una inecuación:

1. Se toma la expresión dentro de la raíz ($g(x)$).
2. Se plantea que sea mayor o igual a cero: $g(x)\geq 0$.
3. Se despeja la variable (x)para hallar los intervalos permitidos

Ejemplo: f(x) = $\sqrt{2x+4}$

Dominio $f(x)=\sqrt[n]{g(x)} \longrightarrow g(x) \geq 0$, $2x+4 \geq 0$ resolvemos la inecuación, $2x \geq -4$

$X \geq \frac{-4}{2} \longrightarrow x \geq -2$ Df(x) = [-2 , ∞)

El **dominio de la función inversa** (f^{-1}) es exactamente igual al **rango** (o imagen) de la función original (f(x))

Hallamos la función inver de f(x)= (f^{-1}),en la función **f(x) = $\sqrt{2x+4}$, o y = $\sqrt{2x+4}$**

Intercambiamos (x) por (y) y luego despejamos (y) para hallar la función inversa

X = $\sqrt{2y+4} \longrightarrow$ elevamos a la 2 ambos miembros $x^2 = \left(\sqrt{2y+4}\right)^2 \longrightarrow$
$x^2 = 2y+4 \longrightarrow x^2-4 = 2y \longrightarrow$ **y=** $\frac{x^2-4}{2}$ inversa de f(x) $\longrightarrow y^{-1} = \frac{x^2-4}{2}$

$Df^{-1} \longrightarrow x \epsilon R = (-\infty, \infty)$, **como f(x) =** $\sqrt{2x+4}$ esta definida solo para valores de

X ≥ -2, los valores de (y) siempre serán positivo es decir mayores que cero, entonces el **Rango de f(x) es [0 . ∞)**

Tabla de valores

X	-2	0	6
Y	0	2	4

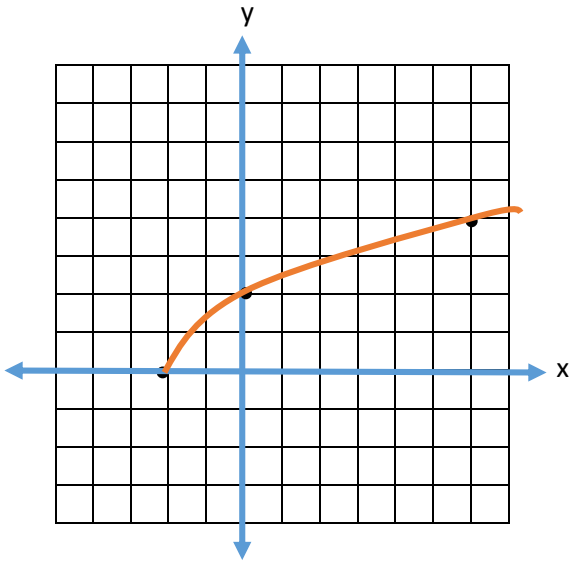
X= -2 ⟶ y= $\sqrt{2x+4}$ = $\sqrt{2(-2)+4}$

Y= $\sqrt{-4+4}$ = $\sqrt{0}$ ⟶ y = 0

X=0 ⟶ y= $\sqrt{2x+4}$= $\sqrt{2(0)+4}$

Y= $\sqrt{4}$ ⟶ y=2

X= 6 ⟶ y= $\sqrt{2x+4}$ = $\sqrt{2(6)+4}$

Y= $\sqrt{12+4}$ = $\sqrt{16}$ ⟶ y = 4

Grafica