

CAPITULO II:

Números Reales y Plano Numérico.

Sección 2.1: Desigualdades

Sección 2.2: Desigualdades con Valor Absoluto

Sección 2.3: Plano Numérico. Distancia y Punto Medio.

Sección 2.4: Circunferencia, Elipses e Hipérbolas.

Sección 2.1: Desigualdades

Definición 2.1.1: (Conjunto).

Se denomina conjunto a toda unión de objetos, dichos objetos se denominan elementos del conjunto. Los conjuntos se denotan con letras mayúsculas y se colocan entre llaves.

Ejemplos:

1. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $B = \{a, e, i, o, u\}$
3. $C = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$
4. $D = \{lun, mar, \dots, dom\}$

Observación:

- Existen muchos tipos de conjuntos. Sin embargo, podemos citar entre los más importantes:
 - Conjunto vacío: No posee elementos ($A = \{ \} = \phi$)
 - Conjunto unitario: Posee un único elemento ($A = \{5\}$)
 - Conjunto finito o numerable: Posee una cantidad contable de elementos ($A = \{1, 5, 10\}, B = \{1, 2, \dots, 60\}$)
 - Conjunto infinito: Posee una cantidad no numerable o contable de elementos ($A = \{1, 2, 3, \dots\}$)
- También se pueden clasificar de acuerdo a como se expresan los elementos del conjunto:
 - Conjuntos por extensión: Cuando se aprecian explícitamente los elementos ($A = \{1, 2, 3, 5\}, B = \{1, 3, 5, \dots, 21\}$)
 - Conjuntos por comprensión: Cuando los elementos vienen expresados por medio de una ley de formación ($A = \{2k + 1 / k \in N\}, B = \{x / x_es_divisor_de_30\}$)

Definición 2.1.2: (Sub conjunto)

Sean A y B dos conjuntos tales que todos los elementos de B estén en A, en tal caso se dice que B es sub conjunto propio de A y se escribe: $B \subset A$

Ejemplo: Sean $A = \{2,4,6\}$, $B = \{1,2,...,10\}$, notemos que los elementos de A están en B. Así, $A \subset B$

Conjuntos Notables

- Conjunto Natural: $N = \{0,1,2,3,4,...\}$
- Conjunto Entero: $Z = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- Conjunto Racional: $Q = \{a/b / a, b \in Z \wedge b \neq 0\}$
- Conjunto Irracional: $I = \{a^{b/c} / a, b, c \in Z \wedge c \neq 0\}$
- Conjunto Real: $R = Q \cup I$

Definición 2.1.3: Sean A y B dos conjuntos cualesquiera:

1. La Unión de A con B, representa el conjunto formado por todos los elementos de A junto con todos los elementos de B.

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

2. La Intersección de A con B, representa el conjunto formado por todos los elementos comunes entre A y B.

$$A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$$

3. Dos conjuntos A y B son iguales si y solo si A es subconjunto de B y B es sub conjunto de A. ($A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$)

Ejemplo: Sean $A = \{2,4,6,8,10,12\}$, $B = \{1,4,9,16\}$ y $C = \{2,10\}$. Entonces:

$$A \cup B = \{1,2,4,6,8,9,10,12,16\}, \quad A \cap B = \{4\}, \quad B \cup C = \{1,2,4,9,10,16\} \text{ y}$$

$$B \cap C = \{ \} = \phi$$

Observaciones:

1. Sea A cualquier conjunto: $A \cup \phi = A$ y $A \cap \phi = \phi$
2. $N \subset Z \subset Q \wedge N \subset Z \subset I$ pero $Q \not\subset I \wedge I \not\subset Q$. Además,
 $Q \cap I = \phi$
3. El conjunto de números reales es el mayor conjunto que consideraremos y representa la escala real o escala numérica ($R = Q \cup I$)

Desigualdades

Definición 2.1.4: Sean a, b, c y d números reales:

1. $a < b \Leftrightarrow (b - a)$ es positivo
2. $a > b \Leftrightarrow (a - b)$ es positivo
3. $a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$
4. $a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$
5. $a > 0 \Leftrightarrow a$ es positivo
6. $a < 0 \Leftrightarrow a$ es negativo
7. $a < b \wedge b < c \Rightarrow a < c$
8. $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$
9. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$ y $a < b \Rightarrow a - c < b - c$
10. $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow a.c < b.c$
11. $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow a.c > b.c$

Intervalos

Ahora estudiaremos trozos continuos de la recta real, dichos trozos se denominan intervalos. Un número cualquiera x está ubicado entre dos valores fijos a y b si $a < x$ y $x < b$, lo cual se puede representar como $a < x < b$ (x : variable. a : extremo inicial y b : extremo final).

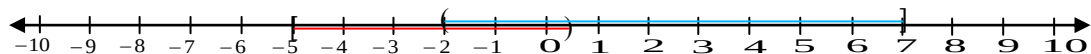
Clasificación de los Intervalos

- Abierto: $(a, b) = \{x \in R / a < x < b\}$
- Cerrado: $[a, b] = \{x \in R / a \leq x \leq b\}$

- Semi-abierto: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$ y $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$
- Infinito: $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$, $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$,
 $(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$, $(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$ y
 $(-\infty, +\infty) = (-\infty, a] \cup (a, +\infty) = \mathbb{R}$

Ejemplos:

1. Si $A = [-5, \frac{1}{2})$ y $B = (-2, 7]$. Hallar $A \cup B$ y $A \cap B$

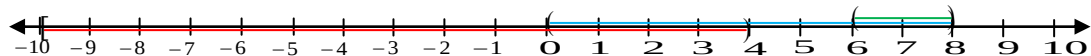


$$A \cup B = [-5, \frac{1}{2}) \cup (-2, 7] = [-5, 7]$$

$$A \cap B = [-5, \frac{1}{2}) \cap (-2, 7] = (-2, \frac{1}{2}), \text{ (notar que en esta sección hay un doble lineado en la gráfica)}$$

2. Si $A = [-10, 4)$, $B = (6, 8)$, $C = (0, 8)$ y $D = [6, 10]$. Hallar: a)

$$A \cap B \cap C$$



$$A \cap B \cap C = [-10, 4) \cap (6, 8) \cap (0, 8) = \emptyset \text{ (Notar que no existe un triple lineado)}$$

b) $B \cap C \cap D$



$$B \cap C \cap D = (6, 8) \cap (0, 8) \cap [6, 10] = (6, 8) \text{ (Observen que en este intervalo se ve un triple lineado en la gráfica)}$$

Ejercicios resueltos 2.1: En cada caso, hallar el conjunto solución y graficar.

1. $5x + 2 > x - 6$

Solución.

$$5x + 2 > x - 6 \Rightarrow 5x + 2 - 2 > x - 6 - 2 \quad (\text{Restar 2 en ambos lados})$$

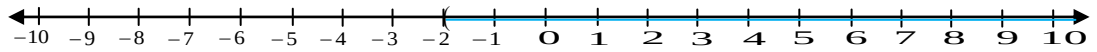
$$\Rightarrow 5x > x - 8 \quad (\text{Agrupar términos})$$

$$\Rightarrow 5x - x > x - 8 - x \quad (\text{Restar x en ambos lados})$$

$$\Rightarrow 4x > -8 \quad (\text{Agrupar términos})$$

$$\Rightarrow 4x \cdot \left(\frac{1}{4}\right) > -8 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \quad (\text{Mult. Por el inverso de 4})$$

$$\Rightarrow x > -2 \quad (\text{Simplificar})$$



$$\therefore S = (-2, +\infty)$$

2. $2x - 5 \geq 7x + 1$

Solución.

$$2x - 5 \geq 7x + 1 \Rightarrow 2x - 5 + 5 \geq 7x + 1 + 5 \quad (\text{Sumar 5 en ambos lados})$$

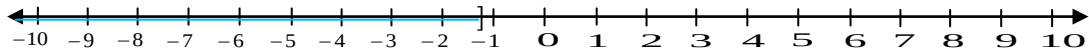
$$\Rightarrow 2x \geq 7x + 6 \quad (\text{Agrupar términos})$$

$$\Rightarrow 2x - 7x \geq 7x + 6 - 7x \quad (\text{Restar } 7x \text{ en ambos lados})$$

$$\Rightarrow -5x \geq 6 \quad (\text{Agrupar términos})$$

$$\Rightarrow -5x \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \leq 6 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \quad (\text{Mult. Por el inverso de -5})$$

$$\Rightarrow x \leq -\frac{6}{5} \quad (\text{Simplificar})$$



$$\therefore S = (-\infty, -6/5]$$

3. $\frac{x+1}{3} - \frac{3x-4}{4} \leq \frac{x}{6} - \frac{7x+1}{2}$

Solución.

Calculemos el mínimo común múltiplo entre los denominadores: $\text{mcm}(3,4,6) = 12$.

$$12 \cdot \left(\frac{x+1}{3} - \frac{3x-4}{4}\right) \leq 12 \cdot \left(\frac{x}{6} - \frac{7x+1}{2}\right) \quad (\text{Multiplicamos el m. c. m. en ambos lados})$$

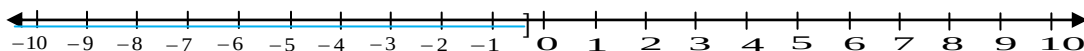
$$\Rightarrow 4 \cdot (x+1) - 3 \cdot (3x-4) \leq 2 \cdot (x) - 6 \cdot (7x+1)$$

$$\Rightarrow 4x + 4 - 9x + 12 \leq 2x - 42x - 6 \Rightarrow -5x + 16 \leq -40x - 6$$

$$\Rightarrow -5x + 16 + 40x \leq -40x - 6 + 40x \Rightarrow 35x + 16 \leq -6$$

$$\Rightarrow 35x + 16 - 16 \leq -6 - 16 \Rightarrow 35x \leq -22$$

$$\Rightarrow 35x \cdot \left(\frac{1}{35}\right) \leq -22 \cdot \left(\frac{1}{35}\right) \Rightarrow x \leq -22/35$$



$$\therefore S = \left(-\infty, -\frac{22}{35}\right]$$

4. $2 > -3 - 3x \geq -7$

Solución.

Notemos que en este caso tenemos una doble desigualdad. Podemos resolverla en forma simultánea o separar las desigualdades. Para aportar mayor información procederemos de ambas formas.

Primera forma (en simultáneo)

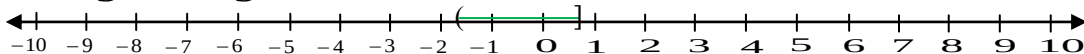
$$2 > -3 - 3x \geq -7$$

$$\Rightarrow 2 + 3 > -3 - 3x + 3 \geq -7 + 3$$

$$\Rightarrow 5 > -3x \geq -4$$

$$\Rightarrow 5 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) < -3x \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \leq -4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{3} < x \leq \frac{4}{3}$$



$$\therefore S = \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right]$$

Segunda forma (por separado)

$$2 > -3 - 3x \geq -7$$

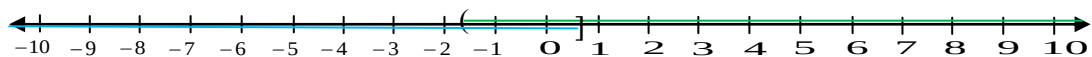
$$\Rightarrow (2 > -3 - 3x) \wedge (-3 - 3x \geq -7)$$

$$\Rightarrow (2 + 3 > -3 - 3x + 3) \wedge (-3 - 3x + 3 \geq -7 + 3)$$

$$\Rightarrow (5 > -3x) \wedge (-3x \geq -4)$$

$$\Rightarrow (5 \cdot (-\frac{1}{3}) < -3x \cdot (-\frac{1}{3})) \wedge (-3x \cdot (-\frac{1}{3}) \leq -4 \cdot (-\frac{1}{3}))$$

$$\Rightarrow (-\frac{5}{3} < x) \wedge (x \leq \frac{4}{3}) \Rightarrow (x > -\frac{5}{3}) \wedge (x \leq \frac{4}{3})$$



$$\text{Así, } S = \left(-\frac{5}{3}, +\infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{4}{3}\right] = \left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right]$$

5. $5x + 2 \leq \frac{3+2x}{4} \leq 3 - 4x$

Solución.

$$4 \cdot (5x + 2) \leq 4 \cdot \left(\frac{3+2x}{4} \right) \leq 4 \cdot (3 - 4x)$$

$$\Rightarrow 20x + 8 \leq 3 + 2x \leq 12 - 16x$$

$$\Rightarrow (20x + 8 \leq 3 + 2x) \wedge (3 + 2x \leq 12 - 16x)$$

$$\Rightarrow (20x + 8 - 8 \leq 3 + 2x - 8) \wedge (3 + 2x - 3 \leq 12 - 16x - 3)$$

$$\Rightarrow (20x \leq 2x - 5) \wedge (2x \leq 9 - 16x)$$

$$\Rightarrow (20x - 2x \leq 2x - 5 - 2x) \wedge (2x + 16x \leq 9 - 16x + 16x)$$

$$\Rightarrow (18x \leq -5) \wedge (18x \leq 9) \Rightarrow \frac{18x}{18} \leq -\frac{5}{18} \wedge \frac{18x}{18} \leq \frac{9}{18}$$

$$\Rightarrow x \leq -\frac{5}{18} \wedge x \leq \frac{1}{2}$$



Así, $S = (-\infty, -\frac{5}{18}] \cap (-\infty, \frac{1}{2}] = (-\infty, -\frac{5}{18}]$

6. $\frac{x}{x-5} < 6$

Solución.

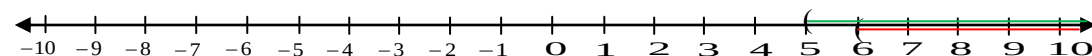
Caso 01: $x - 5 > 0 \Rightarrow x > 5$

$$\frac{x}{x-5} \cdot (x-5) < 6 \cdot (x-5) \Rightarrow x < 6x - 30$$

$$\Rightarrow x + 30 < 6x - 30 + 30 \Rightarrow x + 30 < 6x$$

$$\Rightarrow x + 30 - x < 6x - x \Rightarrow 30 < 5x$$

$$\Rightarrow \frac{30}{5} < \frac{5x}{5} \Rightarrow 6 < x \Rightarrow x > 6$$



Así, $S_1 = (5, +\infty) \cap (6, +\infty) = (6, +\infty)$

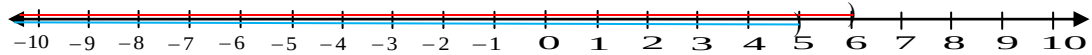
Caso 02: $x - 5 < 0 \Rightarrow x < 5$

$$\frac{x}{x-5} \cdot (x-5) > 6 \cdot (x-5) \Rightarrow x > 6x - 30$$

$$\Rightarrow x + 30 > 6x - 30 + 30 \Rightarrow x + 30 > 6x$$

$$\Rightarrow x + 30 - x > 6x - x \Rightarrow 30 > 5x$$

$$\Rightarrow \frac{30}{5} > \frac{5x}{5} \Rightarrow 6 > x \Rightarrow x < 6$$



Así, $S_2 = (-\infty, 5) \cap (-\infty, 6) = (-\infty, 5)$

Luego, $S_T = S_1 \cup S_2 = (6, +\infty) \cup (-\infty, 5)$



$$\therefore S_T = (-\infty, 5) \cup (6, +\infty)$$

7. $\frac{3x+2}{2x-7} \leq 0$

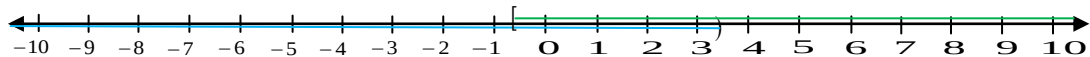
Solución.

Caso 01: $3x + 2 \geq 0 \wedge 2x - 7 < 0$

$$\Rightarrow 3x + 2 - 2 \geq 0 - 2 \wedge 2x - 7 + 7 < 0 + 7$$

$$\Rightarrow 3x \geq -2 \wedge 2x < 7$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{3} \geq -\frac{2}{3} \wedge \frac{2x}{2} < \frac{7}{2} \Rightarrow x \geq -\frac{2}{3} \wedge x < \frac{7}{2}$$



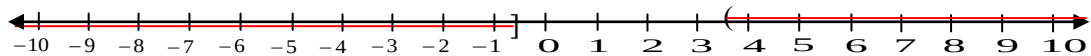
Así, $S_1 = [-\frac{2}{3}, +\infty) \cap (-\infty, \frac{7}{2}) = [-\frac{2}{3}, \frac{7}{2})$

Caso 02: $3x + 2 \leq 0 \wedge 2x - 7 > 0$

$$\Rightarrow 3x + 2 - 2 \leq 0 - 2 \wedge 2x - 7 + 7 > 0 + 7$$

$$\Rightarrow 3x \leq -2 \wedge 2x > 7$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{3} \leq -\frac{2}{3} \wedge \frac{2x}{2} > \frac{7}{2} \Rightarrow x \leq -\frac{2}{3} \wedge x > \frac{7}{2}$$



Así, $S_2 = (-\infty, -\frac{2}{3}] \cap (\frac{7}{2}, +\infty) = \emptyset$

$$\text{Luego, } S_T = S_1 \cup S_2 = \left[-\frac{2}{3}, \frac{7}{2}\right) \cup \emptyset = \left[-\frac{2}{3}, \frac{7}{2}\right) \\ \therefore S_T = \left[-\frac{2}{3}, \frac{7}{2}\right)$$

8. $\frac{1}{x+1} < \frac{2}{3x-1}$

Solución.

Caso 01: $3x - 1 > 0 \Rightarrow 3x > 1 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$

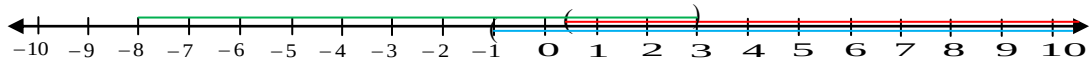
$$\frac{1}{x+1} \cdot (3x-1) < \frac{2}{3x-1} \cdot (3x-1) \Rightarrow \frac{3x-1}{x+1} < 2$$

Caso 1.1: $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$$\frac{3x-1}{x+1} \cdot (x+1) < 2 \cdot (x+1) \Rightarrow 3x-1 < 2x+2$$

$$\Rightarrow 3x-1+1 < 2x+2+1 \Rightarrow 3x < 2x+3$$

$$\Rightarrow 3x-2x < 2x+3-2x \Rightarrow x < 3$$



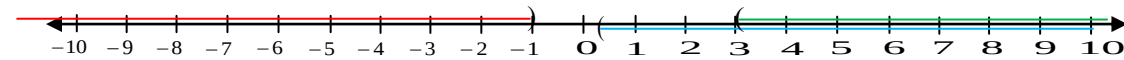
$$S_{1.1} = \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \cap (-1, +\infty) \cap (-\infty, 3) = \left(\frac{1}{3}, 3\right)$$

Caso 1.2: $x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$

$$\frac{3x-1}{x+1} \cdot (x+1) > 2 \cdot (x+1) \Rightarrow 3x-1 > 2x+2$$

$$\Rightarrow 3x-1+1 > 2x+2+1 \Rightarrow 3x > 2x+3$$

$$\Rightarrow 3x-2x > 2x+3-2x \Rightarrow x > 3$$



$$S_{1.2} = \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \cap (-\infty, -1) \cap (3, +\infty) = \emptyset$$

$$S_1 = S_{1.1} \cup S_{1.2} = \left(\frac{1}{3}, 3\right) \cup \emptyset = \left(\frac{1}{3}, 3\right)$$

Caso 02: $3x - 1 < 0 \Rightarrow 3x < 1 \Rightarrow x < \frac{1}{3}$

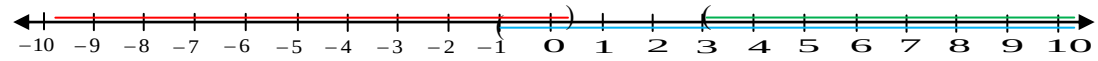
$$\frac{1}{x+1} \cdot (3x-1) > \frac{2}{3x-1} \cdot (3x-1) \Rightarrow \frac{3x-1}{x+1} > 2$$

Caso 2.1: $x + 1 > 0 \Rightarrow x > -1$

$$\frac{3x-1}{x+1} \cdot (x+1) > 2 \cdot (x+1) \Rightarrow 3x-1 > 2x+2$$

$$\Rightarrow 3x-1+1 > 2x+2+1 \Rightarrow 3x > 2x+3$$

$$\Rightarrow 3x-2x > 2x+3-2x \Rightarrow x > 3$$



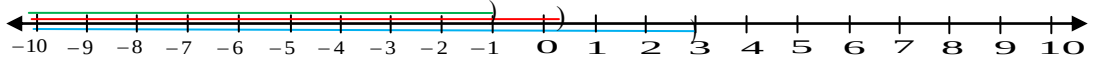
$$S_{2.1} = (-\infty, \frac{1}{3}) \cap (-1, +\infty) \cap (3, +\infty) = \emptyset$$

Caso 2.2: $x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1$

$$\frac{3x-1}{x+1} \cdot (x+1) < 2 \cdot (x+1) \Rightarrow 3x-1 < 2x+2$$

$$\Rightarrow 3x-1+1 < 2x+2+1 \Rightarrow 3x < 2x+3$$

$$\Rightarrow 3x-2x < 2x+3-2x \Rightarrow x < 3$$



$$S_{2.2} = (-\infty, \frac{1}{3}) \cap (-\infty, -1) \cap (-\infty, 3) = (-\infty, -1)$$

$$S_2 = S_{2.1} \cup S_{2.2} = \emptyset \cup (-\infty, -1) = (-\infty, -1)$$

$$\text{Luego, } S_T = S_1 \cup S_2 = (\frac{1}{3}, 3) \cup (-\infty, -1)$$

$$\therefore S_T = (-\infty, -1) \cup (\frac{1}{3}, 3)$$

Ejercicios propuestos 2.1: En cada caso, hallar el conjunto solución.

$$1. \frac{x+1}{2} - \frac{x}{4} \leq \frac{x}{3} + \frac{4-x}{6} \quad 2. \frac{x+3}{6} - \frac{1}{3} \leq \frac{2-x}{2} + \frac{5x}{3} \quad 3. \frac{x-1}{2} + \frac{x-2}{5} \geq \frac{x+1}{10} + \frac{x}{5}$$

$$4. \frac{x-2}{4} + \frac{x-3}{3} \geq \frac{x+2}{6} + \frac{1}{2} \quad 5. \frac{x+1}{2-x} \leq 6 \quad 6. \frac{1}{3x-7} \geq 2$$

$$7. \frac{x-1}{x+1} \geq \frac{1}{4} \quad 8. \frac{x-2}{x-4} \geq \frac{3}{5} \quad 9. \frac{3}{x-4} \leq 3$$

$$10. \frac{5x-1}{x+1} \leq 1 \quad 11. \frac{1}{2} \geq \frac{3x-4}{x-2} \quad 12. \frac{x+5}{x+3} \leq 5$$

$$13. \frac{2}{x-1} < \frac{3}{x+5} \quad 14. \frac{5}{x+1} - \frac{2}{2x+1} < 0 \quad 15. \frac{2}{x-3} - \frac{1}{2x} < 0$$

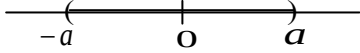
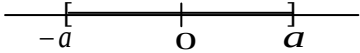
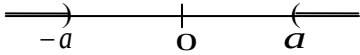
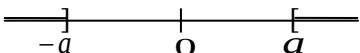
Sección 2.2: Desigualdades con Valor Absoluto

El valor absoluto de todo número a , viene dado por:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Ejemplo: $|2| = 2$ y $|-2| = -(-2) = 2$

Teorema 2.2.1: Sea $a \in \mathbb{R}^+$:

- | | |
|---|--|
| 1. $ x < a \Leftrightarrow -a < x < a$ |  |
| 2. $ x \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ |  |
| 3. $ x > a \Leftrightarrow x > a \vee x < -a$ |  |
| 4. $ x \geq a \Leftrightarrow x \geq a \vee x \leq -a$ |  |

Ejercicios resueltos 2.2: En cada caso, hallar el conjunto solución.

1. $|3x - 4| \leq 2$

Solución.

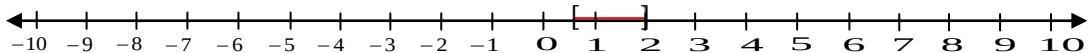
$$|3x - 4| \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 3x - 4 \leq 2 \quad (\text{Aplicación de la propiedad 1 del teorema})$$

$$\Rightarrow -2 + 4 \leq 3x - 4 + 4 \leq 2 + 4$$

$$\Rightarrow 2 \leq 3x \leq 6$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{3x}{3} \leq \frac{6}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} \leq x \leq 2$$



$$\therefore S = \left[\frac{2}{3}, 2\right]$$

2. $|3x + 2| > 1$

Solución.

$$|3x + 2| > 1 \Rightarrow 3x + 2 > 1 \vee 3x + 2 < -1 \quad (\text{Aplic. de la prop. 3 del teorema})$$

$$\Rightarrow 3x + 2 - 2 > 1 - 2 \vee 3x + 2 - 2 < -1 - 2$$

$$\Rightarrow 3x > -1 \vee 3x < -3$$

$$\Rightarrow \frac{3x}{3} > -\frac{1}{3} \vee \frac{3x}{3} < -\frac{3}{3}$$

$$\Rightarrow x > -\frac{1}{3} \vee x < -1$$



$$\therefore S = (-\infty, -1) \cup (-\frac{1}{3}, +\infty)$$

3. $|x - 3| \leq 5x + 1$

Solución. Recordemos que el valor absoluto es siempre positivo, de tal forma que

$$5x + 1 \geq 0 \Rightarrow 5x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{5}$$

$$|x - 3| \leq 5x + 1 \Rightarrow -(5x + 1) \leq x - 3 \leq 5x + 1$$

$$\Rightarrow -5x - 1 \leq x - 3 \wedge x - 3 \leq 5x + 1$$

$$\Rightarrow -5x - 1 + 5x \leq x - 3 + 5x \wedge x - 3 - x \leq 5x + 1 - x$$

$$\Rightarrow -1 \leq 6x - 3 \wedge -3 \leq 4x + 1$$

$$\Rightarrow -1 + 3 \leq 6x - 3 + 3 \wedge -3 - 1 \leq 4x + 1 - 1$$

$$\Rightarrow 2 \leq 6x \wedge -4 \leq 4x$$

$$\Rightarrow \frac{2}{6} \leq \frac{6x}{6} \wedge -\frac{4}{4} \leq \frac{4x}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq x \wedge -1 \leq x$$



$$\therefore S = [-\frac{1}{5}, +\infty) \cap [\frac{1}{3}, +\infty) \cap [-1, +\infty) = [\frac{1}{3}, +\infty)$$

4. $\left| \frac{x+2}{2x-3} \right| < 4$

Solución.

$$\left| \frac{x+2}{2x-3} \right| < 4 \Rightarrow -4 < \frac{x+2}{2x-3} < 4$$

Caso 01: $2x - 3 > 0 \Rightarrow 2x > 3 \Rightarrow x > \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow -4 \cdot (2x - 3) < \frac{x+2}{2x-3} \cdot (2x - 3) < 4 \cdot (2x - 3)$$

$$\Rightarrow -8x + 12 < x + 2 < 8x - 12$$

$$\Rightarrow -8x + 12 < x + 2 \wedge x + 2 < 8x - 12$$

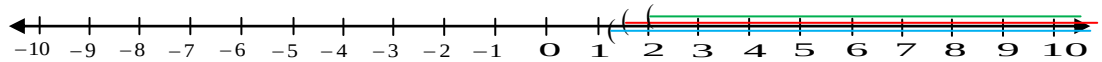
$$\Rightarrow -8x + 12 + 8x < x + 2 + 8x \wedge x + 2 - x < 8x - 12 - x$$

$$\Rightarrow 12 < 9x + 2 \wedge 2 < 7x - 12$$

$$\Rightarrow 12 - 2 < 9x + 2 - 2 \wedge 2 + 12 < 7x - 12 + 12$$

$$\Rightarrow 10 < 9x \wedge 14 < 7x$$

$$\Rightarrow \frac{10}{9} < \frac{9x}{9} \wedge \frac{14}{7} < \frac{7x}{7} \Rightarrow x > \frac{10}{9} \wedge x > 2$$



Así, $S_1 = (\frac{3}{2}, +\infty) \cap (\frac{10}{9}, +\infty) \cap (2, +\infty) = (2, +\infty)$

Caso 02: $2x - 3 < 0 \Rightarrow 2x < 3 \Rightarrow x < \frac{3}{2}$

$$\Rightarrow -4.(2x - 3) > \frac{x + 2}{2x - 3} . (2x - 3) > 4.(2x - 3)$$

$$\Rightarrow -8x + 12 > x + 2 > 8x - 12$$

$$\Rightarrow -8x + 12 > x + 2 \wedge x + 2 > 8x - 12$$

$$\Rightarrow -8x + 12 + 8x > x + 2 + 8x \wedge x + 2 - x > 8x - 12 - x$$

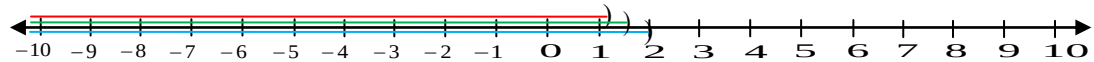
$$\Rightarrow 12 > 9x + 2 \wedge 2 > 7x - 12$$

$$\Rightarrow 12 - 2 > 9x + 2 - 2 \wedge 2 + 12 > 7x - 12 + 12$$

$$\Rightarrow 10 > 9x \wedge 14 > 7x$$

$$\Rightarrow \frac{10}{9} > \frac{9x}{9} \wedge \frac{14}{7} > \frac{7x}{7}$$

$$\Rightarrow x < \frac{10}{9} \wedge x < 2$$



Así, $S_2 = (-\infty, \frac{3}{2}) \cap (-\infty, \frac{10}{9}) \cap (-\infty, 2) = (-\infty, \frac{10}{9})$

Luego, $S_T = S_1 \cup S_2 = (2, +\infty) \cup (-\infty, \frac{10}{9})$

$$\therefore S_T = (-\infty, \frac{10}{9}) \cup (2, +\infty)$$

5. $|x - 2| \leq |x + 1|$ (Método de Barras)

Solución.

— — —	— — —	+ + +	$x - 2$
— — —	+ + +	+ + +	$x + 1$
	$x = -1$	$x = 2$	

$$\mathfrak{R} = (-\infty, -1] \cup (-1, 2) \cup [2, +\infty)$$

Caso 01: $(-\infty, -1]$: $-(x - 2) \leq -(x + 1)$

$$\Rightarrow -x + 2 \leq -x - 1 \Rightarrow -x + 2 + x \leq -x - 1 + x \Rightarrow 2 \leq -1$$

(Contradicción! Debido a que este resultado no es válido para ningún número real).

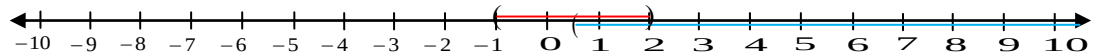
Así, $S_1 = (-\infty, -1] \cap \emptyset = \emptyset$

Caso 02: $(-1, 2)$: $-(x - 2) \leq x + 1$

$$\Rightarrow -x + 2 \leq x + 1 \Rightarrow -x + 2 + x \leq x + 1 + x$$

$$\Rightarrow 2 \leq 2x + 1 \Rightarrow 2 - 1 \leq 2x + 1 - 1$$

$$\Rightarrow 1 \leq 2x \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2x}{2} \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$$



Así, $S_2 = (-1, 2) \cap [\frac{1}{2}, +\infty) = [\frac{1}{2}, 2)$

Caso 03: $[2, +\infty)$: $x - 2 \leq x + 1$

$$\Rightarrow x - 2 - x \leq x + 1 - x \Rightarrow -2 \leq 1$$

(Tautología! Debido a que este resultado es válido para todo número real).

Así, $S_3 = [2, +\infty) \cap \mathfrak{R} = [2, +\infty)$

Luego, $S_T = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = \emptyset \cup [\frac{1}{2}, 2) \cup [2, +\infty)$

$$\therefore S_T = [\frac{1}{2}, +\infty)$$

Ejercicios propuestos 2.2: En cada caso, hallar el conjunto solución.

1. $|x + 4| \leq 2x - 6$

2. $|2x - 1| \leq x + 3$

3. $|8 - 12x| \geq x + 3$

4. $|2x - 1| \geq 1 + 2x$

5. $|3 + 2x| \leq |4 - x|$

6. $|8 - 12x| \geq |x + 3|$

7. $|2x - 1| \leq |3 + x|$

8. $\left| \frac{6 - 5x}{3 + x} \right| \geq \frac{1}{2}$

9. $\left| \frac{2 - 3x}{x + 3} \right| \leq \frac{1}{4}$

10. $\left| \frac{2x - 5}{1 - 3x} \right| \geq 5$

11. $\left| \frac{x - 5}{4x + 3} \right| < 2$

12. $\left| \frac{5 + 2x}{4 - 2x} \right| > 4$