

ANÁLISIS NUMÉRICO



**CARRERA: ANÁLISIS DE SISTEMAS.
SEMESTRE: CUARTO.**

A MODO DE PROLOGO

El análisis numérico es un método que vincula principios matemáticos con herramientas computacionales para resolver problemas muy complejos. El desarrollo de métodos algorítmicos numéricos para estudiar situaciones cuyas soluciones usando fórmulas o teoremas no son viables o precisas debido a las características de la información implicada.

El análisis usando algoritmos numéricos, organizados en directos, recursivos e iterativos, permiten la resolución de problemas en diversas áreas, la inteligencia artificial o el aprendizaje automático

Su influencia en la resolución de diversos problemas de ingeniería y la ciencia del análisis numérico permite genera grandes avances en la mecánica, las tecnologías de la información y la bioingeniería. Los procesos y manejo de datos necesitan el cálculo numérico, y el desarrollo de *hardware* y *software* más avanzados.

SIMÓN NATIVIDAD DÍAZ ESPÍN
LICENCIADO EN EDUCACIÓN
MENCIÓN MATEMÁTICAS



ÍNDICE

Introducción	08
Unidad 1 - Fundamentos matemáticos del análisis numérico	10
Sistemas de información	10
Cálculo de Error	11
Tipos de errores	12
Clasificación de los errores	13
Los errores en operaciones numéricas	14
Cambio de bases numérica	15
Ejemplo de cambio de base	16
Auto evaluación	18
Algoritmos	19
Historia	21
Métodos directos e iterativos	22
Discretización e integración numérica	23
Problemas	25
Áreas de estudio	26
Cálculo de los valores de una función	26
Errores y su consecuencia en los algoritmos	26
El diagrama de flujo	27
Características	28
Tipos de diagramas de flujo	28
Simbología y significado	29
Formas comunes	29
Cursograma	32
Pseudocódigo	33
Determinar la solución de una ecuación de segundo grado	34

Hacer un algoritmo para resolver una ecuación de segundo grado	36
Resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales	38
Cálculo de Ángulos entre Dos Vectores	39
Realizar Sumatoria	41
Combinatoria	42
Factorial de un número	43
Principio fundamental de conteo	44
Variaciones	44
Permutaciones	45
Permutaciones circulares	45
Permutaciones con repetición	45
Combinaciones	46
Combinaciones con repetición	47
Vectores	48
Suma de vectores	50
Interpretación gráfica de la suma	50
Regla del paralelogramo	51
Resta de vectores	51
Producto de vector por escalar	52
Funciones Exponenciales Utilizando Series	54
Aplicando funciones exponenciales	56
Estudios de Matrices	58
Operaciones de matrices	59
Suma de matrices	59
Producto de un número real por una matriz	60
Producto de matrices	61
Matriz inversa	63
Tipos de matrices	64
Auto evaluación	71

Unidad 2 - Solución numérica de ecuaciones	73
Ecuaciones	73
Aproximación de funciones	73
Ajuste de curvas	73
Aproximaciones geométricas	74
Aproximación según Fermi	74
Método de Newton.	76
Método de Runge – Kutta	76
Método iterativo	76
Puntos fijos atractivos	77
Sistemas lineales	77
Métodos iterativos estacionarios	77
Métodos del subespacio de Krylov	77
Convergencia	78
Precondicionantes	78
Serie de Taylor	78
Mínimos Cuadrados	79
Aproximación Diofántica	79
Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones	80
El Método de Bisección	82
Iteración del punto fijo	89
Método de la falsa posición.	97
Auto evaluación.	98
Unidad 3 - Sistemas de ecuaciones lineales	99
Sistemas lineales reales	100
Representación gráfica	100
Tipos de sistemas lineales	101
Clasificación de sistemas lineales	101
Algoritmo para determinar si un sistema es compatible	102

Sistemas compatibles indeterminados	102
Sistemas incompatibles	103
Resolución de sistemas de ecuaciones lineales	104
Sustitución	104
Igualación	105
Reducción	105
Método gráfico	107
Método de Gauss	108
Ejemplo de eliminación de Gauss – Jordán	108
Regla de Cramer	108
Auto evaluación.	109
Unidad 4 - Programación del método de Gauss – Jordán	110
Algoritmos numéricos de Gauss – Jordán	110
La eliminación de Gauss – Jordán	111
Antecedentes	113
Definiciones y ejemplo de algoritmo	113
Operaciones de fila	114
Algoritmo de eliminación de Gauss y de Gauss-Jordán	114
Forma escalonada y reducida	117
Otras aplicaciones (Encontrar la inversa de una matriz)	118
Métodos iterativos de Jacobi y Gauss – Seidel	120
Definición del método de Jacobi	120
Criterio de convergencia del Método de Jacobi	123
Método de Gauss – Seidel.	124
Criterio de convergencia del Método de Gauss – Seidel	125
Conclusiones	127
Otra forma del desarrollo del método Gauss – Seidel	128
Observación	132
Auto evaluación	135

Unidad 5 - Vectores característicos y valores de una Matriz	137
Valores propios y vectores propios para una matriz cuadrada.	137
Definición	139
Determinación de los vectores propios y valores propios	141
Multiplicidad de un valor propio	141
Polinomio característico	149
Fundamento	150
Autoevaluación	156
Referencias bibliográficas	157

INTRODUCCIÓN

El análisis numérico o cálculo numérico es el estudio matemático, aplicando secuencia lógicas usando procesos simples para estructurar algoritmos, que permita obtener soluciones matemáticas a cálculos complejos, que se presentan en la vida diaria común. Henrice lo definió como “la disciplina que se ocupa de la descripción y análisis de los algoritmos numéricos para la obtención de la solución de un problema matemático, en el que intervienen números, ya sea de manera exacta o aproximada”.

El análisis numérico aplica herramienta matemática simple que permiten otro camino eficaz para la resolución de funciones algebraicas (polinomios) o trascendentes; en la que se tiene la ventaja al comparar con los procesos formales de repetir de instrucciones lógicas (iteraciones), esto facilita obtener resultados muy aproximados a la solución (grado de error que se pida). La aplicación continua de la secuencia lógica, que se van tabulando con cada iteración nos utilizar herramienta más actuales (software) faciliten obtener la solución al problema planteado.

El análisis numérico se ha beneficiado por el continuo avance tecnológico de las computadoras (computación). En la actualidad con el uso de computadores y los teléfonos inteligentes, podemos realizar múltiples operaciones al tener accesos a aplicaciones matemáticas que nos facilitan en tiempos muy pequeños resolver cálculos algebraicos que antes eran largos y tediosos.

El análisis numérico nos permite de forma práctica resolver modelos matemáticos, usando los ordenadores (computadora) y actuales teléfonos celulares, pero el alumno no debe ser dependiente de esta herramienta, sino sirviese de ella para comprobar los resultados que obtiene.

Adema, la aplicación de soluciones numéricas y del desarrollo de las computadoras, trae como consecuencia la simulación matemática como una forma de estudio.

Al comprender que las matemáticas, el desarrollo tecnológico están muy compenetradas, se observa la importancia de esta rama de las matemáticas como es el análisis numérico, siendo su mayor desarrollo durante el siglo XX y al desarrollase la computadoras su aplicación necesito un lenguaje (de maquina) propio, por el cual se vincula para usar esta herramienta.

El Análisis Numérico como disciplina nació a medianos del siglo XIX; los científicos de esa época desarrollaron los principios y herramientas fundamentales de Análisis y del Cálculo Diferencial, se establecen las bases del Análisis Numérico, con el objeto de construir el cálculo diferencial, partiendo de algo más sencillo (la Aritmética), posteriormente, en el siglo XX, Con los ordenadores se potencio su desarrollo, buscando obtener soluciones exactas a determinados problemas, aplicación este métodos numéricos, obteniendo ellos una aproximación pero con un error lo suficientemente pequeño y próximo a cero. Por considera importante el tiempo en llegar a la solución, el uso de la tecnología computacional facilito su aplicación.

A lo largo de este estudio se analizarán algunos métodos que se han desarrollado con el fin de obtener solución por aproximación sucesivas (iteraciones) de funciones matemáticas lineales y no lineales con sus ejemplos prácticos.

UNIDAD 1

FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DEL ANÁLISIS NUMÉRICO

SISTEMAS DE INFORMACIÓN

Se ha señalado que el **análisis numérico** o **cálculo numérico** es la rama de las matemáticas encargada de crear algoritmos que nos permitan obtener aproximaciones a la solución de problemas planteados de forma matemática. Se diferencia de las expresiones algebraicas se acumulan números que se van acercando a la solución.

Señalamos, además que el análisis numérico creció en uso con el desarrollo de los ordenadores; útiles para realizar operaciones matemáticas extremadamente complejas, que realizan sus cálculos en numeración binaria (Base 2).

El Análisis numérico la podemos agrupar en dos campos, unidimensional o multidimensional; son unidimensional el análisis de ecuaciones lineales, los sistemas de ecuaciones lineales, los sistemas no lineales, determinar los valores de vectores, entre otros. Pertenecen al campo multidimensional, la aproximación de funciones, estudio de las derivadas e integración de funciones, la interpolación, el análisis de ecuación diferencial ordinaria y las derivadas parciales de funciones.

El desarrollo tecnológico de las computadoras, ha incrementado la aplicación del Análisis numérico como rama de las matemáticas en la resolución de problemas de la vida real y los tiempos para obtener solución; esta herramienta permite trabajar con mayor eficacia al estudiar los métodos que el Análisis numérico propone, dado que permite manipular un número

mayor de variables y datos que se utilizan para buscar la solución al problema que se plantea.

Teniendo como perspectiva, que proporción toda la estructura necesaria mediante procedimientos matemáticos basándose en algoritmos que nos permiten ejecutar simulación o realizar cálculo numérico mediante operaciones matemáticas muy sencillas.

Cálculo de Error

La palabra error va acompañada de connotaciones que originan diversas interpretaciones. En uso diario, el error va relacionado a mal realizado, cuyo resultado está equivocado, luego debe ser nuevamente calculado. Para el análisis numérico (las ciencias e ingeniería), el concepto error está vinculado a al margen cercano al valor obtenido al ingresar los datos en una operación, no signifique por ello que los resultados estén equivocados. Expresado de otra forma, no se pone en duda el método usado para realizar el cálculo, sino la proximidad del resultado obtenido en comparación con el real.

En ingeniería es relevante, ya que los datos usados son de mediciones, estimaciones, hipótesis y modelos matemáticos ideales, experiencia profesional, entre otras. Es poco probable que esos datos sean precisos, una pequeña variación de ellos origina resultados muy diferentes. Si se analiza la confiabilidad de un algoritmo o procedimiento, es necesario el cálculo de los errores que nace al aplicar el algoritmo, y como afectan los resultados.

La diferencia entre una solución verdadera y una aproximada representa un error. En cualquier actividad que se realice profesionalmente, los errores ocasionan costos, y pueden ocasionar accidentes fatales. Por lo tanto, los errores se deben:

- a. Conocer.

- b. Medir
- c. Minimizar

Se debe diferenciar básicamente en:

- **Precisión:** El valor obtenido es el valor real
- **Imprecisión:** El valor obtenido está muy alejado al el valor real.
- **Exactitud:** El valor obtenido se aproxima al número o de una medida del valor verdadero.
- **Inexactitud:** El valor obtenido tiene cierto alejamiento sistemático de la realidad

Ejemplo:

$\sqrt{2} = 1,414214$ Es impreciso e inexacto.

$\sqrt{2} = 1,414213$ Es exacto pero impreciso.

$\sqrt{2} = 1,4142135623$ Es preciso pero inexacto

$\sqrt{2} = 1,4142135624$ Es exacto y preciso.

$$\sqrt{2} = 1,414213562373095$$

Tipos de errores.

Error inherente: Es el error de los datos suministrados, se pueden presentar por la precisión en la obtención de ellos, por la representación numérica, por provenir de cálculos previos, entre otros.

Error de redondeo: Es el error cometido cuando el número usado es aproximado por exceso o por defecto, depende la precisión de los cálculos previos hechos, por calculadora o computadora.

Error de discreción: Es el error que nace al transformar un procedimiento infinito en uno finito.

Error del modelo matemático: Es el error originado al simplificar o introducir hipótesis para definir el modelo matemático que representa el problema real (físico).

Error humano y/o de la máquina: Es el error que se presenta por la manipulación del hombre, tiene diversas fuentes como: mala transcripción o interpretación incorrecta de los datos originales, por programas de computación mal hechos y/o mal en el diseño, implementación o configuración de programas o computadoras.

Error visual o del operario: este error se vincula a la forma como se lee los valores por el operador,

En análisis numérico, los tres últimos errores están fuera de competencia, pero debemos tomarlos en cuenta a la hora de evaluar los resultados obtenidos.

Clasificación de los errores

Son clasificados como: Error absoluto, error relativo y error porcentual.

Se analizan usando fórmulas muy sencillas. Al realizar una medición, se obtiene un valor que llamaremos V_a o P^* , a este valor lo designamos como aproximado. Se sabe que el valor real o exacto de dicha medición es V_e o p . Podemos obtener los errores aplicando las formulas:

1. **Error absoluto:** $\varepsilon_a = |V_e - V_a| = |p - p^*|$
2. **Error relativo:** $\varepsilon_r = \frac{|V_e - V_a|}{V_e} = \frac{|p - p^*|}{p}$ (siempre que V_e o $p \neq 0$).
3. **Error porcentual:** $\varepsilon_p = 100\varepsilon_r \%$

Generalmente, el error relativo es una medida mucho más representativa del error, especialmente cuando $|V_e| \gg 1$. Cuando $|V_e| \approx 1$, entonces ambos errores coinciden por lo que se puede escribir $\varepsilon_r = \frac{|\varepsilon_a|}{V_e}$

En la práctica es improbable conocer el valor real V_e , por lo que no podemos calcular los errores $\varepsilon_a, \varepsilon_r$ o ε_p . Luego, ¿Qué error estamos cometiendo?

Si desconocemos la solución del problema parece que no hay forma de saberlo. Partimos de no conocer V_e y de que el valor V_a fue obtenido por medición usando un instrumento cuya precisión es ε_m (por error de medición, en nuestro caso, precisión se refiere al valor más pequeño que se puede medir con el instrumento).

Si tomamos el concepto de error absoluto podemos obtener una idea del valor de la medida m o $V_m = \text{valor medido}$. En efecto, tenemos que: $\varepsilon_m = \varepsilon_a = |V_e - V_a| \Rightarrow V_e = V_a + \varepsilon_a$; que generalizando:

$$\varepsilon_m = \varepsilon_a = |V_e - V_a| \Rightarrow V_e = V_a \pm \varepsilon_a$$

Al señalar que el valor de ε_a puede ser positivo o negativo.

Los errores en operaciones numéricas.

Solo se analizará los errores que resulten de cálculos numéricos al realizar operaciones matemáticas para obtener la solución de un problema.

Estos errores nacen al realizar aproximaciones de cantidades matemáticas exactas. Pueden ser errores de truncamiento que resultan al usar una aproximaciones en un procedimiento matemático exacto, también se presenta errores de redondeo cuando limitamos las cifras que representa el número que se utiliza para el cálculo.

Las calculadoras y ordenadores utilizan o muestran los números en notación científica normalizada o aritmética de coma flotante (A.C.F). Un

número está representado en notación científica normalizada cuando todos los dígitos del número están a la derecha de la coma decimal y este primer dígito es diferente de cero.

Ejemplo:

Si Expresamos el numeral $0,958674 \times 10^6$ en forma normalizada con cuatro cifras

$$0,958674 \times 10^6 = 0,9587 \times 10^6 + 0,0413 \times 10^6 = 1,0000 \times 10^6$$

Ejemplo:

Dado $x = \frac{2}{3}$ e $y = \frac{1}{7}$ usando truncamiento y aproximación a 4 cifras normalizado para realizar las operaciones aritméticas donde intervienen x e y .

$$f_1(x) = 0,6667 \times 10^0 \text{ y } f_1(y) = 0,1429 \times 10^0$$

Operación	Valor Real	Resultado	Error absoluto $\varepsilon_a = V_{ex} - V_{ap} $	Error relativo $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{V_{ex}}$
$x + y$	$\frac{17}{21}$	0,8095	$0,2381 \times 10^{-4}$	$0,2941 \times 10^{-4}$
$x - y$	$\frac{11}{21}$	0,5238	$0,9524 \times 10^{-5}$	$0,1818 \times 10^{-4}$
$x \cdot y$	$\frac{2}{21}$	0,0952	$0,3810 \times 10^{-4}$	$0,4 \times 10^{-3}$
x/y	$\frac{14}{3}$	4,6667	$0,3333 \times 10^{-4}$	$0,7143 \times 10^{-5}$

Cambio de bases numérica

Se entiende por cambio de base numérica, el convertir números de un sistema numérico en otro, ya que con el uso de lo ordenadores se necesita el proceso que se usa para ejecutar los cálculos matemáticos. Un sistema

numérico es una forma sistemática de representar números con caracteres simbólicos y de usar un valor base para agrupar los números de forma conveniente en forma compacta.

El sistema de números más común es decimal, que tiene un valor base de 10 y un conjunto de caracteres simbólicos de 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 y 9. Sin embargo, existen otros sistemas numéricos que pueden ser más eficientes para un fin específico. Por ejemplo, dado que los equipos utilizan lógica booleana para realizar cálculos y operaciones, usan el sistema de números binario, que tiene un valor base de 2, ósea dos cifras características o guarismos (0 y 1).

Microsoft Office Excel tiene varias funciones que puede usar para convertir números a los siguientes sistemas de numeración o desde ellos:

Sistema numérico	Valor base	Conjunto de caracteres simbólicos
Binario	2	0, 1
Hexadecimal	8	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7
Decimal	10	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
Hexadecimal	16	0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F

Ejemplo de cambio de base.

Expresar el siguiente número 395,1325 (dado en base 10) transfórmalo a base 2 y compruebe.

La parte entera se obtiene por divisiones sucesivas, se toma el residuo	La parte decimal por multiplicaciones sucesivas, se toma el entero:
Con: N = Numero entero,	Con d = Numero decimal,
D = Divisor o base a cambia,	B = Base a cambiar,
C = Cociente entero y nuevo,	P = producto obtenido de donde
R = el residuo. La flecha indica el sentido a escribir la cantidad obtenida	tomamos el entero que resulte (E).

N	÷	B	=	C	R	d	x	B	=	P	E
395	÷	2	=	197	1	0,1325	x	2	=	0,265	0
197	÷	2	=	98	1	0,265	x	2	=	0,53	0
98	÷	2	=	49	0	0,53	x	2	=	1,06	1
49	÷	2	=	24	1	0,06	x	2	=	0,12	0
24	÷	2	=	12	0	0,12	x	2	=	0,24	0
12	÷	2	=	6	0	0,24	x	2	=	0,48	0
6	÷	2	=	3	0	0,48	x	2	=	0,96	0
3	÷	2	=	1	1	0,99	x	2	=	1,92	1
1	÷	2	=	0	1	0,92	x	2	=	1,84	1

El número obtenido en el cambio de base es

$$395,1325 = 110001011,001000011_2$$

Su comprobación se obtiene aplicando la formula

$$N = \sum C_i B^p$$

Dónde: N = representa el número a obtener, C_i = Coeficiente de el numero binario obtenido, p = es la posición que ocupa dichos coeficientes, partiendo de la coma como posición cero (0) a la derecha negativos y a la izquierda positivo

$$110001011,001000011_2$$

Parte entera

Posición	8	7	6	5	4	3	2	1	0
Numero base 2	1	1	0	0	0	1	0	1	1
Potencia correspondiente	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Parte decimal

Posición	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
Numero base 2	0	0	1	0	0	0	0	1	1
Potencia correspondiente	2^{-1}	2^{-2}	2^{-3}	2^{-4}	2^{-5}	2^{-6}	2^{-7}	2^{-8}	2^{-9}
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$

Nota: Solo realizamos las operaciones donde el número de la base es 1

$$256 + 128 + 8 + 2 + 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} = 395 + \frac{67}{512}$$

$$= 395 + 0,130859 = 395,130859$$

Por lo tanto:

$$110001011,001000011_2 = 395,130859$$

Al comparar el resultado obtenido con el numero inicial, se ve que hay una pequeña diferencia o error

$$\varepsilon_m = \varepsilon_a = |V_e - V_a| = |395,1325 - 395,130859| = 0,001541$$

El procedimiento que realizamos es igual si deseamos transformar un número que este en cualquier base a base 10.

Auto evaluación.

Coloca tu número de cedula cuadrícula matriz, la cual genera los valores que utilizar en la actividad,

A	B	C	D	E	F	G	H

1.- Expresar los números obtenidos en la base indicada:

a. $ABCD, EFGH = (xxxx)_2$ b. $(1010011.010111001)_2 = (xxxxx)_{10}$

c. $BCAH, AAB = (xxxx)_8$ d. $AFEBCA, HCAB = (xxxx)_{16}$

2.- Compruebe los valores obtenidos anteriormente y determine el error porcentual cometido en la operación.

3. Calcule los error: (a) absoluto, (b) el error relativo y (c) error porcentual; en la aproximación de $V_{ex} = \pi$ y $V_{ap} = 3,1416$

4. En una aritmética de redondeo a cuatro cifras para determinar las raíces de la siguiente ecuación cuadrática. Calcular el error porcentual de

$$X^2 - 3X - 2 = 0$$

Algoritmos

Es una secuencia lógica, simplificada, ordenada, vincula a un tema y verificable de pasos, regla y normas que han de seguirse para obtener la solución a un problema. Un programa de ordenador ejecuta normalmente uno o más algoritmos. El algoritmo puede expresarse de variadas maneras en forma gráfica, que señalamos como diagrama de flujo, también en forma de código denominados pseudocódigo o un lenguaje de programación o en forma explicativa.

Los diferentes problemas que analizamos mediante el Cálculo Numérico son en procedimientos de aproximación que consisten en sucesiones de cálculos. Estos procedimientos se llaman algoritmos. Un algoritmo es un procedimiento que describe, sin ambigüedad posible, una sucesión finita de pasos que hay que realizar en un orden preciso, iniciando con la introducción de datos hasta la obtención de resultados. Como vehículo para describir los algoritmos se usará un pseudocódigo que especifica tanto los datos de entrada, como el proceso que se debe realizar sobre los mismos para la obtención de los resultados deseados, así como la forma de salida de estos últimos. De esta forma, se puede esquematizar un algoritmo como sigue:



Por ejemplo, un algoritmo para el cálculo de la suma de N números reales $x_1, \dots, x_N$, es decir,

$$\sum_{i=1}^N x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_N,$$

Puede ser descrito bajo el siguiente pseudocódigo:

ENTRADA:

Paso 1. Entrar $N, x_1, \dots, X_n$.

PROCESO

Paso 2. Hacer $SUM = 0$. Paso 3. Para $i = 1, \dots, N$, hacer $SUM = SUM + x_i$.

SALIDA

Paso 4. Escribir SUM .

PARAR.

El objetivo general en el campo del análisis numérico es el diseño y análisis de técnicas para dar soluciones aproximadas pero precisas a problemas difíciles, cuya variedad se sugiere en lo siguiente:

- Los métodos numéricos avanzados son esenciales para hacer viable la predicción numérica del tiempo.
- El cálculo de la trayectoria de una nave espacial requiere la solución numérica precisa de un Sistema de ecuaciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Las empresas automovilísticas pueden mejorar la seguridad de sus vehículos mediante simulaciones por ordenador de accidentes de tráfico. Estas simulaciones consisten esencialmente en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales parciales.
- Los fondos de inversión privados (fondos de coberturas) usan herramientas de todos los campos del análisis numérico para intentar calcular el valor de las acciones y los derivados con mayor precisión que otros participantes en el mercado.
- Las aerolíneas utilizan sofisticados algoritmos de optimización para decidir el precio de los billetes, la asignación de aviones y tripulaciones y las necesidades de combustible. Históricamente,

estos algoritmos se han desarrollado en el campo de la investigación operativa.

- Las compañías de seguros utilizan programas numéricos para el análisis actuarial.

Los programas suelen subdividirse en partes menores, llamadas módulos, para que la complejidad algorítmica de cada una de las partes sea menor que la del programa completo, lo cual ayuda al desarrollo del programa. Esta es una práctica muy utilizada y se conoce como "refino progresivo".

Para Niklaus, Wirth: un programa se formado con algoritmos y la estructura de los datos.

La programación puede seguir muchos puntos de vista o secuencias, ósea, diversas maneras de formular la resolución de un problema dado. Podemos señalar algunas de estas forma de la programación:

- Declarativas
- Estructurada
- Modular.
- Dirigida a objetos

Historia

El campo del análisis numérico es anterior a la invención de los ordenadores modernos en muchos siglos. La interpolación lineal ya se utilizaba hace más de 2000 años. Muchos grandes matemáticos del pasado se preocuparon por el análisis numérico, como se desprende de los nombres de importantes algoritmos como el método de Newton, el polinomio de interpolación de Lagrange, la eliminación gaussiana o el método de Euler.

Para facilitar los cálculos a mano, se produjeron grandes libros con fórmulas y tablas de datos como los puntos de interpolación y los

coeficientes de las funciones. Con estas tablas, a menudo calculadas con 16 decimales o más para algunas funciones, se podían buscar valores para introducirlos en las fórmulas dadas y conseguir muy buenas estimaciones numéricas de algunas funciones.

El trabajo canónico en este campo es la publicación del NIST editada por Abramowitz y Stegun, un libro de más de 1000 páginas con un gran número de fórmulas y funciones de uso común y sus valores en muchos puntos. Los valores de las funciones ya no son muy útiles cuando se dispone de un ordenador, pero el gran listado de fórmulas puede seguir siendo muy útil.

La calculadora mecánica también se desarrolló como herramienta de cálculo manual. Estas calculadoras evolucionaron hasta convertirse en ordenadores electrónicos en la década de 1940, y entonces se descubrió que estos ordenadores también eran útiles para fines administrativos. Pero la invención del ordenador también influyó en el campo del análisis numérico, ya que ahora se podían hacer cálculos más largos y complicados.

Métodos directos e iterativos.

Consideremos el problema de resolver

$$3x^3 + 4 = 28$$

Para la cantidad desconocida “x”

Métodos directo:

$$3X^3 + 4 = 28 \Rightarrow 3X^3 = 28 - 4 \Rightarrow X^3 = \frac{24}{3} \Rightarrow X^3 = 8 = 2^3 \Rightarrow$$

$$X = \sqrt[3]{2^3} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$$

Para el método iterativo:

Apliquemos el método de bisección a

$f(x) = 3x^3 - 24$. Los valores iniciales son: $a = 0$, $b = 3$,

$$f(a) = f(0) = 3(0)^3 - 24 = 0 - 24 = -24,$$

$$f(b) = f(3) = 3(3)^3 - 24 = 81 - 24 = 57$$

Método iterativo					
a	b	$P_m = \frac{a+b}{2}$	f(a)	f(b)	f(P _m)
0	3	1,5	-24	57	-13,875
1,5	3	2,25	-13,875	57	10,17
1,5	2,25	1,875	-13,875	10,17	-4,22
1,875	2,25	2,0625	-4,22	10,17	2,32
1,875	2,0625	1,96875	-4,22	2,32	-1,97
1,96875	2,0625	2,016	-1,11	2,32	0,58

Según la tabla podemos concluir que la solución está entre 1,969 y 2,016. El algoritmo permite resolver cualquier número en ese rango con un error inferior a 0,02.

Discretización e integración numérica

En una carrera de dos horas, la velocidad del coche se mide en tres instantes y se registra en la siguiente tabla:

Tiempo	0:20	1:00	1:40
km/h	140	150	180

Una *discretización* sería decir que la velocidad del coche fue constante de 0:00 a 0:40, luego de 0:40 a 1:20 y finalmente de 1:20 a 2:00.

Por ejemplo, la distancia total recorrida en los primeros 40 minutos es aproximadamente

$$d = v * t = 140 \frac{Km}{h} \times \frac{1 h}{60 min} \times 40 min = 93,3 Kilometros$$

Esto nos permitiría estimar la distancia total recorrida como 93,3 kilómetros + 100 km + 120 km = 313,3 km, que es un ejemplo de integración numérica utilizando una suma de Riemann, porque la velocidad es la integral del desplazamiento.

Problema mal condicionado: Tómese la función

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)}$$

Téngase en cuenta que un cambio en x de menos de 0.1 se convierte en un cambio en $f(1.1) = 10$ y $f(1.001) = 1000$, de casi 1000.

Evaluar $f(x)$ cerca de $x = 1$ es un problema mal condicionado.

Problema bien condicionado: por el contrario, evaluar la función anterior

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)}$$

Cerca de $x = 10$ es un problema bien condicionado.

Por ejemplo, $f(10) = 1/9 \approx 0.111$ y $f(11) = 0.1$,

Por tanto, cambio modesto en x conduce a un cambio modesto en $f(x)$.

Usando métodos directos podemos calcular la solución de un problema en un número finito de pasos. Estos métodos darían la respuesta precisa si se realizaran en Aritmética de precisión infinita. Algunos ejemplos son la eliminación gaussiana, el método de factorización para resolver sistemas de ecuaciones lineales, y el método simplex de programación lineal. En la práctica, se utiliza precisión finita y el resultado es una aproximación de la solución verdadera (asumiendo estabilidad).

Por otro lado los métodos directos, no se espera que los métodos iterativos terminen en un número finito de pasos. Partiendo de una conjetura

inicial, los métodos iterativos forman aproximaciones sucesivas que convergen a la solución exacta solo en el límite.

Se especifica una prueba de convergencia, que a menudo implica el residuo, para decidir cuándo se ha encontrado (con suerte) una solución suficientemente exacta. Incluso utilizando aritmética de precisión infinita, estos métodos no alcanzarían, en general, la solución en un número finito de pasos. Algunos ejemplos son el método de Newton, el método de bisección y el método de Jacobi. En el álgebra matricial computacional, los métodos iterativos son generalmente necesarios para problemas grandes.

Los métodos iterativos son más comunes que los métodos directos en el análisis numérico. Algunos métodos son directos en principio, pero suelen utilizarse como si no lo fueran, por ejemplo, el GMRES y el método del gradiente conjugado. Para estos métodos el número de pasos necesarios para obtener la solución exacta es tan grande que se acepta una aproximación de la misma manera que para un método iterativo.

Problemas

Los problemas de esta disciplina se pueden dividir en dos grupos fundamentales:

- **Problemas de dimensión finita:** aquellos cuya respuesta son un conjunto finito de números, como las ecuaciones algebraicas, los determinantes, los problemas de valores propios, entre otros.
- **Problemas de dimensión infinita:** problemas en cuya solución o planteamiento intervienen elementos descritos por una cantidad infinita de números, como integración y derivación numéricas, cálculo de ecuaciones diferenciales, interpolación, entre otros.

Además, este tipo de problemas se divide en tres categorías de problemas, atendiendo a su naturaleza o motivación para el empleo del cálculo numérico:

- ❖ Problemas muy complejos que no poseen solución analítica.
- ❖ Problemas donde existe una solución analítica, aunque compleja, por lo tanto no puede explotarse de forma sencilla en la práctica.
- ❖ Problemas donde existen métodos sencillos pero que requieren una cantidad de cálculos excesiva; mayor que la necesaria para un método numérico.

Áreas de estudio

El análisis numérico se divide en diferentes disciplinas de acuerdo con el problema que resolver.

Cálculo de los valores de una función

El problema más sencillo es la evaluación de una función en un punto dado. Para polinomios, uno de los métodos más utilizados es el algoritmo de Horner, que reduce el número de operaciones a realizar. En general, es importante estimar y controlar los errores de redondeo que se producen por el uso de la aritmética de punto flotante.

La extrapolación es muy similar a la interpolación, donde deseamos hallar el valor de la función desconocida en un punto que no está comprendido entre los puntos dados.

La regresión es también similar, pero los datos son imprecisos. Dados algunos puntos, y una medida del valor de la función en los mismos (con un error debido a la medición), se determina la función desconocida. El método de los mínimos cuadrados es una forma popular de conseguirlo.

Errores y su consecuencia en los algoritmos

Los algoritmos usados en los métodos numéricos como consecuencias del uso de operadores para obtener la solución numérica de un problema matemático, señalaremos a modo de ejemplo.

1. La capacidad de los ordenadores para almacenar finitos número de dígitos, por lo que utilizan el punto flotante o número de maquina con su correspondiente error de redondeo.}
2. Cálculos que vinculas otros previos, que afecta la precisión debido a que estos datos no son exacto en algunas ocasiones, luego la solución final queda comprometida..
3. Cuando se realiza mucha operaciones se incurre errores de redondeo

El diagrama de flujo

También llamado flujograma o diagrama de actividades es señalar gráficamente un algoritmo. Se utiliza en varia disciplinas como Ingeniería, economía, informática, procesos industriales entre otros.

En Lenguaje Unificado de Modelado (UML), es un diagrama de actividades que representa las etapas de trabajo paso a paso. Un diagrama de actividades indica el flujo de control general.

Los diagramas usan símbolos con características y significados definidos, señalando las etapas (pasos) del algoritmo, y se representa el flujo de ejecución mediante flechas que conectan los puntos de inicio y de fin del proceso.

Para estructurar un diagrama de flujo, se deben realizar las siguientes etapas:

- Definir lo que queremos obtener con el diagrama de flujo.
- Identificar quién lo empleará y cómo.
- Establecer el nivel de detalle requerido.

- Determinar los límites del proceso a describir. De esta manera quedará fijado el comienzo y el final del diagrama. Frecuentemente el comienzo es la salida del proceso previo y el final la entrada al proceso siguiente.
- Identificar y listar las principales actividades/subprocesos que están incluidos en el proceso a describir y su orden cronológico.
- Si el nivel de detalle definido incluye actividades menores, listarlas también.
- Identificar y listar los puntos de decisión.
- Construir el diagrama respetando la secuencia cronológica y asignando los correspondientes símbolos.
- Prueba para ver errores

Características

Según Gómez Rondón, Francisco. Año 1995:

- a. De uso, permite facilitar su empleo.
- b. De destino, permite la correcta identificación de actividades.
- c. De comprensión e interpretación, permite simplificar su comprensión.
- d. De interacción, permite el acercamiento y coordinación.
- e. De simbología, disminuye la complejidad y accesibilidad.
- f. De diagramación, se elabora con rapidez y no requiere de recursos sofisticados.

Tipos de diagramas de flujo

- ❖ Formato vertical, el flujo y la secuencia de las operaciones, va de arriba hacia abajo. Donde se lista ordenadamente las operaciones a

ejecutar en el proceso señalando las informaciones necesaria a tomar en cuenta, según lo buscado.

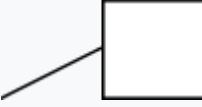
- ❖ Formato horizontal: en él, el flujo o la secuencia de las operaciones, va de izquierda a derecha.
- ❖ Formato panorámico: el proceso se representa completo una sola carta. Se representa horizontal y vertical las distintas acciones simultáneas.
- ❖ Formato arquitectónico: se indica el itinerario de ruta sobre el plano arquitectónico del área de trabajo.
- ❖ Diagrama de bloques de modelo matemático: usado para representar sistemas físicos (reales). Cada bloques del sistema físico representa una simplificación de la realidad, permite analizar matemáticamente el proceso.
- ❖ Diagrama de bloques de procesos de producción: diagrama usado para indicar las etapas de elaboración de un producto, señal la cantidad de materia prima, los procesos que realizan y el producto terminado.

Simbología y significado

Formas comunes

El Instituto Nacional Estadounidense de Estadística (ANSI, por sus siglas en inglés) estandarizo para los diagramas de flujo y sus símbolos en el años de 1960. Para el año 1970, la Organización Internacional de Normalización(ISO), adoptó los símbolos de ANSI.

Forma ANSI/ISO	Nombre	Descripción
	Línea de flujo (Flecha)	Señala el orden de operación de los procesos. Una línea saliendo de un símbolo y apuntando a

		otro. Las fechas se agregan si el flujo no es el estándar de arriba hacia abajo, de izquierda a derecha.
	Terminal	Indica el inicio o fin de un programa o subprocesos. Se dibuja, ovalo o rectángulo redondeado. Contienen la palabra "Inicio" o "Fin",
	Proceso	Representa el conjunto de operaciones que cambiar el valor, Un rectángulo indicando el proceso a ejecutar
	Decisión	El rombo muestra una operación condicional que determina cuál de los dos caminos tomará el programa. La operación es una pregunta de sí/no o una prueba de verdadero/falso
	Entrada/ Salida	Indica el proceso de hacer entrar o salir datos, se representa como un paralelogramo
	Anotación (Comentario)	Indica información adicional en una etapa en el programa. Representado como un rectángulo abierto con una línea.
	Proceso Predefinido	Indica, un proceso que ha sido definido otro lugar.
	Conector de Página	Pares de círculos pequeños (conectores etiquetados) reemplazan líneas largas o confusas en la página del diagrama.
	Conector fuera de página	Un conector etiqueta para usar cuando el objetivo es otra página.

Segunda formas

- ❖ **Ovalo o Elipse:** Inicio y Final (Abre y cierra el diagrama).
- ❖ **Rectángulo::** Actividad (señala la ejecución de una o más actividades o procedimientos).
- ❖ **Rombo:** Decisión (Formula una pregunta o interrogante).
- ❖ **Circulo:** Conector (Indica el enlace de actividades con otra dentro de un proceso).

- ❖ **Triangulo boca abajo:** Archivo definitivo (Guarda un documento en forma permanente).
- ❖ **Triangulo boca arriba:** Archivo temporal (Proporciona un tiempo para el almacenamiento del documento).

Tercera forma

- ❖ **Círculo:** Inicio del Diagrama y Final del Diagrama.
- ❖ **Cuadrado:** Proceso de control.
- ❖ **Línea continua:** Flujo de información vía formulario o documentación en soporte de papel escrito.
- ❖ **Línea interrumpida:** Flujo de información vía formulario digital.
- ❖ **Rectángulo:** Formulario o documentación. Se grafica con el doble de largo que su altura.
- ❖ **Rectángulo Pequeño:** Valor o medio de pago (cheque, pagaré, etc.). Se grafica con el cuádruple de largo que su altura, siendo su ancho igual al de los formularios.
- ❖ **Triángulo (base inferior):** Archivo definitivo.
- ❖ **Triángulo Invertido (base superior):** Archivo Transitorio.
- ❖ **Semióvalo:** Demora.
- ❖ **Rombo:** División entre opciones.
- ❖ **Trapezoide:** Carga de datos al sistema.
- ❖ **Elipsoide:** Acceso por pantalla.
- ❖ **Hexágono:** Proceso no representado.
- ❖ **Pentágono:** Conector.
- ❖ **Cruz de Diagonales:** Destrucción de Formularios, y recreación de nuevas acciones.

Cursograma

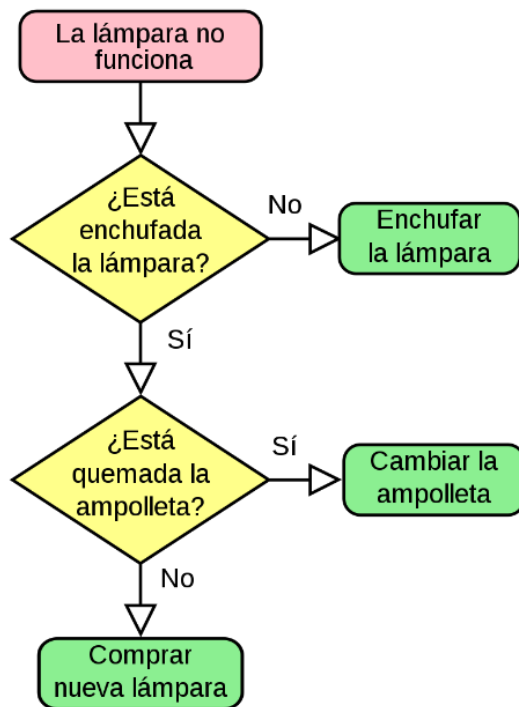
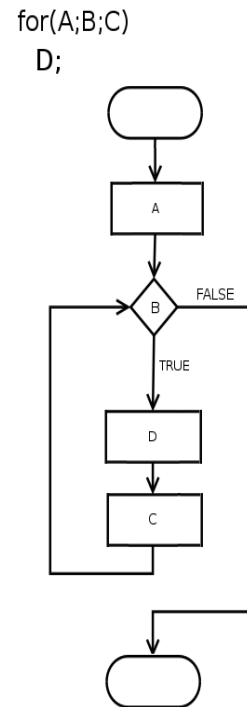
Se trata de la más común y práctica entre todas las clases de diagramas de flujo. Describe el flujo de información en un ente u organización, sus procesos, sistemas administrativos y de control. Permite la impresión visual de los procedimientos y una clara y lógica interpretación.

Software que diseña diagramas de flujo

Actualmente existe varios software capaces de elaborar diagramas de flujo. A modo de ejemplo señalaremos algunos:

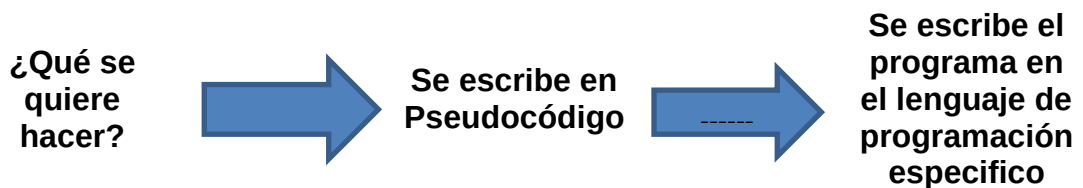
- Microsoft Office ofrece tres herramientas útiles para la elaboración de diagramas. Uno de ellos es Microsoft Word con el que se puede realizar diagramas de flujo sencillos usando la opción "**Formas**" que tiene un apartado especial para diagramas de flujo. También Microsoft PowerPoint también posee es opción. Además la herramienta más sofisticada , Microsoft Visio , cuenta con esta opción y además tiene otras que permite la elaboración de otros tipos de diagramas como es el caso diagramas UML entre otros tipos de diagramas de flujo.
- El programa eficiente y muy fácil de usar Libre Office Draw brinda una solución rápida para la creación de diagramas de flujo además de otro tipo de diagramas.

Ejemplo de Diagrama de flujo sencillo:



Pseudocódigo

Cuando se trabaja en programación, antes de escribir el programa, se debe escribir primero en pseudocódigo. El cual es una forma de escribir los pasos que va a realizar un programa de la forma más cercana al lenguaje de programación que vamos a utilizar posteriormente.



El pseudocódigo permite posteriormente pasarlo a cualquier lenguaje de programación. Por la importancia de esta herramienta, algunas instituciones educativas y universidades han creado sus propios "intérpretes de pseudocódigo".

Son utilizadas para brindar ayuda a los estudiantes de cursos iniciales a crear los programas "pensando en español", pero además les permite, probar dichos programas desde un entorno "casi real".

Por ejemplo, PSeInt es una herramienta para asistir a un estudiante en sus primeros pasos en programación mediante un simple e intuitivo pseudolenguaje en español (complementado con un editor de diagrama de flujo).

Ejemplo de un problema la comparación de dos números escrito en pseudocódigo:

- 1. Inicio**
- 2. Inicializar variables: $A = 0$, $B = 0$**
- 3. Solicitar la introducción de dos valores distintos.**
- 4. Leer los dos valores.**
- 5. Asignarlos a las variables A y B.**
- 6. Si $A = B$ Entonces vuelve a 3. Porque los valores deben ser distintos.**
- 7. Si $A > B$ Entonces Escribir "Es el mayor"**
- 8. De lo contrario: Escribir B, "Es el mayor"**
- 9. Fin_Si**
- 10. Fin**

Determinar la solución de una ecuación de segundo grado

Las ecuaciones de segundo grado y su solución son conocidas desde la antigüedad. En Babilonia se desarrollaron algoritmos para resolverla. Su solución se determinó de forma independiente en varios sectores del mundo. Por ejemplo, se sabe que en Grecia, el matemático Diofanto de Alejandría realizó un procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones (aunque su método sólo proporcionaba una de las soluciones, aun cuando las dos

soluciones son positivas). Al matemático Al-Juarismi se le atribuye la primera solución completa (o Al-Khwarizmi según otras grafías), en su Compendio de cálculo por reintegración y comparación, realizado en el siglo IX; solucionando un problema que se había buscado durante siglos. Finalmente Évariste Galois conseguir explicar la solución general las ecuaciones polinómicas, o saber cuándo son irresolubles por radicales, que viene a ser una generalización de los métodos de resolución de las ecuaciones de segundo grado.

Una ecuación de segundo grado, también conocida como función (ecuación) cuadrática de una variable es una ecuación que tiene la expresión general de la forma:

$$AX^2 + BX + C = 0$$

Donde **X** es la variable, y A, B y C constantes; A es el coeficiente cuadrático (distinto de 0), B el coeficiente lineal y C es el término independiente.

Este polinomio graficado en el plano, origina una figura denominada Parábola. En ella el eje de las abscisas si es cortado por la función, el lugar se conoce como sus raíces. Si la parábola no corta el eje X las raíces son números complejos, su discriminante es negativo

Ejemplo

Determine las raíces de la siguiente ecuación de segundo grado

$$2x^2 - x - 3 = 0$$

Si aplicamos la resolvente cuadrática se tiene

$$x_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}; \text{ en nuestro caso } \begin{matrix} A = 2 \\ B = -1 \\ C = -3 \end{matrix}$$

Reemplazando los valores se tiene:

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(2)(-3)}}{2(2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{1 \pm 5}{4}$$

$$x_1 = \frac{1 + 5}{4} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \quad y \quad x_2 = \frac{1 - 5}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$\text{Por lo tanto } \begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} \\ x_2 &= -1 \end{aligned}$$

Utilizando pseudocódigo para resolver los problemas de ecuaciones de segundo grado debemos:

- En primer lugar, realizar una lectura detenida del mismo. Antes de empezar debemos familiarizarnos con los problemas de ecuaciones de segundo grado.
- Una vez hemos entendido el contexto y el tipo de problema que se nos plantea. Debemos realizar el planteamiento del mismo.
- Si es necesario, realizaremos un dibujo, una tabla, o una representación de lo expuesto. Una vez hecho, intentamos identificar la incógnita y los datos que aporta el problema.
- Para plantear la ecuación volveremos al problema y debemos “traducir” el mismo a una expresión algebraica.
- El siguiente paso es resolver la ecuación.
- Por último y muy importante, es interpretar la solución. En este tipo de problemas tenemos que buscar la solución acorde a lo que nos pide el enunciado. “Nos pueden dar dos soluciones y no siempre las dos son la correcta”.

Hacer un algoritmo para resolver una ecuación de segundo grado.

La ecuación de segundo grado es $AX^2 + BX + C = 0$ y $a \neq 0$.

Las soluciones o raíces de la ecuación son:

$$X_{1,2} = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Proceso ecuación

definir X_1 , X_2 , A , B , C como real:

escribir "Digite A, B y C respectivamente (coeficiente)*:

leer A, B, C:

si $A \neq 0$ Entonces

$$x_1 = \{-B\} + \{\text{raíz}(B^2 + 4 \cdot A \cdot C)/2 \cdot A:$$

$$x_2 = \{-B\} - \{\text{raíz}(B^2 + 4 \cdot A \cdot C)/2 \cdot A:$$

Escribir "la solución de la ecuación cuadrada es", X_1 "y", X_2 :

Sino

Escribir "el coeficiente debe ser diferente de cero":

Finsi:

FinProceso

Otro procedimiento para resolver

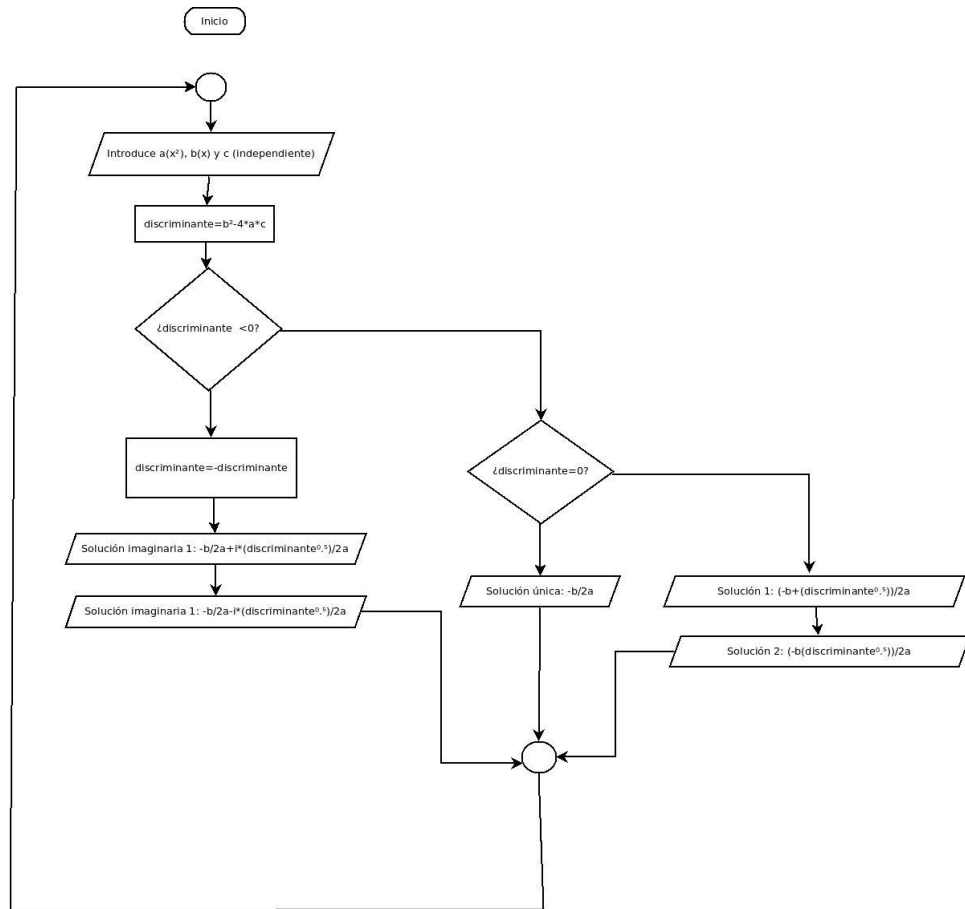
El contenido de la raíz cuadrada se denomina discriminante, y dependiendo de su valor, nos encontraremos con tres posibilidades:

El discriminante es mayor que cero: entonces tenemos dos soluciones de tipo real.

El discriminante es menor que cero: tenemos dos soluciones de tipo imaginario.

El discriminante es cero: la única solución posible es real, de tipo $-B/2^a$

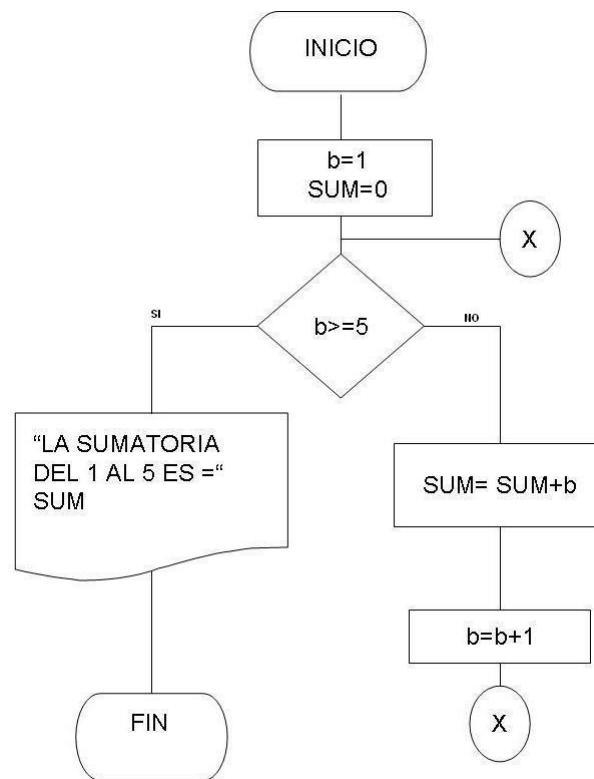
El diagrama de flujo que contempla y reacciona a las tres posibilidades, seguido del código correspondiente en Python. El código se reproduce indefinidamente, de ahí el conector en el diagrama de flujo y el while (1) en Python:



Resolver Sistemas de Ecuaciones Lineales:

- **Programación:** Puedes escribir un programa que tome las ecuaciones lineales como entrada y utilice métodos como eliminación gaussiana o sustitución para encontrar las soluciones.
- **Diagrama de Flujo:** Representaría los pasos para resolver un sistema de ecuaciones lineales, como la eliminación de variables o la sustitución.

Ejemplo;



Cálculo de Ángulos entre Dos Vectores:

Matemáticamente - Fórmula del ángulo entre dos vectores

El ángulo que forman dos vectores

$$\vec{u} = (u_1, u_2) \text{ y } \vec{v} = (v_1, v_2)$$

Se obtiene aplicando la expresión:

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right)$$

La expresión en función de sus coordenadas es

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}} \right)$$

Ejemplo: Hallar el ángulo comprendido entre los vectores

$$\vec{u} = (3, 1) \text{ y } \vec{v} = (0, 6)$$

Para emplear la fórmula que permite encontrar el ángulo comprendido entre dos vectores, primero calculamos el producto de los dos vectores

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2 = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 6 = 0 + 6 = 6$$

Calculamos la magnitud del primer vector

$$|\vec{u}| = \sqrt{\mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2} = \sqrt{(3)^2 + (1)^2} = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$$

Calculamos la magnitud del segundo vector

$$|\vec{v}| = \sqrt{\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2} = \sqrt{(0)^2 + (6)^2} = \sqrt{0 + 36} = \sqrt{36} = 6$$

Sustituimos los valores previamente obtenidos, en la fórmula del ángulo α entre dos vectores.

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_2}{\sqrt{\mathbf{u}_1^2 + \mathbf{u}_2^2} \cdot \sqrt{\mathbf{v}_1^2 + \mathbf{v}_2^2}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{6}{\sqrt{10} \cdot 6} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right)$$

Racionalizando la cantidad dentro del paréntesis

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} \right) = \cos^{-1} \left(\frac{\sqrt{10}}{10} \right)$$

Usando calculadora, determinamos el valor α que satisface la igualdad anterior es

$$\alpha = \cos^{-1} \left(\frac{3,16227766}{10} \right) = \cos^{-1}(0,316227766) = 71,565^\circ = 71^\circ 33' 54,18''$$

Usando Diagrama de flujo:

- **Programación:** Puedes usar funciones trigonométricas para calcular el ángulo entre dos vectores en un lenguaje de programación.
- **Diagrama de Flujo:** Mostraría cómo se calcula el ángulo utilizando fórmulas trigonométricas.

Ejemplo:



Realizar Sumatoria:

En matemática, una **serie** es la generalización de la noción de suma, aplicada a los infinitos términos de una sucesión $\{a_n\} = \{a_1 + a_2 + \dots + a_n\}$, lo que suele escribirse con el símbolo de sumatoria:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \dots$$

Donde a_n es el “término general” de la sucesión, que usualmente se expresa por medio de un regla, o se obtiene a partir de un algoritmo.

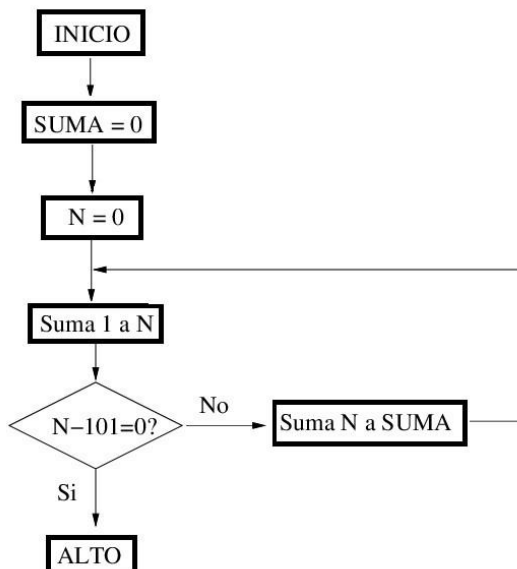
A diferencia de las sumas finitas, las series requieren de herramientas del análisis matemático para ser debidamente comprendidas y manipuladas. El estudio de las series consiste en evaluar la suma de un número finito N de términos sucesivos, y mediante un paso al límite, identificar el comportamiento de la serie a medida que N crece indefinidamente

Empleando Diagrama de flujo

Programación: Puedes escribir un bucle o una función que sume una serie de números.

Diagrama de Flujo: Representaría el proceso de agregar los términos de una serie.

Ejemplo:



Combinatoria:

Los métodos para realizar el conteo de distintas configuraciones de los elementos de un conjunto donde se cumplen determinados criterios. Para ello se debe considerar algunos conceptos, como:

- ❖ **Población:** Conjunto de datos a ser estudiando. Denotamos con “**m**” que nos define el número de datos de dicho conjunto.
- ❖ **Muestra:** representa el subconjunto de esa población. Denotamos con “**n**” que nos define el número de datos de dicho muestra.

En la muestra se señalan dos aspectos distintos a considerar:

- ❖ **Orden:** Los datos de la están o no ordenados.
- ❖ **Repetición:** La posibilidad en estudio posee datos repetidos o no.

Ejemplo:

En una clase de análisis numérico hay 15 alumnos y se desea formar grupos de estudios 3 personas para realizar una tipo de tarea ¿De cuántas maneras distintas se pueden agrupar?

Solución:

La población: Los 15 alumnos

La muestra: Un determinado grupo, por ejemplo: Luis, María y Carlos.

¿Es importante el orden en la muestra?; podemos ver en nuestro caso no, ya que ordenamos estos nombre de otra forma, sigue siendo el mismo grupo, ósea, Luis, María y Carlos forman el mismo grupo que Carlos, María y Luis.

¿Puede haber datos (Alumno) repetidos en la muestra? No, son Alumnos, datos que no podemos repetir, por ejemplo Luis, Luis y María no es un grupo válido

Aplicando la fórmula:

$$C_{m,n} = C_m^n = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m - n)!} = \frac{15!}{3! \cdot (15 - 3)!} = \frac{15!}{3! \cdot 12!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 12!}$$

Simplificando y multiplicando

$$C_{m,n} = 5 \cdot 7 \cdot 13 = 455$$

Factorial de un número

Es el producto de los “n” factores consecutivos desde 1 hasta n.
El **factorial de un número** natural se denota por **n!**

$$n! = (n) \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Propiedades:

- El factorial existe para cualquier entero positivo
- El factorial de un número negativo no existe.
- El factorial de 0 es igual a 1 (**0! = 1**).

Ejemplo:

Calcular el factorial de 5

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$$

Principio fundamental de conteo

Para una labor determinada la pueden hacer de “**m**” formas diferentes y, para cada una de esas formas, una segunda tarea puede realizarse de “**n**” maneras distintas, entonces las dos tareas puede realizarse de “**m · n**” formas distintas.

Ejemplos:

Si tengo 4 camisas y 3 pantalones distintos. ¿De cuántas maneras diferentes me puedo vestir?

Variaciones

Es cada una de las posibles tuplas (secuencia de valores) que se pueden constituir a partir de un grupo de datos.

Si tenemos “**m**” cantidad de datos, podemos formar tuplas con una cantidad “**n**” de datos, presentándose una diversa variedad de alternativas. Esto dependerá de si es posible o no repetir datos en una misma tupla.

Si no se admiten datos repetidos, entonces el número de n-tuplas en que ninguno de los datos se repiten se llama **número de variaciones sin repetición** y las obtenemos mediante la siguiente formula

$$V_{m,n} = V_m^n = \frac{m!}{(m-n)!} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot (m-3) \cdot \dots \cdot (m-n+1)$$

Cuando dentro de cada tupla se puede repetir un elemento más de una vez se llama **número de variaciones con repetición** y este resulta ser:

$$VR_{m,n} = VR_m^n = m^n$$

Permutaciones

Son los posibles ordenamientos de aquellos elementos que forman parte de un conjunto. Es decir, es un cambio de la manera en la que se disponen los elementos.

El número de permutaciones en un conjunto de “n” elementos es

$$P_n = n!$$

Ejemplo, existen doce permutaciones del conjunto que tiene A, B, C elementos y $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ y estas son

(A, B, C) (A, C, B) (B, A, C) (B, C, A) (C, A, B) (C, B, A)

Permutaciones circulares

Son un caso particular de las permutaciones. Se usan cuando los datos se han de ordenar "en círculo", (ejemplo, consejo de profesores de un nivel), de modo que el primer elemento que "se sitúe" en la muestra determina el principio y el final de muestra.

El número de permutaciones de “n” datos en este caso es

$$PC_n = P_{n-1} = (n - 1)!$$

Permutaciones con repetición

Consiste en una permutación de “m” datos, de los cuales hay varios que son iguales entre sí. Supongamos que en el conjunto de los “m” elementos no son todos distintos entre sí, sino que el primer elemento se repite m_1 veces, el segundo se repite m_2 veces, ..., el n-esimo se repite m_n veces. De tal manera que

$$m = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n$$

Entonces, el número de permutaciones de los datos que se repiten son:

Permutaciones del primer dato: $m_1!$

Permutaciones del segundo dato: $m_2!$

Permutaciones del n-esimo dato: $m_n!$

Estas permutaciones de datos idénticos son iguales entre sí. Y por tanto, las diferentes formas que ordenar los “m” datos sería

$$PR_m^{m_1, m_2, \dots, m_n} = \frac{P_m}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_n!}$$

Combinaciones

Se llama **combinaciones** de “m” elementos tomados de “n” en “n” ($m \geq n$) a todas las agrupaciones posibles que se pueden realizar con los “m” elementos de forma que:

No entran todos los elementos

No importa el orden

No se repiten los elementos

Se calcula usando la fórmula:

$$C_m^n = C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{m!}{n! (m - n)!}$$

Ejemplos

1 Determine las Combinaciones de 10 elementos tomados de 4 en 4.

$$C_{m,n} = C_{10,4} = \frac{10!}{4! \cdot (10 - 4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210$$

2 En una clase de 25 alumnos se quiere elegir un comité formado por cinco alumnos. ¿Cuántos comités diferentes se pueden formar?

No entran todos los elementos

No importa el orden: Luis, Juan, Ana, María, José

No se repiten los elementos

$$C_{25,5} = \frac{25!}{5! \cdot (25 - 5)!} = \frac{25!}{5! \cdot 20!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 20!} = 5 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21$$

$$C_{25,5} = 53.130$$

Combinaciones con repetición

Las **combinaciones con repetición** de “**m**” elementos tomados de “**n**” en “**n**” con $m \geq n$, son los distintos grupos formados por “**n**” elementos de manera que:

- No entran todos los elementos.
- No importa el orden.
- Sí se repiten los elementos.

Al número de combinaciones con repetición se le denotará por CR_m^n . El problema, entonces, consiste en determinar el valor de CR_m^n , el cual podemos calcular con la siguiente fórmula:

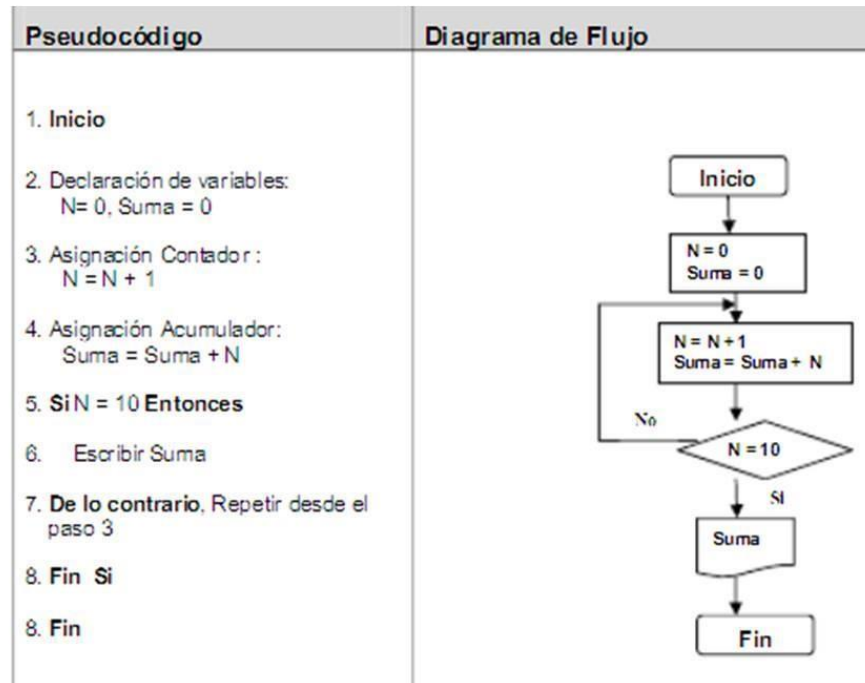
$$CR_m^n = \binom{m+n-1}{n} = \frac{(m+n-1)!}{n! \cdot (m-1)!}$$

donde **m** y **n** son enteros y $m \geq n \geq 0$. El número combinatorio de arriba se lee como **m** sobre **n**.

Mediante Diagrama de flujo se tiene:

- **Programación:** Puedes escribir programas para calcular permutaciones, combinaciones o coeficientes binomiales.
- **Diagrama de Flujo:** Mostraría los pasos para calcular estas cantidades combinatorias.

Ejemplo:

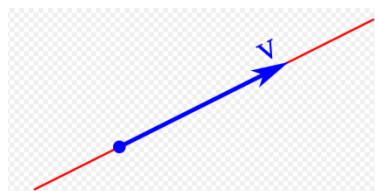


Vectores:

En Matemática y Física, un **vector** es cualquier tema matemático que se puede representar mediante un segmento de recta orientado dentro del espacio euclidiano.

Un vector es un par ordenado de números reales, con un origen fijado queda determinado a partir de dos elementos (x, y)

- Una semirrecta a partir de dicho origen, es decir, una **dirección** hacia la que apunta.
- Un número no negativo, llamado módulo del vector y que mide su tamaño.



Por otro lado, podemos fijar un Sistema de coordenadas del espacio dimensional; entonces un vector queda unívocamente determinado mediante " n " números, llamados *coordenadas* del vector. El ejemplo más sencillo son las coordenadas cartesianas, un sistema de " n " ejes reglados que se suelen tomar perpendiculares entre sí.

Fijado el sistema de ejes cartesianos (en otras palabras, un punto origen y una base) un vector tridimensional queda completamente determinado por tres números, llamados *coordenadas cartesianas*. Más concretamente, dados tres números (x, y, z) se puede trazar una *flecha* o vector siguiendo estos pasos:

1. Desplazarse x unidades en la dirección del eje **X**.
2. Desplazarse y unidades en la dirección del eje **Y**.
3. Desplazarse z unidades en la dirección del eje **Z**.
4. Trazar la flecha desde el punto origen hasta el de llegada.

En matemáticas se define vector como un elemento de un espacio vectorial. Esta noción es más abstracta, ya que para muchos espacios vectoriales no es posible representar sus vectores mediante el módulo y la dirección. En particular los espacios de dimensión infinita sin producto escalar no son representables de ese modo. Los vectores en un espacio euclidiano se pueden representar geométricamente como segmentos de recta $\mathbf{R}$, en el plano $\mathbf{R}^2$ (bidimensional), o en el espacio $\mathbf{R}^3$ (tridimensional).

La definición usada en física de vector como un segmento de recta orientado (en el plano o en el espacio) es un caso particular de esta noción. Es posible describir fenómenos físicos mediante magnitudes físicas vectoriales como las siguientes:

- ❖ La Velocidad de un Auto. No sería suficiente describirla con tan solo un número, que es lo que marca el velocímetro, sino que se requiere indicar la dirección (hacia donde se dirige).

- ❖ La Fuerza que actúa sobre un objeto, ya que su efecto depende, además de su magnitud o módulo, de la dirección en la que actúa.
- ❖ El desplazamiento de un objeto, pues es necesario definir la distancia que recorre, y la dirección del movimiento, o bien la posición inicial y final del objeto.

Suma de vectores

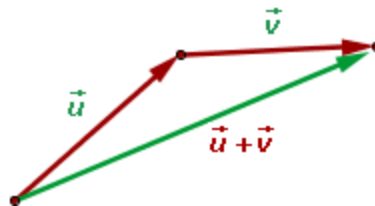
Si tenemos dos vectores $\vec{u} = (u_1, u_2)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2)$, entonces la suma de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

En otras palabras, el *vector suma* de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el vector que resulta de sumar las componentes respectivas de estos vectores: la primera componente de $\vec{u}$ se suma con la primera componente de $\vec{v}$, y la segunda componente de $\vec{u}$ se suma con la segunda componente de $\vec{v}$.

Interpretación gráfica de la suma

Observemos la siguiente gráfica que muestra la suma de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:



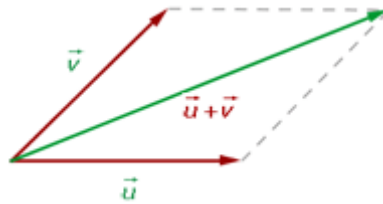
Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son dos Vectores libres, entonces para sumarlos gráficamente primero se elige el representante de $\vec{v}$ cuyo *origen* es el *extremo* de $\vec{u}$. Luego, $\vec{u} + \vec{v}$ es el vector cuyo origen es el origen de $\vec{u}$ y cuyo extremo es el extremo de $\vec{v}$.

Notemos que también se puede elegir un representante de $\vec{u}$ tal que su *origen* sea el *extremo* de $\vec{v}$. La suma $+$ tendrá *el mismo valor*, pero ahora la obtendremos uniendo el origen de $\vec{v}$ con el extremo de $\vec{u}$.

Regla del paralelogramo

Lo que discutimos anteriormente como la suma gráfica de los vectores se conoce como *regla del paralelogramo*. En particular, si queremos sumar dos vectores libres con origen en común, entonces debemos trazar rectas paralelas a los vectores. De esta forma se obtiene un *paralelogramo* cuya diagonal (que inicia en el origen de los vectores) es la suma misma de los vectores.

Observa la siguiente figura que muestra la regla del paralelogramo.

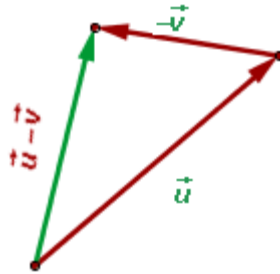


Resta de vectores

La resta de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ simplemente es la suma de $\vec{u}$ con (es decir, el opuesto de $\vec{v}$). De este modo, si consideramos los componentes de $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entonces la resta está dada por

$$\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v}) = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

Gráficamente, la resta de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se obtiene igual que la suma. La única diferencia es que sumamos el opuesto de $\vec{v}$. Observa la siguiente figura que muestra la diferencia, se observa que en el extremo de $\vec{u}$ se coloca el origen de $\vec{v}$.



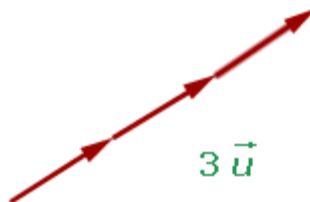
Observemos que la resta gráficamente es el vector que une el extremo de $\vec{v}$ con el extremo de $\vec{u}$ tal y como se puede apreciar en la siguiente figura:

Producto de vector por escalar

La multiplicación de un vector $\vec{u}$ por un número k se escribe $\vec{k} = k\vec{u}$. El número k también se conoce como escalar. Además, la multiplicación por escalar es otro vector que satisface las siguientes propiedades:

- $\vec{k}$ tiene la misma dirección que $\vec{u}$.
- Si k es positivo, entonces $\vec{k}$ tiene el mismo sentido que $\vec{u}$.
- Si k es negativo, entonces $\vec{k}$ tiene el sentido contrario que $\vec{u}$.
- El módulo de $\vec{k}$ es $|k\vec{u}|$

Observemos la siguiente figura que representa la multiplicación de $\vec{u}$ por 3.



En términos de componentes, si $\vec{u} = (u_1, u_2)$, entonces la multiplicación por escalar está dada por

$$\overrightarrow{ku} = (ku_1, ku_2)$$

Ejemplos de ejercicios con vectores

Consideremos los vectores $\vec{u} = (-3, 4)$ y $\vec{v} = (3, -1)$. Entonces:

a. La suma está dada por:

$$\vec{u} + \vec{v} = (-3 + 3, 4 - 1) = (0, 3)$$

b. La resta es:

$$\vec{u} - \vec{v} = (-3 - 3, 4 - (-1)) = (-6, 5)$$

c. El opuesto de $\vec{u}$ es:

$$-\vec{u} = -(-3, 4) = (3, -4)$$

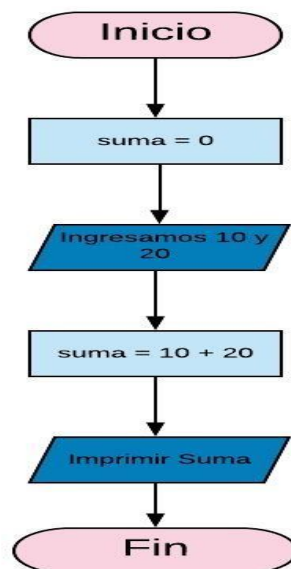
d. El producto escalar de $\vec{v}$ por 2 está dado por:

$$2\vec{u} = 2(3, -1) = (6, -2)$$

Mediante Diagrama de flujo

- **Programación:** Puedes usar arreglos o estructuras de datos para representar vectores y realizar operaciones vectoriales.
- **Diagrama de Flujo:** Representaría cómo se manipulan los vectores (suma, producto escalar, producto cruz, etc.).

Ejemplo:



Funciones Exponenciales Utilizando Series:

Además de funciones lineales, cuadráticas, racionales y radicales, existen las funciones exponenciales, Tienen la forma $f(x) = b^x$, donde $b > 0$ y $b \neq 1$. Al igual que cualquier expresión exponencial, b se llama base y x se llama exponente.

Por ejemplo, una función exponencial es el crecimiento poblacional de un país, también el crecimiento de las bacterias.

Analizaremos el crecimiento de una bacteria que se triplica cada hora. Si comienzas con 1 bacteria, tendrás 3^x bacterias después de x horas. Esto se puede escribir como $f(x) = 3^x$.

Al inicia: $f(0) = 2^0 = 1$

Pasada 1 hora: $f(1) = 3^1 = 3$

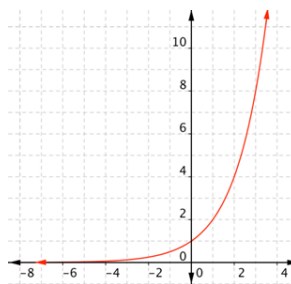
A las 2 horas: $f(2) = 3^2 = 9$

Después de 3 horas: $f(3) = 3^3 = 27$

Y así sucesivamente

Según la definición $f(x) = b^x$ y las restricciones de $b > 0$ y $b \neq 1$, el dominio de la función exponencial es el conjunto de todos los números reales. El rango es el conjunto de todos los números reales positivos.

La siguiente gráfica de la función $f(x) = 2^x$ nos permite señalar:



- **El Crecimiento:** Su grafica tiende a acerca mucho al eje x cuando se aleja de cero por la izquierda, pero nunca toca el eje x. y su valor se hace más grande cuando se aleja del cero por la derecha

- La función en cero es igual a 1
- Su dominio son los números reales.
- Su rango son los números reales positivos.

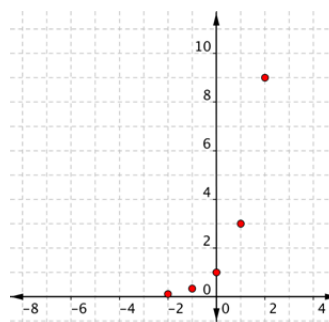
Ejemplo

Graficar el crecimiento de nuestra bacteria $f(x) = 3^x$.

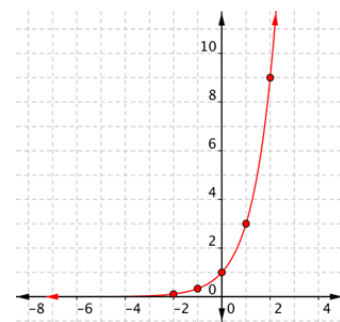
Empieza con una tabla de valores.

x	f(x)	Puntos
-2	$\frac{1}{9}$	$A\left(-2, \frac{1}{9}\right)$
-1	$\frac{1}{3}$	$B\left(-1, \frac{1}{3}\right)$
0	1	$C(0, 1)$
1	3	$D(1, 3)$
2	9	$E(2, 9)$

Grafica los puntos.

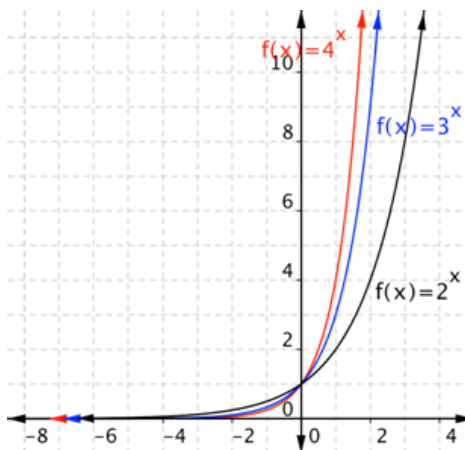


La función exponencial



Si graficamos tres funciones con base diferentes, por ejemplo

$f(x) = 2^x$, $f(x) = 3^x$ y $f(x) = 4^x$ obtenemos.



Se observa que una base más grande hace más empinada la gráfica.

Una base mayor, su gráfica se acerca al eje y por $x > 0$ y más cerca al eje x por $x < 0$. “Todas las gráficas pasan por (0, 1)”

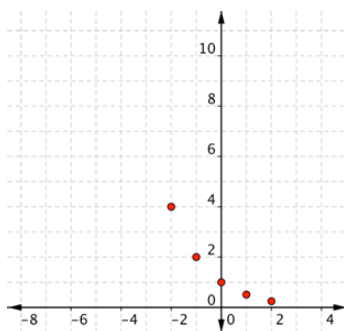
Decaimiento exponencial

Recordamos que para las funciones exponenciales, $b > 0$, pero $b \neq 1$. En los ejemplos anteriores, $b > 1$. ¿Qué pasa cuando b está entre 0 y 1, $0 < b < 1$?

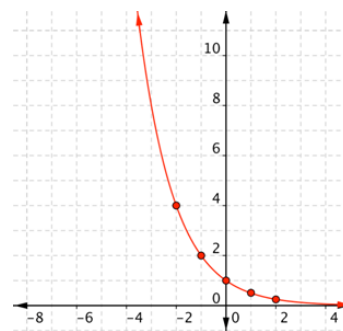
Graficamos la funciones: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	f(x)	Puntos
-2	4	$A(-2, 4)$
-1	2	$B(-1, 2)$
0	1	$C(0, 1)$
1	$\frac{1}{2}$	$D\left(1, \frac{1}{2}\right)$
2	$\frac{1}{4}$	$E\left(2, \frac{1}{4}\right)$

Grafica los puntos.



La función exponencial



Observa que la forma es similar a la forma cuando $b > 1$, pero esta vez la gráfica se acerca al eje x cuando $x > 0$, en lugar de $x < 0$. Esto es un decaimiento exponencial. En lugar de que los valores de la función “crezcan” conforme aumentan los valores de x , como sucedía antes, los valores de la función “decaen” o disminuyen conforme los valores de x aumentan. Se acercan cada vez más a 0.

Aplicando funciones exponenciales

Las funciones exponenciales son utilizadas en diferente contextos, como el interés compuesto (dinero), crecimiento poblacional y decaimiento radioactivo. La mayoría de esta funciones no es exactamente de la forma $f(x) = b^x$. Normalmente, ésta se ajusta sumando o multiplicando constantes.

Por ejemplo, la fórmula del interés compuesto es $C_f = C_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$, donde C_0 es el Capital invertido (la inversión o aporte inicial) y C_f es la

cantidad de dinero que tendrás, con interés, al final de t años, usando la tasa de interés anual de r (expresado como un decimal) y m periodos por año. En este caso la base es el valor representado por la expresión $\left(1 + \frac{r}{m}\right)$ y el exponente es mt (un producto de dos valores).

Ejemplo:

Si inviertes 2.000 \$ en una cuenta que paga 4% de interés, cuatrimestral, ¿cuánto dinero tendrás después de 4 años?

Solución

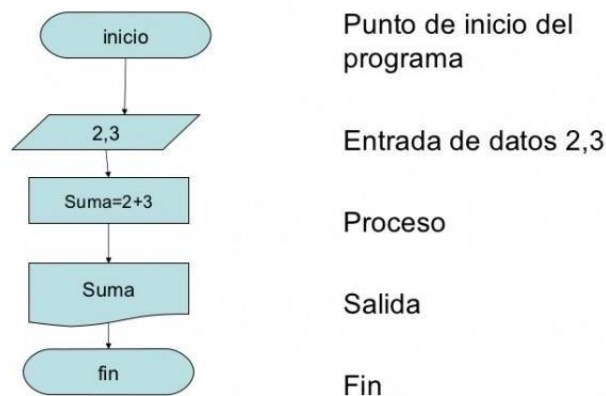
Datos	Formula	Operación
$C_0 =$ 2,000 \$ $r = 0.04$ $m = 4$ $t = 4$ años $C_f = ?$	C_f $= C_0 \left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$	$C_f = 2.000 \left(1 + \frac{0,04}{4}\right)^{4 \cdot 4}$ $= 2.000(1,01)^{16}$ $C_f = 2.000(1,172579)$ $C_f = 2.345,16$ \$

Mediante Diagrama de flujo:

- **Programación:** Puedes escribir programas que aproximen funciones exponenciales utilizando series de Taylor o Maclaurin.
- **Diagrama de Flujo:** Mostraría los pasos para calcular la aproximación de una función exponencial mediante una serie.

Ejemplo:

Diagrama de flujo



Estudios de Matrices:

Se denomina matriz a todo conjunto de números o expresiones dispuestos en forma rectangular, formando filas y columnas. Este sería un ejemplo de una matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cada uno de los números en la matriz se denomina elemento. Así, los elementos de la primera fila de la matriz escrita anteriormente serían los números (1, 3, -1, 0).

La dimensión de una matriz es el número de filas y columnas que posee.

Una matriz $M_{m \times n}$ significa que posee m filas y n columnas (siempre el subíndice de la izquierda indica las filas y el de la derecha las columnas) en cambio a_{ij} indica un elemento cualquiera de la misma, que se encuentra en la fila “i” y en la columna “j”. Un elemento se distingue de otro por la posición que ocupa, es decir, la fila y la columna a la que pertenece.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Para la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que sus elementos, al distinguirlos por posición, serían

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} = 1 & a_{12} = 3 & a_{13} = -1 & a_{14} = 0 & a_{21} = 2 & a_{22} = 0 \\ a_{23} = 5 & a_{24} = -3 & a_{31} = 3 & a_{32} = -2 & a_{33} = 1 & a_{34} = 0 \end{array}$$

Además, su dimensión es de 3 filas y 4 columnas, por lo tanto podemos denotar a M como $M_{3 \times 4}$ o (a_{ij}) .

Dos matrices son iguales cuando tienen la misma dimensión y los elementos que ocupan el mismo lugar en ambas, son iguales. En forma matemática, si tenemos las matrices A y B

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1q} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pq} \end{pmatrix}$$

Entonces A y B son iguales si $m = p$, $n = q$ y $(a_{ij}) = (b_{ij})$ para cualquier i y j .

Ejemplo:

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que A y B son iguales ya que tienen la misma dimensión y los elementos de las mismas posiciones también son iguales. Sin embargo, A y C no son iguales ya que $a_{22} = 1$, pero $c_{22} = 0$, por lo tanto $a_{22} \neq c_{22}$.

Operaciones de matrices

Suma de matrices

Dadas dos matrices de la misma dimensión, $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, se define la matriz suma como: $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. Es decir, aquella matriz

cuyos elementos se obtienen sumando los elementos de las dos matrices que ocupan la misma posición (suma elemento a elemento).

Ejemplo:

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 6 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

su suma estaría dada por

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 6 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1+3 & 3+(-4) \\ -2+6 & 0-1 & 4+2 \\ 6-3 & -4-2 & 2+1 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Propiedades

- **Asociativa:** Dadas las matrices **A**, **B** Y **C** se cumple que:

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

- **Elemento neutro:** Existe una matriz, denotada por **0**, tal que para toda matriz A, si hacemos su suma obtenemos

$$A + 0 = 0 + A = A$$

Los elementos de la matriz 0 son puros ceros.

- **Inverso aditivo:** Para toda matriz **A**, existe una matriz $-A = (-a_{ij})$, llamada inverso aditivo de A, la cual cumple que

$$A + (-A) = A - A = 0$$

Los elementos de la matriz **-A** son los elementos de **A** multiplicados por (-1).

- **Conmutativa:** Dadas las matrices **A** y **B** se cumple que.

$$A + B = B + A$$

Producto de un número real por una matriz

Dada una matriz $A = (a_{ij})$ y un número real $k \in \mathbb{R}$, se define el producto de un número real por una matriz: a la matriz del mismo orden que A , en la que cada elemento está multiplicado por k , en otras palabras $KA = (k \cdot a_{ij})$.

Ejemplo:

Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

y el escalar real 2, la multiplicación estaría dada por

$$2A = 2 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 4 & -1 & 6 \\ 3 & -6 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(1) & 2(4) & 2(7) \\ 2(4) & 2(-1) & 2(6) \\ 2(3) & 2(-6) & 2(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 14 \\ 8 & -2 & 12 \\ 6 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades

- **Asociativa escalar:** Dada la matriz A y los escalares a y b , se cumple que

$$a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$$

- **Distributiva en los escalares:** Dada la matriz A y los escalares a y b , se cumple que

$$(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$$

- **Distributiva en las matrices:** Dadas las matrices A y B y el escalar a , se cumple que

$$a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$$

- **Escalar neutro:** Dada la matriz A y el escalar 1, se cumple que

$$1 \cdot A = A$$

Producto de matrices

Dos matrices A y B se dicen multiplicables si el número de columnas de A coincide con el número de filas de B .

La multiplicación de dos matrices multiplicables $A_{m \times n}$ y $B_{n \times p}$ es una nueva matriz, $C_{m \times p}$ que tiene la misma cantidad de filas que A y la misma cantidad de columnas que B .

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

El elemento c_{ij} de la matriz producto se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de la matriz A por cada elemento de la columna j de la matriz B y sumándolos ($c_{ij} = \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot b_{kj})$).

Ejemplo:

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 6 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Su multiplicación estaría dada por

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 6 & -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 6 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} (2)(-1) + (1)(6) + (3)(-3) & (2)(3) + (1)(-1) + (3)(-2) & (2)(-4) + (1)(2) + (3)(1) \\ (-2)(-1) + (0)(6) + (4)(-3) & (-2)(3) + (0)(-1) + (4)(-2) & (-2)(-4) + (0)(2) + (4)(1) \\ (6)(-1) + (-4)(6) + (2)(-3) & (6)(3) + (-4)(-1) + (2)(-2) & (6)(-4) + (-4)(2) + (2)(1) \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -2 + 6 - 9 & 6 - 1 - 6 & -8 + 2 + 3 \\ 2 + 0 - 12 & -12 + 0 - 8 & 8 + 0 + 4 \\ -6 - 24 - 6 & 18 + 4 - 4 & -24 - 8 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -3 \\ -10 & -20 & 12 \\ -36 & 18 & -30 \end{pmatrix}$$

Propiedades

➤ **Asociativa:** Dadas las matrices A , B y C , se cumple que

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$$

➤ **Elemento neutro:** Dada la matriz $A_{m \times n}$ existe una matriz $I_{n \times n}$ tal que se cumple que

$$A \cdot I = I \cdot A = A$$

En donde la matriz “ I ” tiene puros 1 en la diagonal y 0 en cualquier otra posición

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

No es conmutativa: Dadas las matrices **A** y **B**, para la mayoría de los casos se cumple que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}.$$

➤ **Distributiva del producto respecto a la suma:** Dadas las matrices **A**, **B** y **C** se cumple que

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$$

$$(\mathbf{B} + \mathbf{C}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}$$

.Matriz inversa

Sea $\mathbf{A}_{n \times n}$ una matriz con la misma cantidad de filas que de columnas. Si existe una matriz, denotada por $\mathbf{A}^{-1}$, que cumple que:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$$

en donde “I” es el neutro multiplicativo, decimos que **A** es invertible o regular. Además, a $\mathbf{A}^{-1}$ la llamamos matriz inversa de **A**.

Ejemplo:

Dada la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Su matriz inversa está
dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Para comprobarlo, veamos que

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} (1)(1) + (1)(0) + (0)(1) & (1)(0) + (1)(0) + (0)(1) & (1)(-1) + (1)(1) + (0)(1) \\ (1)(1) + (0)(0) + (1)(-1) & (1)(0) + (0)(0) + (1)(1) & (1)(-1) + (0)(1) + (1)(1) \\ (0)(1) + (1)(0) + (0)(-1) & (0)(0) + (1)(0) + (0)(1) & (0)(-1) + (1)(1) + (0)(1) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & -1 + 1 + 0 \\ 1 + 0 - 1 & 0 + 0 + 1 & -1 + 0 + 1 \\ 0 + 0 + 0 & 0 + 0 + 0 & 0 + 1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

Propiedades

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}^{-1}$$

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$$

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Tipos de matrices

❖ Matriz fila

Es una matriz constituida por una sola fila.

$$A_{1n} = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]$$

Ejemplo:

$$A = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5]$$

❖ Matriz columna

$$A_{m1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 10 \\ 7 \\ 8 \\ 15 \end{bmatrix}$$

❖ Matriz rectangular

Aquella matriz que tiene distinto número de filas que de columnas, siendo su dimensión $m \times n$, $m \neq n$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

❖ Matriz cuadrada

La que poseen el número de filas y columnas iguales.

Los elementos de la forma a_{ii} forman la diagonal principal.

La diagonal secundaria la forman los elementos cuyos subíndices cumplen con $i + j = n + 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

❖ Matriz nula

Todos los elementos son cero (0).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

en donde $a_{ij} = 0$ para todo i y j .

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

❖ Matriz triangular superior

Los elementos situados debajo de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Notemos que, como la definición depende de la diagonal principal, la matriz tiene que ser cuadrada.

❖ Matriz triangular inferior

Los elementos situados arriba de la diagonal principal son 0.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como en el tipo de matriz señalado anteriormente, la matriz debe de ser cuadrada.

❖ Matriz diagonal

Todos los elementos situados encima y debajo de la diagonal principal son nulos.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Al tratarse de matrices triangulares, son matrices cuadradas.

❖ Matriz escalar

Es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Al tratarse de una matriz diagonal, es una matriz cuadrada.

❖ Matriz identidad o unidad

La matriz donde los elementos de la diagonal principal son iguales a 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Al tratarse de una matriz escalar, es una matriz cuadrada.

❖ Matriz traspuesta

Dada una matriz A, se llama traspuesta de A, la matriz que se obtiene cambiando ordenadamente las filas por las columnas (la primer fila se

convertirá en la primer columna, la segunda fila en la segunda columna y así sucesivamente). Si tenemos la matriz **A**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Su matriz transpuesta, denotada por A^T , está dada por

$$A^T = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1m} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Dada la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{su matriz transpuesta es} \quad B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

$$(A^T)^T = A$$

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

$$(k \cdot A)^T = kA^T$$

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

❖ Matriz regular

Es aquella matriz cuadrada que se puede determinar su inversa.

❖ Matriz singular

Es aquella que no posee matriz inversa. Por ejemplo, ninguna matriz rectangular (no cuadrada) tiene inversa (se necesita ser cuadrada para tener inversa).

❖ Matriz idempotente

Una matriz idempotente es aquella que cumple que

$$A^2 = A$$

Ejemplo:

Consideremos la matriz Notemos que $B^2 = B \cdot B$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} (2)(2) + (1)(1) & (2)(1) + (1)(3) \\ (1)(2) + (3)(1) & (1)(1) + (3)(3) \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 4+1 & 2+3 \\ 2+3 & 1+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

❖ Matriz involutiva

Una matriz involutiva es aquella que cumple que

$$A^2 = I$$

Ejemplo:

Consideremos Notemos que $B^2 = B \cdot B$

la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} (1)(1) + (-1)(0) & (1)(-1) + (-1)(-1) \\ (0)(1) + (-1)(0) & (0)(-1) + (-1)(-1) \end{pmatrix}$$

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1+0 & -1+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

❖ Matriz simétrica

Una matriz simétrica es aquella que cumple que

$$B^T = B$$

Ejemplo:

Consideremos la matriz Notemos que

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} = B$$

❖ Matriz antisimétrica o hemisimétrica

Una matriz antisimétrica es aquella que cumple que

$$\mathbf{B}^T = -\mathbf{B}$$

Ejemplo:

Consideremos la matriz

Notemos que

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -\mathbf{B}$$

❖ Matriz ortogonal

Una matriz ortogonal es aquella que cumple que

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \mathbf{I}$$

Ejemplo:

Dada la matriz: $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, su traspuesta es: $\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Multiplicando $\mathbf{B}$ por su traspuesta $\mathbf{B}^T$ obtenemos

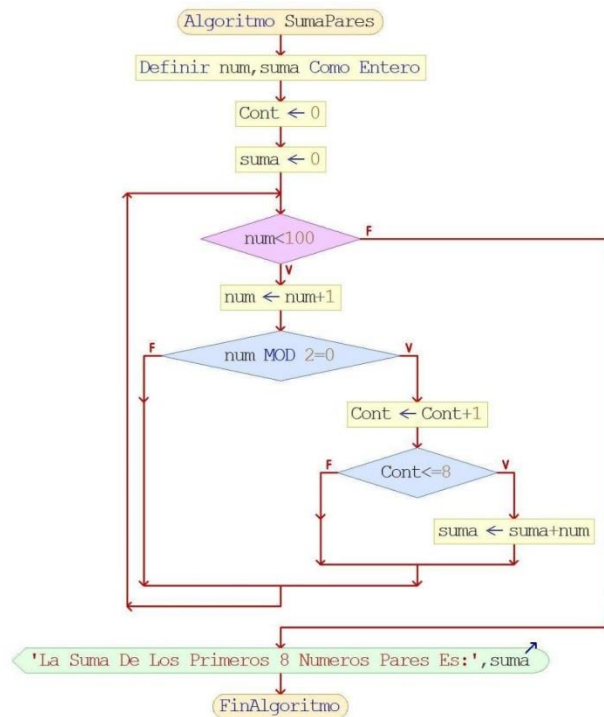
$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} (0)(0) + (1)(1) & (0)(-1) + (1)(0) \\ (-1)(0) + (1)(0) & (-1)(-1) + (0)(0) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}^T = \begin{pmatrix} 0+1 & 0+0 \\ 0+0 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

Mediante Diagrama de flujo:

- **Programación:** Puedes usar matrices para resolver sistemas de ecuaciones, encontrar determinantes o calcular autovalores y auto vectores.
- **Diagrama de Flujo:** Representaría los pasos para realizar operaciones matriciales.

Ejemplo:



Auto evaluación

- 01.- Realizar un algoritmos que permita explicar el proceso se realizar una comida.
- 02.- Diseñe un algoritmo (pseudocódigo) que permita hallar el mínimo común múltiplo (mcm) de dos números enteros positivos dados. Note que no se especifica cuáles son los dos números, aunque se indica que deben ser enteros y positivos.
- 03.- Diseñar un algoritmo (pseudocódigo) para obtener el perímetro de un triángulo cuya lados miden A, B y C.
- 04.- realice un algoritmo para reparar el desinflado de una rueda de moto.
- 05.- Hallar el Área y perímetro de un pentágono regular cuyo lado mide 7 cm.
- 06.- Hallar el Área y perímetro de un círculo cuyo radio mide 4 cm.

07.- Coloca tu número de cedula cuadrícula matriz, la cual genera los valores que utilizar en la actividad,

A	B	C	D	E	F	G	H

$$S = \begin{bmatrix} A & H & D \\ -C & B & G \\ -A & E & F \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} -A & -B & C \\ D & E & -F \\ F & G & H \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} F & -A & -C \\ H & D & -A \\ -A & B & -E \end{bmatrix}$$

Realizar los siguientes ejercicios

a.- $2S - P + M =$ b.- $-3P + 2M - A =$ c.- $S^{-1} \cdot M^T$ d.- $M^{-1} \cdot M$ e.- $P^T \cdot S$ g.- $(M^{-1})^T$

08.- Dado las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & -3 \\ -2 & 7 & -4 \end{bmatrix}$$

Efectuar:

a.- $A - 2B - 3C =$ b.- $(2B - C) \times A =$ c.- $B^2 \times A =$ d.- $A^T \times (-B) =$

Unidad 2

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES

Ecuaciones

Es una igualdad algebraica que consta de un vínculo (símbolo de igualdad) que separa los dos miembros; cada miembro de la igualdad posee términos separados por signos de agrupación (+ ó -), cada término consta de coeficientes (números) y las variables (símbolo o las últimas letras del alfabeto) que representan las incógnitas (valor desconocido). El grado de una ecuación viene dado por el exponente mayor de la variable.

Solucionar una ecuación es obtener el valor o valores de las incógnitas (variables) que transformen la ecuación en una identidad.

Aproximación de funciones

La teoría de la aproximación se refiere a cómo las funciones pueden ser aproximadas con otras funciones más simples, incluyendo la caracterización, cuantificación del error introducido. Debe tenerse en cuenta que lo que se entiende por *mejor* y *más simple* depende del uso que quiera darse a la aproximación, y de los recursos de cálculo necesarios.

Ajuste de curvas

El ajuste de curva lo podemos ver como la aproximación, a datos dados muy cercanos a una función sencilla (Recta). Por ejemplo el método de los mínimos cuadrados donde buscamos una recta que se ajuste óptimamente a una serie de puntos dados. Donde la aproximación es la recta,

más cercana cuya distancia es la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las diferencias en los puntos dados.

Este ejemplo puede ser resuelto de otra forma, por ejemplo si consideramos la distancia máxima de la diferencia de los puntos.

Aproximaciones geométricas

- a. El método de los isoperímetros de Arquímedes para obtener la longitud de la circunferencia, considerando polígonos regulares inscritos, iniciando con el triángulo equilátero, luego el hexágono regular; posteriormente el dodecágono, el polígono regular de 24 lados, de 48, de 96 y así sucesivamente.
- b. Tomamos una sucesión de polígonos regulares circunscritos que se aproximan, iniciando con el de 3 lados y duplicando los lados para cada polígono siguiente.
- c. Cada vez nos aproximamos más con el perímetros de los polígonos a la longitud de la circunferencia. La primera es una sucesión creciente acotada superiormente, y la segunda decreciente, acotada inferiormente.
- d. Debido a que las dos sucesiones son acotadas (por el Teorema de convergencia monótona) convergen a un mismo valor que es la longitud de la circunferencia. Considerando el radio de la circunferencia igual a 1.

Aproximación según Fermi

En física se denomina **problema de Fermi** o **estimación de Fermi**, por el físico **Enrique Fermi**, a ejercicios donde se involucran el cálculo rápido de

cantidades que parecen imposibles de estimar dada la limitada información disponible.

Fermi era conocido por su habilidad para realizar cálculos a partir de pocos datos o ningunos. Por ejemplo la estimación del poder de la bomba detonada en Trinity usando la distancia que se movía los pedacitos de papeles caídos de su mano durante la explosión.

El problema clásico atribuido a Fermi, dice determine cuántos afinadores de piano hay en Chicago. La solución típica es multiplicar una serie de consideraciones para obtener la solución. Por ejemplo, con las supuestos siguientes:

- En la ciudad viven 9 millones de personas.
- En cada casa viven 2 persona en promedio.
- Por cada 20 casas hay un piano a afinador periódicamente.
- La afinación de esos pianos es una vez cada año.
- El tiempo para afinar cada pianos con el traslado al lugar es de 2 horas,
- Cada afinador trabaja 2.000 horas por año.

Mediante estos supuestos se determinar que el número de afinaciones de piano en un año en Chicago es

$$\frac{9.000.000 \text{ personas}}{2 \frac{\text{Personas}}{\text{casa}} \cdot \frac{20 \text{ casa}}{1 \text{ piano}} \cdot \frac{1 \text{ piano x año}}{\text{afinacion}}} = 225.000 \frac{\text{afinacion}}{\text{año}}$$

$$225.000 \frac{\text{afinacion}}{\text{año}} \cdot \frac{1 \text{ año}}{2.000 \text{ hora}} \cdot \frac{2 \text{ horas x personas}}{1 \text{ afinacion}} = 225 \text{ personas}$$

Luego en Chicago hay 225 persona que afina pianos.

La solución es probable que no sea exacta, si consideramos el error de las suposiciones iniciales, pero, el análisis nos indica los datos que se necesitan para tener una respuesta más exacta..

Método de Newton.

Conocido también como el método de Newton–Raphson o método de Newton–Fourier. Es un algoritmo que por aproximaciones encuentra las raíces (ceros) de una función real. Además, se usa para hallar el valor máximo o mínimo de una función, encontrando los ceros de su primera derivada..

Método de Runge – Kutta

En análisis numérico, este método son un conjunto de métodos genéricos iterativos, explícitos e implícitos, de resolución numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias, concretamente del problema de valor inicial..

Método iterativo.

Este método trata de resolver un problema matemático (Ecuación o un sistema de ecuaciones) a través de aproximaciones sucesivas a la solución, partiendo desde unas condiciones iniciales. Esta aproximación en comparación con los métodos directos, que plantea la resolución el problema de una sola vez (por ejemplo resolver un sistema de ecuaciones $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ hallando la inversa de la matriz $\mathbf{A}$). Los métodos iterativos sirven para solucionar problemas que involucran un número grande de variables, que los métodos directos acarrearán un coste mayor.

Puntos fijos atractivos

Si una ecuación puede ponerse en la forma $f(x) = x$, y una solución x es un punto fijo atractivo de la función f , entonces puede empezar con un punto x_1 en la base de atracción de x , y sea $x_{n+1} = f(x_n)$ para $n \geq 1$, y la secuencia $\{x_n\}_{n \geq 1}$ convergerá a la solución x .

Sistemas lineales

En el caso de unos sistemas lineales de ecuaciones, las dos clases principales de métodos iterativos son los **métodos iterativos estacionarios** y los más generales **métodos del subespacio de Krylov**.

Métodos iterativos estacionarios

Los métodos iterativos estacionarios solucionan un sistema lineal con un operador que se aproxima al original, y basándose en la medida de error (residuo), desde una ecuación de corrección para la que se repite este proceso. Mientras que estos métodos son sencillos de derivar, implementar y analizar, la convergencia normalmente solo está garantizada para una clase limitada de matrices.

Métodos del subespacio de Krylov

Los métodos del subespacio de Krylov forman una Base ortogonal de la secuencia de potencias de la matriz por el residuo inicial. Las aproximaciones a la solución se forman minimizando el residuo en el subespacio formado. El método prototípico de esta clase es el método de

gradiente conjugado. Otros métodos son el método del residuo mínimo generalizado y el método del gradiente biconjugado.

Convergencia

Dado que estos métodos forman una base, el método converge en N iteraciones, donde N es el tamaño del sistema. Sin embargo, en la presencia de errores de redondeo esta afirmación no se sostiene; además, en la práctica N puede ser muy grande, y el proceso iterativo alcanza una precisión suficiente mucho antes. El análisis de estos métodos es difícil, dependiendo de lo complicada que sea la función del espectro del operador.

Precondicionantes

El operador aproximativo que aparece en los métodos iterativos estacionarios puede incorporarse también en los métodos del subespacio de Krylov, donde se pasan de ser transformaciones del operador original a un operador mejor condicionado. La construcción de preconditionadores es un área de investigación muy extensa y de gran alcance científico

Serie de Taylor

Es una aproximación de funciones mediante una serie de potencias o suma de potencias enteras de polinomios como $(x - a)^n$ llamados términos de la serie, dicha suma se calcula a partir de las derivadas de la función para un determinado valor o punto " a " suficientemente derivable sobre la función y un entorno sobre el cual converja la serie. Serie centrada sobre el punto cero, es decir, cuando $a = 0$, se le denomina también **serie de Maclaurin**.

Esta aproximación tiene tres ventajas importantes:

- La derivación e integración de una de estas series se puede realizar término a término, que resultan operaciones triviales;
- Se puede utilizar para calcular valores aproximados de funciones;
- Es posible calcular la optimidad de la aproximación.

Algunas funciones no se pueden escribir como serie de Taylor, tienen alguna singularidad. En estos casos normalmente se puede conseguir un desarrollo en serie utilizando potencias negativas de "x".

Por ejemplo $f(x) = e^{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}$ se puede desarrollar como serie de Laurent.

Mínimos Cuadrados

Es una técnica de análisis numérico dentro de la optimización, en la que, dados un conjunto de pares ordenados (variable independiente, variable dependiente) y una familia de funciones, se intenta encontrar la función continua, dentro de dicha familia, que mejor se aproxime a los datos (un "mejor ajuste"), de acuerdo con el criterio de mínimo error cuadrático.

“El método de los mínimos cuadrados es utilizado para calcular la recta de regresión lineal que minimiza los residuos, ósea, las diferencias entre los valores reales y los estimados por la recta. Se revisa su fundamento y la forma de calcular los coeficientes de regresión con este método”.

Aproximación Diofántica.

En Teoría de Números, las aproximaciones Diofánticas tratan de las aproximaciones de números reales por medio de números racionales. Este tipo de aproximaciones lleva su nombre en honor a Diofanto, matemático

griego del año 275 a.c que las estudió extensivamente y planteó ecuaciones y dio soluciones a algunas de ellas. Su vida se desconoce por completo; sin embargo ha llegado hasta nosotros un texto escrito por él llamado La Aritmética en el que se plantean y resuelven 189 problemas de álgebra que hoy resolveríamos utilizando ecuaciones de primero y segundo grado como sistemas de ecuaciones. Por este hecho se le conoce como el padre del Álgebra y a las ecuaciones de primer grado se les llama, también, Ecuaciones Diofánticas.

Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Fundamentalmente el problema es calcular la solución de una ecuación o sistema de ecuaciones dado. Se distinguen dos casos dependiendo de si la ecuación o sistema de ecuaciones es o no lineal. Por ejemplo, la ecuación de primer grado es lineal mientras que la ecuación de segundo grado no. Mucho esfuerzo se ha abocado en desarrollo de métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Métodos directos, métodos que utilizan alguna factorización de la matriz son el método de eliminación de Gauss, la descomposición de Cholesky para matrices simétricas (o herméticas) definidas positivas, y la descomposición QR. Métodos iterativos como el método de Jacobi, el método de Gauss-Seidel, el método de las aproximaciones sucesivas y el método del gradiente conjugado se utilizan frecuentemente para grandes sistemas.

En la resolución numérica de ecuaciones no lineales algunos de los métodos más conocidos son los métodos de bisección, de la secante y de la falsa posición. Si la función es además derivable y la derivada se conoce, el método de Newton es muy utilizado. Este método es un método de

iteración de punto fijo. La linealización es otra técnica para resolver ecuaciones no lineales.

Las ecuaciones algebraicas polinomiales poseen una gran cantidad de métodos numéricos como son:

- ✓ Método de Gräeffe (Lobachevsky, Lobachevsky-Dandelin-Gräeffe o del cuadrado de las raíces)
- ✓ Método de Laguerre
- ✓ Método de Bairstow (o método de Lin-Bairstow)
- ✓ Método de Bernoulli
- ✓ Método de Horner
- ✓ Método de Householder
- ✓ Método de Newton – Raphson especializado para polinomios
- ✓ Método de Richmond especializado para polinomios
- ✓ Método modificado de Richmond
- ✓ Método de Newton – Horner
- ✓ Método de Richmond – Horner
- ✓ Método de Birge – Biète
- ✓ Método de Jenkins – Traub

Mediante el álgebra aprendimos a resolver sistemas de ecuaciones lineales (de la forma $\mathbf{AX} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$ o $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$), sistemas que posee una solución única. Por otro lado, nos hemos encontrado con muchos problemas que no se pueden expresarse por medio de ecuaciones lineales. La ciencia aplicada a la ingeniería, a cada rato se enfrenta a situaciones que no conduce a una sola solución (ecuaciones lineales), que no podemos resolver algebraicamente.

Por ejemplo deseamos resolver una ecuación del tipo $\mathbf{AX}^3 + \mathbf{BX}^2 + \mathbf{Cx} + \mathbf{D} = \mathbf{0}$. Esta ecuación tiene tres soluciones posibles (raíces). Aunque

sabemos la forma algebraica para determinar el valor de la variable (raíces o soluciones), es más práctico resolverla mediante algún método iterativo, y obtenerlas. Por otro lado las ecuaciones que no tienen solución algebraica, sólo se pueden resolverse mediante aproximaciones o algún algoritmo para uso de operadores

Existen registros de civilizaciones como la Egipcia o la de Babilonia, que usaron métodos que ahora conocemos con el nombre de falsa posición. En cada época de nuestra historia matemáticos realizaron sus aportes para ecuaciones de primer, segundo y tercer grado, incluso para una ecuación de cuarto grado, usando radicales.

Este problema se aborda en análisis numérico mediante procesos iterativos (algoritmos), que corresponde a un conjunto prescrito de instrucciones o reglas bien definidas, ordenadas y finitas que permite realizar una actividad mediante pasos sucesivos que no generen dudas a quien deba realizar dicha actividad, generalizando en cierto modo estos procesos, sin usar radicales.

Señalaremos los métodos más conocidos y usados, como son:

- ❖ Método de bisección
- ❖ Iteración de punto fijo
- ❖ Método de Newton
- ❖ Método de la secante
- ❖ Método de la posición falsa

El Método de Bisección

Este método fue trabajado por Bernard Placidus Johann Nepomuk Bolzano (Praga, Bohemia, 5 de octubre de 1781 - 18 de diciembre de 1848) que fue un matemático, lógico, filósofo, que escribió en alemán y que realizó importantes contribuciones a las matemáticas y a la Teoría del conocimiento.

Se conoce como el método de bisección o de búsqueda binaria, se basa en el teorema del valor intermedio.

Dada una función $f(x)$ continua definida en el intervalo $[a, b]$ con $f(a)$ y $f(b)$ de signos diferentes. De acuerdo con el Teorema del Valor Intermedio, existe un número P en $(a; b)$ tal que $f(p) = 0$. Si bien el procedimiento se aplica aunque exista más de una raíz en el intervalo (a, b) , por razones de simplicidad suponemos que la raíz de este intervalo es única. El método requiere dividir varias veces a la mitad los subintervalos de $[a; b]$ y, en cada caso, localizar la mitad que contenga a p .

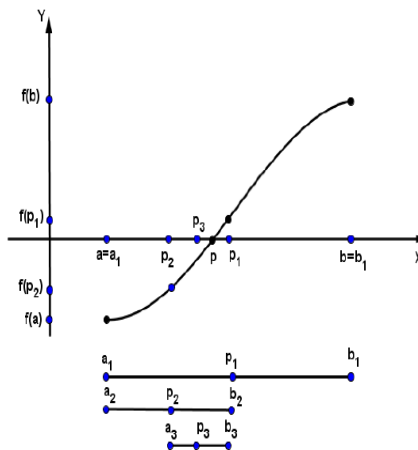
Para empezar supongamos que $a_1 = a$ y $b_1 = b$ y sea p_1 el punto medio de $[a, b]$; es decir;

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

Si $f(p_1) = 0$ entonces $p = p_1$; de no ser así, entonces $f(p_1)$ tiene el mismo signo que $f(a_1)$ o $f(b_1)$.

Si $f(p_1)$ y $f(a_1)$ tiene el mismo signo, entonces $p \in (a_1, b_1)$ y tomamos $a_2 = p_1$ y $b_2 = b_1$.

Si $f(p_1)$ y $f(a_1)$ tienen signos opuestos entonces $p \in (a_1, p_1)$ y tomamos $a_2 = a_1$ y $b_2 = p_1$. Después volveremos a aplicar el proceso en el intervalo (a_2, b_2) .



Ejemplo 1:

Dada la siguiente función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ aplique el método de bisección para encontrar una solución exacta dentro de 10^{-3} en el intervalo $[1, 2]$.

Para empezar sabemos que $a_1 = 1$ y $a_2 = 2$ reemplazando en la fórmula del método de bisección tenemos:

$$F(x) = x^3 + 4x^2 - 10 \Rightarrow F(x) = x^3 + 4x^2 - 10 \Rightarrow$$

$$F(1) = (1)^3 + 4(1)^2 - 10 \quad F(2) = (2)^3 + 4(2)^2 - 10$$

$$F(1) = 1 + 4 - 10 \quad F(2) = 8 + 16 - 10$$

$$F(1) = -5 \quad F(2) = +14$$

$$P_1 = \frac{a_1+b_1}{2} \text{ Obtenemos: } P_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5 \text{ luego } F(1) \cdot F(1,5) < 0 \Rightarrow$$

$$P_2 = \frac{1+1,5}{2} = \frac{2,5}{2} = 1,25 \text{ Luego } F(1,5) \cdot F(1,25) < 0 \Rightarrow$$

$$P_3 = \frac{1,25+1,5}{2} = \frac{2,75}{2} = 1,325 \text{ Luego } F(1,25) \cdot F(1,325) < 0 \Rightarrow$$

$$P_4 = \frac{1,25+1,375}{2} = \frac{2,575}{2} = 1,3125 \text{ Luego } F(1,375) \cdot F(1,3125) < 0 \Rightarrow$$

$$P_5 = \frac{1,3125+1,375}{2} = \frac{2,6875}{2} = 1,34375 \text{ Luego } F(1,375) \cdot F(1,34375) < 0 \Rightarrow$$

$$P_6 = \frac{1,34375+1,375}{2} = \frac{2,71875}{2} = 1,359375 \text{ Luego } F(1,375) \cdot F(1,359375) < 0 \Rightarrow$$

$$P_7 = \frac{1,359375+1,375}{2} = \frac{2,734375}{2} = 1,3671875 \text{ Luego}$$

$$F(1,359375) \cdot F(1,3671875) < 0 \Rightarrow$$

$$P_8 = \frac{1,359375+1,3671875}{2} = \frac{2,7265625}{2} = 1,36328125 \text{ Luego}$$

$$F(1,3671875) \cdot F(1,36328125) < 0 \Rightarrow$$

$$P_9 = \frac{1,36328125+1,3671875}{2} = \frac{2,73046875}{2} = 1,365234375 \text{ Luego}$$

$$F(1,36328125) \cdot F(1,3671875) < 0 \Rightarrow$$

$$P_{10} = \frac{1,36328125+1,365234375}{2} = \frac{2,728515625}{2} = 1,364257813 \text{ Luego}$$

$$F(1,364257813) \cdot F(1,365234375) < 0 \Rightarrow$$

$$P_{11} = \frac{1,365234375 + 1,364257813}{2} = 1,364746094 \text{ Luego}$$

$$F(1,365234375) \cdot F(1,364746094) < 0 \Rightarrow$$

$$P_{12} = \frac{1,365234375 + 1,364746094}{2} = 1,364990234 \text{ Luego}$$

$$F(1,365234375) \cdot F(1,364990234) < 0 \Rightarrow$$

$$P_{13} = \frac{1,365234375 + 1,364990234}{2} = 1,365112305 \text{ Luego}$$

$$F(1,365234375) \cdot F(1,365112305) < 0 \Rightarrow$$

Resultando una aproximación muy cercana a las raíces de la función

Ejemplos 2:

Dada la siguiente función $f(x) = \sqrt{x} - \cos x$ aplique el método de bisección para encontrar una solución exacta dentro de 10^{-3} en el intervalo $[0, 1]$.

Para empezar $a_1 = 0$ y $a_2 = 1$ reemplazando en la fórmula del método de bisección:

$$F(x) = \sqrt{x} - \cos x \Rightarrow$$

$$F(x) = \sqrt{x} - \cos x \Rightarrow$$

$$F(0) = \sqrt{0} - \cos(0)$$

$$F(1) = \sqrt{1} - \cos(1)$$

$$F(0) = 0 - 1$$

$$F(1) = 1 - 0$$

$$F(0) = -1$$

$$F(1) = 1$$

$$P_1 = \frac{a_1 + b_1}{2} \text{ Obtenemos: } P_1 = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ luego } F(1) \cdot F(0,5) < 0 \Rightarrow$$

$$P_2 = \frac{0,5+1}{2} = \frac{1,5}{2} = 0,75 \text{ Luego } F(0,5) \cdot F(0,75) < 0 \Rightarrow$$

$$P_3 = \frac{0,5+0,75}{2} = \frac{1,25}{2} = 0,625 \text{ Luego } F(0,75) \cdot F(0,625) < 0 \Rightarrow$$

$$P_4 = \frac{0,625+0,75}{2} = \frac{1,375}{2} = 0,6875 \text{ Luego } F(0,625) \cdot F(0,6875) < 0 \Rightarrow$$

$$P_5 = \frac{0,625+0,6875}{2} = \frac{1,3125}{2} = 0,65625 \text{ Luego } F(0,625) \cdot F(0,65625) < 0 \Rightarrow$$

$$P_6 = \frac{0,625+0,65625}{2} = \frac{1,28125}{2} = 0,640625 \text{ Luego } F(0,65625) \cdot F(0,640625) < 0 \Rightarrow$$

$$P_7 = \frac{0,640625+0,65625}{2} = \frac{1,296875}{2} = 0,6484375 \text{ Luego } F(0,640625) \cdot F(0,6484375) < 0 \Rightarrow$$

$$P_8 = \frac{0,640625+0,6448375}{2} = \frac{1,2890625}{2} = 0,64453125$$

$$\text{Luego } F(0,640625) \cdot F(0,64453125) < 0 \Rightarrow$$

$$P_9 = \frac{0,640625 + 0,64453125}{2} = \frac{1,28515625}{2} = 0,642578125$$

$$\text{Luego } F(0,640625) : F(0,642578125) < 0 \Rightarrow$$

$$P_{10} = \frac{0,640625+0,642578125}{2} = 0,641601563$$

$$\text{Luego } F(0,642478125) \cdot F(0,641601563) < 0 \Rightarrow$$

$$P_{11} = \frac{0,641601563+0,642089844}{2} = 0,642089844$$

$$\text{Luego } F(0,641601563) \cdot F(0,642089844) < 0 \Rightarrow$$

$$P_{12} = \frac{1,365234375+1,364746094}{2} = 0,64184570$$

Resultando una aproximación muy cercana a las raíces de la función

Ejemplos 3:

Dada la siguiente función $f(x) = 2x \cos(2x) - (x+1)^2$ aplique el método de bisección para encontrar una solución exacta dentro de 10^{-3} en el intervalo $[-3, -2]$

Para empezar $a_1 = -3$ y $a_2 = -2$ reemplazando en la fórmula del método de bisección:

$$\begin{aligned} F(x) &= 2x \cos(2x) - (x+1)^2 \Rightarrow F(x) = 2x \cos(2x) - (x+1)^2 \Rightarrow \\ F(-3) &= 2(-3) \cos(-6) - (-3+1)^2 & F(-2) &= 2(-2) \cos(-4) - (-2+1)^2 \\ &= -6 - 4 & F(-3) &= -4 - 1 \\ F(-3) &= -6 - 4 & F(0) &= -5 \\ F(0) &= -10 \end{aligned}$$

$$P_1 = \frac{a_1+b_1}{2} \text{ Obtenemos: } P_1 = \frac{-3-2}{2} = \frac{-5}{2} = -2,5 \text{ luego } F(-2) \cdot F(-2,5) < 0 \Rightarrow$$

$$P_2 = \frac{-2,5-2}{2} = \frac{-4,5}{2} = -2,25 \text{ Luego } F(-2) \cdot F(-2,25) < 0 \Rightarrow$$

$$P_3 = \frac{-2,25-2}{2} = \frac{-4,25}{2} = -2,125 \text{ Luego } F(-2,25) \cdot F(-2,125) < 0 \Rightarrow$$

$$P_4 = \frac{-2,25-2,125}{2} = \frac{-4,375}{2} = -2,1875 \quad \text{Luego} \quad F(-2,25) \cdot F(-2,1875) < 0 \Rightarrow$$

$$P_5 = \frac{-2,25-2,1875}{2} = \frac{-4,4375}{2} = -2,21875 \quad \text{Luego}$$

$$F(-2,1875) \cdot F(-2,21875) < 0 \Rightarrow$$

$$P_6 = \frac{-2,21875-2,1875}{2} = \frac{-4,40625}{2} = -2,203125 \quad \text{Luego}$$

$$F(-2,1875) \cdot F(-2,203125) < 0 \Rightarrow$$

$$P_7 = \frac{-2,203125-2,1875}{2} = \frac{-4,390625}{2} = -2,1953125 \quad \text{Luego}$$

$$F(-2,1875) \cdot F(-2,1953125) < 0 \Rightarrow$$

$$P_8 = \frac{-2,1953125-2,1875}{2} = \frac{-4,3828125}{2} = -2,19140625 \quad \text{Luego}$$

$$F(-2,1875) \cdot F(-2,19140625) < 0 \Rightarrow$$

$$P_9 = \frac{-2,19140625-2,1875}{2} = \frac{-4,37890625}{2} = -2,189453125 \quad \text{Luego}$$

$$F(-2,19140625) \cdot F(-2,189453125) < 0 \Rightarrow$$

$$P_{10} = \frac{-2,19140625-2,189453125}{2} = -2,190429688 \quad \text{Luego}$$

$$F(-2,19140625) \cdot F(-2,190429688) < 0 \Rightarrow$$

$$P_{11} = \frac{-2,19140625-2,190429688}{2} = -2,190917969 \quad \text{Luego}$$

$$F(-2,19140625) \cdot F(-2,190917969) < 0 \Rightarrow$$

$$P_{12} = \frac{-2,19140625-2,190917969}{2} = -2,191162109 \quad \text{Luego}$$

$$F(-2,19140625) \cdot F(-2,191162109) < 0 \Rightarrow$$

$$P_{13} = \frac{-2,19140625-2,191162109}{2} = -2,19128418$$

Resultando una aproximación muy cercana a las raíces de la función

Ejemplo 4

Para ilustrar el algoritmo de bisección, considérese el siguiente ejemplo.

En este caso se termina la iteración cuando

$$\frac{|p_{n-1} - p_n|}{|p_n|} < 10^{-4}$$

La función $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ tiene una raíz en $[1, 2]$ ya que $f(1) = (1)^3 + 4(1)^2 - 10 = 1 + 4 - 10 = -5$ y $f(2) = (2)^3 + 4(2)^2 - 10 = 8 + 16 - 10 = 14$. Es fácil ver que hay una sola raíz en $[1; 2]$. El algoritmo de bisección da los valores de la tabla 1.

Después de 13 iteraciones, podemos ver que $p_{13} = 1,365112305$ aproxima a la raíz p con un error de

$$\begin{aligned} |p - p_{13}| &< |b_{14} - a_{14}| = |1,365234375 - 1,365112305| \\ &= 0,000122070 \text{ y como } |a_{14}| < |p|, \\ \frac{|p - p_{13}|}{|p|} &< \frac{|b_{14} - a_{14}|}{|a_{14}|} \leq 9,0 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

La aproximación es correcta al menos con cuatro cifras significativas. El valor correcto de p , con nueve cifras decimales, es $p = 1,365230013$.

Es interesante notar que p_9 está más cerca de p que la aproximación final p_{13} , pero no hay manera de determinar esto a menos que se conozca la respuesta correcta.

Tabla 1

n	a_n	b_n	p_n	$f(p_n)$	$\frac{ p_n - p_{n-1} }{ p_n }$
1	1,0	2,0	1,5	2,375	0.2
2	1,0	1,5	1,25	-1,796875	
3	1,25	1,5	1,375	0,16211	0,090909
4	1,25	1,375	1,3125	- 0,84839	0,047619
5	1,3125	1,375	1,34375	-0,35098	0,023256
6	1,34375	1,375	1,359375	-0,09641	0,011494
7	1,359375	1,375	1,3671875	0,03236	0,0057143
8	1,359375	1,3671875	1,36328125	-0,03215	0,0028653
9	1,36328125	1,3671875	1,365234375	0,00007	0,0014306
10	1,36328125	1,365234375	1,364257813	-0,01605	0,00071582

11	1,364257813	1,365234375	1,364746094	-0,00799	0,00035778
12	1,364746094	1,365234375	1,364990234	-0,00396	0,00017886
13	1,364990234	1,365234375	1,365112305	-0,00194	0,000089422

El algoritmo de bisección, aunque conceptualmente claro, tiene inconvenientes importantes. Converge muy lentamente (o sea, N puede ser muy grande antes que $|p - p_N|$ sea suficientemente pequeño) y, más aun, una buena aproximación intermedia puede ser desechada sin que nos demos cuenta. Sin embargo, el método tiene la propiedad importante de que converge siempre a una solución y, por esta razón se usa frecuentemente para “poner en marcha” a los métodos más eficientes que se presentaran más adelante.

Iteración del punto fijo

Un punto fijo de una función g es un número p para el cual $g(p) = p$. Los problemas de búsqueda de raíces y los de punto fijo son clases equivalentes en el siguiente sentido:

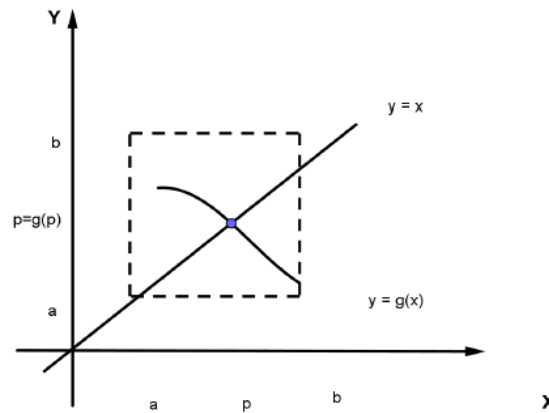
Dado un problema de buscar una raíz $f(p) = 0$, podemos definir una función g con un punto fijo en p de diversas formas; por ejemplo, como $g(x) = x - f(x)$ o como $g(x) = x + 3f(x)$. Por el contrario, si la función g tiene un punto fijo en p , entonces la función definida por

$$f(x) = x - g(x) \text{ tiene un cero en } p.$$

El siguiente teorema contiene suficientes condiciones para la existencia y unicidad del punto fijo:

Si $g \in C[a, b]$ y $g(x) \in [a, b]$, para todo $x \in [a, b]$, entonces g tiene un punto fijo en $[a, b]$.

Y si además $g'(x)$ existe en (a, b) y existe una constante positiva $k < 1$ con $|g'(x)| \leq k$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces el punto fijo en $[a, b]$ es único.



Ejemplo 1

Dada la siguiente función $f(x) = x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ aplique el método iteración del punto fijo para encontrar una solución en el intervalo $(1; 2)$ dado $p_0 = 1$.

Primero tenemos que $x = g_1(x) = x^4 - 3x^2 + x - 3$ reemplazando obtenemos que

$$g_1(p_0) = g_1(1) = (1)^4 - 3(1)^2 + (1) - 3 = 1 - 3 + 1 - 3 = -4 = p_1 \text{ y}$$

$$g_1(p_1) = g_1(-4) = (-4)^4 - 3(-4)^2 + (-4) - 3 = 256 - 48 - 4 - 3 = -201 = p_2$$

Lo cual nos da un número muy alto que se aleja de la aproximación buscada

Veamos otra forma de reescribir la función original:

$$\text{Como } x^4 - 3x^2 - 3 = 0 \text{ entonces } x^2(x^2 - 3) - 3 = 0 \text{ y } x^2 = \frac{3}{(x^2 - 3)}$$

finalmente

$$x = g_2(x) = \pm \sqrt{\frac{3}{(x^2 - 3)}} \text{ ahora } g_2(p_0) = \pm \sqrt{\frac{3}{(1^2 - 3)}} = \pm \sqrt{-\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{3}{2}}i = p_1$$

La cual no resulta complejo y nos aleja de la aproximación real que buscábamos.

Veamos otra forma de reescribir la función original:

Como $x^4 - 3x^2 - 3 = 0$ entonces $x^4 = 3x^2 + 3$ y $x^4 = 3x^2 + 3$ finalmente

$$x = g_3(x) = \sqrt[4]{3x^2 + 3}$$

$$\text{Ahora } g_3(p_0) = g_3(1) = \sqrt[4]{3(1)^2 + 3} = \sqrt[4]{6} = 1,56508458 = p_1$$

$$\text{Ahora } g_3(p_1) = g_3(1,56508458) = \sqrt[4]{3(1,56508458)^2 + 3}$$

$$g_3(p_1) = \sqrt[4]{10,34846923} = 1,793572879 = p_2$$

$$\text{Ahora } g_3(p_2) = g_3(1,793572879) = \sqrt[4]{3(1,793572879)^2 + 3}$$

$$g_3(p_2) = \sqrt[4]{12,65071101} = 1,885943743 = p_3$$

$$\text{Ahora } g_3(p_3) = g_3(1,885943743) = \sqrt[4]{3(1,885943743)^2 + 3}$$

$$g_3(p_3) = \sqrt[4]{13,67035141} = 1,922847844 = p_4$$

La cual se aproxima a una raíz de la función.

Ejemplo 2

Determinar aproximadamente cuantas iteraciones son necesarias para resolver

$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$ con una precisión de " $\varepsilon = 10^{-5}$ " para $a_1 = 1$ y $b_1 = 2$. Esto requiere encontrar un entero N que satisfaga:

$$|P_N - P| \leq 2^{-N} \Rightarrow (b - a) = 2^{-N} \leq 10^{-5}$$

Para determinar N usamos logaritmos. Aunque sería suficiente usar logaritmos de cualquier base, usaremos logaritmos de base 10 pues la tolerancia está dada como una potencia de 10. Ya que $2^{-N} \leq 10^{-5}$ implica que

$$\log_{10}(2^{-N}) \leq \log_{10}(10^{-5}) = -5,$$

$$-N \log_{10}(2) \leq -5 \Rightarrow N \geq \frac{5}{\log_{10} 2} \approx 16,6$$

Parecería que se requieren 17 iteraciones para obtener una aproximación exacta a 10^{-5} . Con " $\varepsilon = 10^{-5}$ ", se requieren $N \geq 10$

iteraciones y el valor de $p_9 = 1,365234275$ es exacto dentro de 10^{-5} . Es importante notar que estas técnicas dan solamente una cota para el número de iteraciones necesarias, y en muchos casos esta cota es mucho mas grande que el número realmente requerido.

Ejemplo 3.

Sea $g(x) = \frac{x^2-1}{3}$ en el intervalo $[-1; 1]$. Usando el Teorema del Valor Extremo es fácil demostrar que el mínimo absoluto de g está en $x = 0$ y es $g(0) = -\frac{1}{3}$. Similarmente el máximo absoluto de g ocurre en $x = \pm 1$ y tiene el valor $g(\pm 1) = 0$. Además, g es continua y

$$|g'(x)| = \left| \frac{2x}{3} \right| \leq \frac{2}{3} \text{ para todo } x \in [-1, 1],$$

Así que g satisface las hipótesis del Teorema VII.1 y tiene un único punto fijo en $[-1, 1]$. En

Este ejemplo, el único punto fijo p en el intervalo $[-1, 1]$ puede determinarse exactamente.

Si

$$p = g(x) = \frac{p^2 - 1}{3}$$

Entonces: $p^2 - 3p - 1 = 0$, lo cual implica que $p = \frac{3-\sqrt{13}}{2}$. Nótese que g también tiene un punto fijo único $p = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$ en el intervalo $[3, 4]$. Sin embargo, $g(4) = 5$ y $g'(4) = \frac{8}{3} > 1$; así que g no satisface las hipótesis del Teorema VII.1. Esto muestra que las hipótesis del Teorema VII.1 son suficientes para garantizar un punto fijo único, pero no son necesarias.

Ejemplo 4.

Sea $g(x) = 3^{-x}$. Como $g'(x) = -3^{-x} \ln 3 < 0$ en $[0, 1]$, la función g es decreciente en $[0, 1]$. Entonces, $g(1) = 3^{-1} = \frac{1}{3} \leq g(x) \leq 1 = g(0)$ para $0 \leq x \leq 1$. Por lo tanto, para $x \in [0, 1]$, $g(x) \in [0, 1]$. Esto implica que g tiene un punto fijo en $[0, 1]$. Como

$$g'(0) = -\ln 3 = -1,098612289;$$

En $[0, 1]$ y el Teorema VII.1 no puede ser usado para determinar la unicidad.

Sin embargo, g es decreciente, así que está claro que el punto fijo debe ser único.

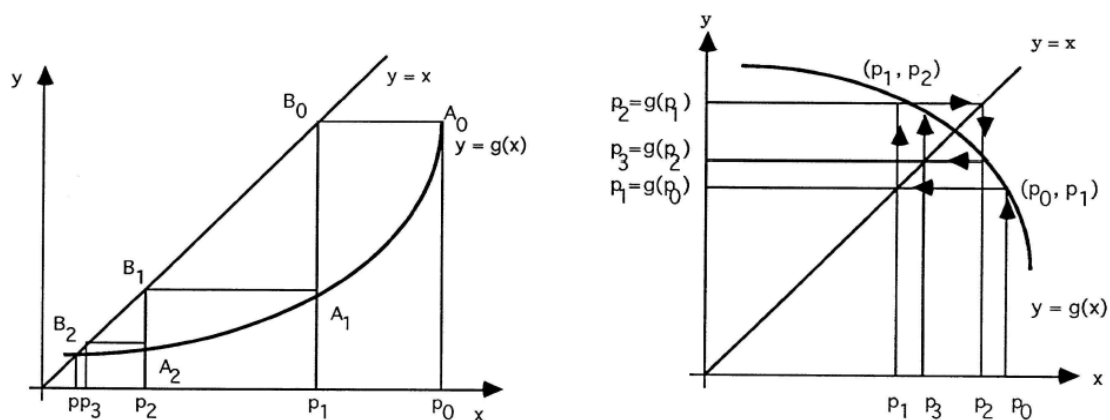
Geométricamente, el método de iteración puede explicarse de la siguiente manera: dibújese sobre un plano xy las gráficas de las funciones $y = x$ e $y = g(x)$. Cada raíz real p de la ecuación $x = g(x)$ es la abscisa del punto de intersección M de la curva $y = g(x)$ con la línea recta $y = x$ (ver figuras 1 y 2).

Comenzando a partir de un punto $A_0(p_0, g(p_0))$, construyamos la línea poligonal $A_0 B_0 A_1 B_1 \dots$ (Escalera), cuyos segmentos son alternativamente paralelos al eje x y al eje y , los vértices $A_0, A_1, A_2, \dots$ caen sobre la curva $y = g(x)$, y los vértices $B_0, B_1, B_2, B_3, \dots$ caen sobre la línea recta $y = x$. Las abscisas comunes de los puntos A_1 y B_0 , y A_2 y B_1 , ..., evidentemente serán las aproximaciones sucesivas $p_1, p_2, \dots$ a la raíz p . También es posible tener una línea poligonal diferente $A_0 B_0 A_1 B_1 \dots$ (espiral).

Evidentemente se tiene la solución escalera si la derivada $g'(x)$ es positiva, y la solución espiral si $g'(x)$ es negativa.

Figura 1

Figura 2



En las figuras anteriores, la curva $y = g(x)$ se "inclina" en la vecindad de la raíz p , es decir, $|g'(x)| < 1$ y el proceso de iteración converge. No obstante, si consideramos el caso en que $|g'(x)| > 1$, entonces el proceso de iteración puede ser divergente. Por consiguiente, para aplicar de una manera practica el método de iteración del punto fijo, hemos de asegurarnos de que se cumplen las condiciones de suficiencia de convergencia del proceso de iteración.

Ejemplo 5.

La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene una sola raíz en $[1, 2]$. Existen muchas maneras de cambiar la ecuación a la forma $x = g(x)$, efectuando manipulaciones algebraicas simples. Debe verificarse que el punto fijo de la función $g(x)$ es en realidad una solución de la ecuación original.

$$(a) \quad x = g_1(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$$

$$(b) \quad x = g_2(x) = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(c) \quad x = g_3(x) = \frac{1}{2} (10 - x^3)^{\frac{1}{2}}$$

$$(d) \quad x = g_4(x) = \left(\frac{10}{4+x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$(e) \quad x = g_1(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$$

Tabla 1

n	p _n (a)	p _n (b)	p _n (c)	p _n (d)	p _n (e)
0	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
1	-0,875	0,8165	1,286953768	1,348399725	1,373333333
2	6,732	2,9969	1,402540804	1,367376372	1,365262015
3	-469,7	$(-8,65)^{\frac{1}{2}}$	1,345458374	1,364957015	1,365230014
4	$1,03 \times 10^8$		1,375170253	1,365264748	1,365230013
5			1,360094193	1,365225594	
6			1,367846968	1,365230576	
7			1,363887004	1,365229942	
8			1,365916733	1,365230023	
9			1,364878217	1,365230012	
10			1,365410061	1,365230014	
15			1,365223680	1,365230013	
20			1,365230236		
25			1,365230006		
30			1,365230014		

Como se obtienen estos valores. Consideremos la primera expresión:

$$(a) \quad x = g_1(x) = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x}$$

$$p_0 = 1,5 \Rightarrow g_1(p_0) = g_1(1,5) = 1,5 - (1,5)^3 - 4(1,5)^2 + 10 = -0,875 = p_1$$

$$p_1 = -0,875 \Rightarrow$$

$$g_1(p_1) = g_1(-0,875) = -0,875 - (-0,875)^3 - 4(-0,875)^2 + 10 \\ = 6,732421875 = p_2$$

$$p_2 = 6,732 \Rightarrow$$

$$g_1(p_2) = g_1(6,732) = 6,732 - (6,732)^3 - 4(6,732)^2 + 10 \\ = -469,720012 = p_3$$

$$p_3 = -469,72 \Rightarrow$$

$$g_1(p_3) = g_1(-469,72) = -469,72 - (-469,72)^3 - 4(-469,72)^2 + 10 \\ = 1,028 \times 10^8 = p_4$$

Los siguientes son muy elevado negativo y positivo

$$p_4 = -1,085 \times 10^{24} \text{ y } p_5 = 1,277 \times 10^{72}$$

Con $p_0 = 1,5$, la tabla 1 muestra los resultados del método de iteración de punto fijo para las cinco alternativas para g .

La raíz real es 1,365230013.

Comparando los resultados con el algoritmo de bisección dado en aquel ejemplo, se puede ver que se han obtenido excelentes resultados para los casos (c), (d) y (e), mientras que con la técnica de bisección se necesitan 27 iteraciones para lograr esta precisión. Es interesante notar que la elección (a) produce divergencia y (b) se vuelve indefinida debido a que lleva a la raíz cuadrada de un número negativo.

Este ejemplo ilustra la necesidad de un procedimiento que garantice que la función g converja a una solución de $x = g(x)$ y que escoja también a g de tal manera que haga la convergencia tan rápida como sea posible. El Teorema siguiente es el primer paso para determinar este procedimiento.

Ejemplo:

La función $g(x) = x^2 - 2$, para $-2 \leq x \leq 3$, tiene punto fijo en $x = -1$ y en $x = 2$, ya que

$$g(-1) = (-1)^2 - 2 = 1 - 2 = -1 = x \quad g(2) = (2)^2 - 2 = 4 - 2 = 2 = x$$

Realice la graficas $g(x) = x^2 - 2$ y $f(x) = x$ y observa que se cortan en los puntos señalados. $A(-1, -1); B(2, 2)$

Método de la falsa posición.

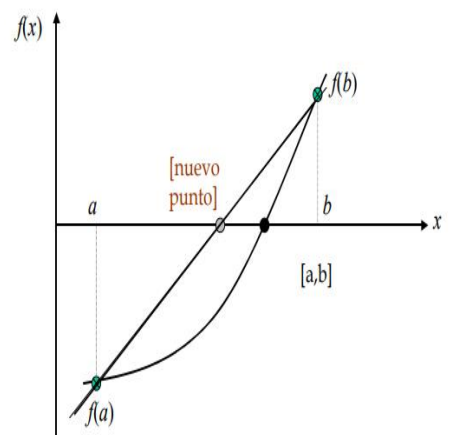
Este método se desarrolla para mejorar las características de convergencia del método de bisección. Inicia con los valores limitantes $[a, b]$, ósea, obtenemos $f(a)$ y $f(b)$, con el fin de determinar si $f(x)$ cambia de signo en dicho intervalo.

Como $f(a)$ y $f(b)$ tiene signos contrarios. Mediante la interpolación lineal encontramos una raíz aproximada entre x_a y x_b que sirve como valores intermedio $x_{intermedio}$. Determinamos el nuevo intervalo que contiene la raíz, realizando los valores de la función en los dos nuevos intervalos $[a, x_{intermedio}]$ y $[x_{intermedio}, b]$ con el fin de ver en cual se cumple el cambio de signo de la función. El razonamiento que se sigue es similar al usado en el método de bisección.

Algoritmo a seguir:

- 1.- Se selecciona un intervalo $[a, b]$ donde se halla la raíz (cero) de la función ya que $f(a) \cdot f(b) < 0$.
- 2.- Calcular un punto intersección como nuevo punto, aplicando la formula
$$\frac{f(a)}{m-a} = \frac{f(b)}{m-b} \Rightarrow m = b - \frac{f(b)(a-b)}{f(a)-f(b)}$$
- 3.- Comprobamos si hay cambio de signo en los nuevos intervalos $[a, m]$ o $[m, b]$. comprobando cual se cumple $f(a) \cdot f(m) < 0$ ó $f(m) \cdot f(b) < 0$
- 4.- Si el producto es cero, entonces "m" es una raíz. Si no es cero se regresa al 2 paso.

Ejemplo



Para el polinomio $p(x) = -x^3 + 6x^2 + 4x - 24$. Para el intervalo $[0, 3]$, determine donde hay un cero usando el método de falsa posición.

Determinamos $p(a) = p(0) = -(0)^3 + 6(0)^2 + 4(0) - 24 = -24 < 0$

$p(b) = p(3) = -(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) - 24 = -27 + 54 + 12 - 24 = 15 > 0$

$$m = b - \frac{f(b)(a - b)}{f(a) - f(b)} = 3 - \frac{(15) \cdot (0 - 3)}{(-24 - 15)} = 3 - \frac{(-45)}{(-39)} = 1,846154$$

$$p(m) = p(1,846154)$$

$$= -(1,846154)^3 + 6(1,846154)^2 + 4(1,846154) - 24 = -2,457895$$

Iteracion	a	b	P(a)	P(b)	m	P(m)
1	0	3	-24	15	1,846154	-2,457895
2	0	1,846154	-24	-2,457895	2,056795	0,908537
3	1,846154	2,056795	-2,457895	0,908537	1,999947	-0,000848
4	1,846154	1,999947	-2,457895	-0,000848	2	0

Por lo tanto $m = x = 2$ es una raíz.

Auto evaluación:

1. Determina la Raíz por el método de Bisección y con un error menor que 10^{-5} , de la función $f(x) = x^3 - x^2 - 3$ en el intervalo $[1, 2]$
2. Dada las siguientes funciones, aplique el método Iteración del punto fijo para encontrar una solución en el intervalo señalado
 - a) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ en $(2; 3)$ dado $p_0 = 2$.
 - b) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x - 18 = 0$ en $[2; 3]$ dado $p_0 = 2$.
3. De la siguiente ecuación:

$$f(x) = x^3 - 2x - 1$$

Despejando para obtener las ecuaciones de la forma: $x = g(x)$. Calcule la raíz por el método de punto fijo, tomando en cuenta el criterio $\left| \frac{d(g(x))}{dx} \right| < 1$ y el valor inicial $x_0 = 1$, determinar si la ecuación converge a una raíz de $f(x)$.

4. Mediante el algoritmo de la bisección y con un error menor que 10^{-5} , calcular una solución aproximada de

a) $f(x) = x - 3^{-x}$ b) $f(x) = x^3 - x^2 - 3, x \in [1, 2]$

5. Realice el ejercicio anterior aplicando el método de falsa posición

Unidad 3

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sistema de ecuaciones, donde cada ecuación sus variables son de primer grado, definidas sobre un cuerpo. Por ejemplo:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

El problema consiste en hallar los de las variables x_1 , x_2 y x_3 que satisfacen las tres ecuaciones.

Los sistemas lineales de ecuaciones son conocido desde hace muchos años o centurias (en matemática antiguos) y tiene una mucha aplicaciones, como en Análisis de señales, construcción de puentes, análisis de economía entre otras.

En general, un sistema con “m” ecuaciones lineales y “n” variable o incógnitas puede ser escrito en forma normal como:

$$\begin{cases} 2X + Y - Z = 8 \\ -3X - Y + 2Z = -11 \\ -2X + Y + 2Z = -3 \end{cases}$$

Donde X, Y, Z son las incógnitas, los números ubicados delante de ellas son los coeficientes del sistema y soluciones son los términos independientes.

Es posible reescribir el sistema separando los coeficientes con notación matricial:

$$[\text{Matriz de cofactores}] \cdot [\text{Matriz de variables}] = [\text{Matriz Solucion}]$$

En nuestro caso nos resulta

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -11 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Si representamos cada matriz con una única letra obtenemos:

$$[A] \cdot [V] = [S]$$

Donde **A** es una Matriz m por n , **V** es un vector columna de longitud n y **S** es otro vector columna de longitud m . El sistema de Eliminación de Gauss – Jordán se aplica a este tipo de sistemas, sea cual sea el cuerpo del que provengan los coeficientes. La matriz **A** se llama **matriz de coeficientes** de este sistema lineal. La matriz **b** se le llama vector de términos independientes del sistema y la matriz **V** se le llama vector de incógnitas.

Sistemas lineales reales

Analicemos las propiedades de los sistemas de ecuaciones lineales sobre el cuerpo n -espacio, es decir, los sistemas lineales en los cuales los coeficientes de las ecuaciones son números reales.

Representación gráfica

Por geometría euclidiana se conoce, que la intersección de dos planos que no son paralelos resulta en una recta.

Un sistema con “**n**” incógnitas se puede representar en el n -espacio correspondiente.

En los sistemas con 2 incógnitas, el universo de nuestro sistema será el plano bidimensional, donde cada una de las ecuaciones será representada por una recta. La solución será el punto (lugar) donde se intersecan todas las rectas que representan a las ecuaciones. Si no existe ningún punto en el que se intersecan al mismo tiempo todas las líneas, el sistema es incompatible, o lo que es lo mismo, no tiene solución.

En el caso de un sistema con 3 incógnitas, el universo será el espacio tridimensional, siendo cada ecuación un plano dentro del mismo. Si todos los planos intersecan en un único punto, las coordenadas de este serán la solución al sistema. Si, por el contrario, la intersección de todos ellos es una recta o incluso un plano, el sistema tendrá infinitas soluciones, que serán las coordenadas de los puntos que forman dicha línea o superficie.

Para sistemas de 4 o más incógnitas, la representación gráfica no existe, por lo que dichos problemas no se enfocan desde esta óptica.

Tipos de sistemas lineales

$$\text{Sistema} \begin{cases} \text{Compatible} \begin{cases} \text{Determinado} \\ \text{Indeterminado} \end{cases} \\ \text{Incompatible} \end{cases}$$

Los sistemas de ecuaciones se pueden clasificar según el número de soluciones que pueden presentar. De acuerdo con ese caso se pueden presentar los siguientes casos:

- ❖ **Sistema compatible** : posee solución, además puede ser:
- ❖ **Sistema compatible determinado** si posee solución única.
- ❖ **Sistema compatible indeterminado** si posee infinitas soluciones.
- ❖ **Sistema incompatible** si no tiene solución.

Clasificación de sistemas lineales:

Los sistemas incompatibles geoméricamente se caracterizan por hiperplanos o rectas que se cruzan sin cortarse. Los sistemas compatibles determinados se caracterizan por un conjunto de (hiper)planos o rectas que se cortan en un único punto.

Los sistemas compatibles indeterminados se caracterizan por hiperplanos que se cortan a lo largo de una recta [o más generalmente un hiperplano de dimensión menor].

Desde un punto de vista algebraico los sistemas compatibles determinados se caracterizan porque el determinante de la matriz es diferente de cero:

Un sistema compatible determinado $\longleftrightarrow \det(A) \neq 0$

Algoritmo para determinar si un sistema es compatible

Podemos determinar si un sistema es o no compatible mediante el Teorema de Rouché – Frobenius, el cual establece que un sistema de ecuaciones lineales es compatible solo si el rango de su matriz ampliada coincide con el de su matriz de coeficientes. Supongamos que el sistema es compatible. Si el valor común de los rangos de las matrices coincide con el número de variables, el sistema es **compatible determinado**; en caso contrario, es **compatible indeterminado**.

Sistemas compatibles indeterminados

Un sistema sobre un cuerpo K es **compatible indeterminado** cuando posee un número infinito de soluciones. Por ejemplo, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

Tanto la primera como la segunda ecuación se corresponden con la recta cuya pendiente es -0,5 y que pasa por el punto (-1, 1), por lo que ambas coinciden en todos los puntos de dicha recta. El sistema es compatible por tener solución o puntos comunes entre las rectas, pero es indeterminado al ocurrir esto en infinitos puntos.

- ❖ En este tipo de sistemas, la solución genérica consiste en expresar una o más variables como función matemática del resto. En los sistemas lineales compatibles indeterminados, al menos una de sus

ecuaciones se puede hallar como combinación lineal del resto, es decir, es linealmente dependiente.

- ❖ La condición necesaria para que un sistema sea compatible indeterminado es que el determinante de la matriz del sistema sea cero, al igual que el rango de la matriz ampliada sea menor al número de incógnitas (y por tanto uno de sus autovalores será 0):

Un sistema compatible indeterminado $\Rightarrow \det(A) = 0$

- ❖ De hecho, de las dos condiciones anteriores se desprende, que el conjunto de soluciones de un sistema compatible indeterminado es un subespacio vectorial. Y la dimensión de ese espacio vectorial coincidirá con la multiplicidad geométrica del autovalor cero.

Sistemas incompatibles

De un sistema se dice que es **incompatible** cuando no presenta ninguna solución. Por ejemplo, supongamos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 4y = 1236 \end{cases}$$

Las ecuaciones se corresponden gráficamente con dos rectas, ambas con la misma pendiente, Al ser paralelas, no se cortan en ningún punto, es decir, no existe ningún valor que satisfaga a la vez ambas ecuaciones.

Matemáticamente un sistema de estos es incompatible cuando el rango de la matriz del sistema es inferior al rango de la matriz ampliada. Una condición necesaria para que esto suceda es que el determinante de la matriz del sistema sea cero:

Un sistema incompatible $\Rightarrow \det(A) = 0$

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Sustitución

El método de sustitución consiste en despejar en una de las ecuaciones con cualquier incógnita, preferiblemente la que tenga menor coeficiente y a continuación sustituirla en otra ecuación por su valor.

En caso de sistemas con más de dos incógnitas, la seleccionada debe ser sustituida por su valor equivalente en todas las ecuaciones excepto en la que la hemos despejado. En ese instante, tendremos un sistema con una ecuación y una incógnita menos que el inicial, en el que podemos seguir aplicando este método reiteradamente. Por ejemplo, supongamos que queremos resolver por sustitución este sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 22 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$$

En la primera ecuación, seleccionamos la incógnita y por ser la de menor coeficiente y que posiblemente nos facilite más las operaciones, y la despejamos, obteniendo la siguiente ecuación.

$$3x + y = 22 \Rightarrow y = 22 - 3x$$

El siguiente paso será sustituir cada ocurrencia de la incógnita y en la otra ecuación, para así obtener una ecuación donde la única incógnita sea la x .

$$\begin{aligned} 4x - 3y &= -1 \Rightarrow 4x - 3(22 - 3x) = -1 \Rightarrow 4x - 66 + 9x = -1 \\ &\Rightarrow 13x = -1 + 66 \Rightarrow x = \frac{65}{13} \Rightarrow x = 5 \end{aligned}$$

Al resolver la ecuación obtenemos el resultado $x = 5$ y si ahora sustituimos esta incógnita por su valor en alguna de las ecuaciones originales obtendremos

$$y = 22 - 3(5) \Rightarrow y = 22 - 15 \Rightarrow y = 7, \text{ sistema resuelto.}$$

Igualación

El método de igualación se puede entender como un caso particular del método de sustitución en el que se despeja la misma incógnita en dos ecuaciones y a continuación se igualan entre sí la parte derecha de ambas ecuaciones.

Tomando el mismo sistema utilizado como ejemplo para el método de sustitución, si despejamos la incógnita y en ambas ecuaciones nos queda de la siguiente manera:

$$\begin{cases} 3x + y = 22 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 22 - 3x \\ y = \frac{4x+1}{3} \end{cases}$$

Como se puede observar, ambas ecuaciones comparten la misma parte izquierda, por lo que podemos afirmar que las partes derechas también son iguales entre sí.

$$22 - 3x = \frac{4x + 1}{3} \Rightarrow 3(22 - 3x) = 4x + 1 \Rightarrow 66 - 9x = 4x + 1$$

$$66 - 1 = 4x + 9x \Rightarrow 13x = 65 \Rightarrow x = \frac{65}{13} \Rightarrow x = 5$$

Una vez obtenido el valor de la incógnita x , se sustituye su valor en una de las ecuaciones originales, y se obtiene el valor de la y .

$$y = 22 - 3x \Rightarrow y = 22 - 3(5) \Rightarrow y = 22 - 15 \Rightarrow y = 7$$

La forma más fácil de tener el método de sustitución es realizando un cambio para despejar x después de averiguar el valor de la y .

Reducción

Este método suele emplearse mayoritariamente en los sistemas lineales, siendo pocos los casos en que se utiliza para resolver sistemas no lineales. El procedimiento, diseñado para sistemas con dos ecuaciones e

incógnitas, consiste en transformar una de las ecuaciones (generalmente, mediante productos), de manera que obtengamos dos ecuaciones en la que una misma incógnita aparezca con el mismo coeficiente y signo diferentes. Luego, se suman ambas ecuaciones produciéndose así la reducción o cancelación de dicha incógnita, obteniendo así una ecuación con una sola incógnita, donde el método de resolución es simple.

Por ejemplo, en el sistema:

$$\begin{cases} 3x + y = 22 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$$

No tenemos más que multiplicar la primera ecuación por 3 para poder cancelar la incógnita **y**- Al multiplicar, dicha ecuación nos queda así:

$$3 \begin{cases} 3x + y = 22 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x + 3y = 66 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases} \Rightarrow 13x = 65 \Rightarrow x = \frac{65}{13} \Rightarrow x = 5$$

Si sumamos esta ecuación a la segunda del sistema original, obtenemos una nueva ecuación donde la incógnita **y** ha sido reducida, en este caso, nos da directamente el valor de la incógnita **X**:

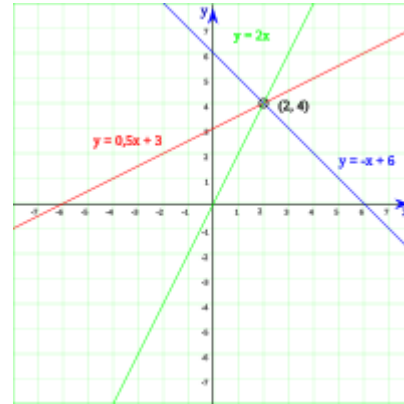
El siguiente paso consiste únicamente en sustituir el valor de la incógnita **x** en cualquiera de las ecuaciones donde aparecían ambas incógnitas, obtenemos así que el valor de **y** si sustituimos en la primera ecuación es igual a:

$$3x + y = 22 \Rightarrow y = 22 - 3(5) \Rightarrow y = 22 - 15 \Rightarrow y = 7$$

Método gráfico

Consiste en construir la gráfica de cada una de las ecuaciones del sistema. El método solo resulta eficiente en el plano cartesiano, es decir para un espacio de dimensión dos.

El proceso de resolución de un sistema de ecuaciones mediante el método gráfico se resuelve en los siguientes pasos:



Rectas que pasan por el punto: (2,4)

- 1- Se Despeja la incógnita en ambas ecuaciones ($y = f(x)$).
 - 2- Se construye para cada una de las dos ecuaciones de primer grado obteniendo la tabla de valores correspondientes.
 - 3- Se representan gráficamente ambas rectas en los ejes coordenados.
- En este último paso hay tres posibilidades:
- a. Si ambas rectas se cortan, las coordenadas del punto de corte son los únicos valores de las incógnitas (x, y). "Sistema compatible determinado".
 - b. Si ambas rectas son coincidentes, el sistema tiene infinitas soluciones que son las respectivas coordenadas de todos los puntos de esa recta en la que coinciden ambas. «Sistema compatible indeterminado».
 - c. Si ambas rectas son paralelas, el sistema no tiene solución en los reales pero sí en los complejos.

Método de Gauss

El método de eliminación de Gauss o simplemente método de Gauss consiste en convertir un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas, en uno escalonado, en el que la primera ecuación tiene n incógnitas, la segunda ecuación tiene $n - 1$ incógnitas, ..., hasta la última ecuación, que tiene 1 incógnita. De esta forma, será fácil partir de la última ecuación e ir subiendo para calcular el valor de las demás incógnitas.

Método de eliminación de Gauss – Jordán.

Una variante de este método, denominada **Eliminación de Gauss-Jordán**, es un método aplicable únicamente a los sistemas lineales de ecuaciones, y consistente en triangular la matriz aumentada del sistema mediante transformaciones elementales, hasta obtener ecuaciones de una sola incógnita, cuyo valor será igual al coeficiente situado en la misma fila de la matriz. Este procedimiento es similar al anterior de reducción, pero ejecutado de manera reiterada y siguiendo un cierto orden algorítmico.

Regla de Cramer

La regla de Cramer da una solución para sistemas compatibles determinados en términos de determinantes y adjuntos dada por:

$$x_j = \frac{\det(A_j)}{\det(A)}$$

Donde A_j es la matriz resultante de reemplazar la j -ésima columna de A por el vector columna $\mathbf{b}$. Para un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\begin{cases} \mathbf{ax} + \mathbf{by} = \mathbf{e} \\ \mathbf{cx} + \mathbf{dy} = \mathbf{f} \end{cases}$$

La regla de Cramer da la siguiente solución:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{e} & \mathbf{b} \\ \mathbf{f} & \mathbf{d} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix}} = \frac{\mathbf{ed} - \mathbf{bf}}{\mathbf{ad} - \mathbf{bc}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{e} \\ \mathbf{c} & \mathbf{f} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{vmatrix}} = \frac{\mathbf{af} - \mathbf{ec}}{\mathbf{ad} - \mathbf{bc}}$$

Nota: Cuando en la determinante original $\det(A)$ el resultado es 0, el sistema indica múltiples o sin coincidencia.

Auto evaluación.

1. Resuelva los siguientes sistemas por los métodos: a) Grafico; b) Reducción; c) igualación; d) Sustitución; e) Gauss

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} x + 3y = 4 \\ x - 6y = -5 \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} 2x - 6z = -2 \\ x + 2z = 3 \end{cases} \\ \text{c)} \quad \begin{cases} 2x + 3y - 6z = 14 \\ x - 2y - 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = -2 \end{cases} & \text{d)} \quad \begin{cases} 2x + 3y - 6z = 1 \\ x - 6y + 8z = 1 \\ 3x - 2y + z = 1 \end{cases} \end{array}$$

2.- En cada uno de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, verificar si son determinados o indeterminados.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \quad \begin{cases} x - 9y + 5z = 33 \\ x + 3y - z = -9 \\ x - y + z = \end{cases} & \text{b)} \quad \begin{cases} 2x - 3y + 5z = 50 \\ 3x + 2y - z = 0 \\ x - y - z = 5 \end{cases} \end{array}$$

Unidad 4

PROGRAMACIÓN DEL MÉTODO DE GAUSS – JORDÁN

Algoritmos numéricos de Gauss – Jordán

La eliminación de Gauss – Jordán es un algoritmo numérico usado para una gran cantidad de casos específicos, aunque posteriormente se han desarrollado algoritmos alternativos mucho más eficientes. La mayoría de estos algoritmos mejorados tienen una complejidad computacional de $O(n^2)$ (donde n es el número de ecuaciones del sistema). Algunos de los métodos más usados son:

- ❖ Para los problemas de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es una matriz de Toeplitz simétrica, se puede utilizar la recursión de Levinson o alguno de los métodos derivados de este. Un método derivado de la recursión de Levinson es la recursión de Schur, que es ampliamente usado en el campo del procesamiento digital de señales..
- ❖ Para los problemas de la forma $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, donde A es una matriz singular o casi singular, la matriz A se descompone en el producto de tres matrices en un proceso llamado descomposición en valores singulares.

Cuando consideramos ecuaciones lineales cuyas soluciones son números racionales, reales o complejos o más generalmente un cuerpo $\mathbf{n}$, la solución puede encontrarse mediante Regla de Cramer. Para sistemas de muchas ecuaciones la regla de Cramer puede ser computacionalmente más costosa y suelen usarse otros métodos más "económicos" en número de operaciones como la eliminación de Gauss - Jordán y la descomposición de

Cholesky. Existen también métodos indirectos (basados en iteraciones) como el método de Gauss – Seidel.

Si el cuerpo es infinito (como es el caso de los números reales o complejos), entonces solo puede darse una de las tres siguientes situaciones:

- El sistema no tiene solución (en dicho caso se dice que el sistema está sobre determinado o que es incompatible)}
- El sistema tiene una única solución (el sistema es compatible determinado)
- El sistema tiene un número infinito de soluciones (el sistema es compatible indeterminado).

La eliminación de Gauss – Jordán

Llamada así en honor de Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordán, es un algoritmo utilizado para hallar la inversa de una matriz y las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales.

Un sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Gauss cuando se obtienen sus soluciones mediante la reducción del sistema dado a otro equivalente en el que cada ecuación posee una incógnita menos que la anterior. El método de Gauss transforma la matriz de coeficientes en una matriz triangular superior.

El método de Gauss - Jordán continúa el proceso de transformación hasta obtener una matriz diagonal.

Para realizar la reducción de filas en una matriz, se utiliza una secuencia de operaciones elementales de fila, modificando la matriz hasta que la esquina inferior izquierda de la matriz se llene de ceros, tanto como sea posible. Hay tres tipos de operaciones elementales de fila:

- Intercambiar dos filas.

- Multiplicar una fila por un número distinto de cero.
- Sumar un múltiplo de una fila a otra fila. (La resta puede realizarse multiplicando una fila por -1 y sumando el resultado a otra fila).

Utilizando estas operaciones, una matriz siempre se puede transformar en una matriz triangular superior, y de hecho en una que esté en forma escalonada. Una vez que todos los coeficientes principales (la entrada más a la izquierda distinta de cero en cada fila) son 1, y cada columna que contiene un coeficiente principal tiene ceros en otros lugares, se dice que la matriz está en forma escalonada reducida.

Esta forma final es única; en otras palabras, es independiente de la secuencia de operaciones de fila utilizadas. Por ejemplo, en la siguiente secuencia de operaciones de fila (donde dos operaciones elementales en filas diferentes se realizan en el primer y tercer paso), la tercera y cuarta matrices son las que están en forma escalonada, y la matriz final es la única forma escalonada reducida.

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 11 & 5 & 35 \end{array} \right] \begin{array}{l} -F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ -3F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \end{array} \text{conduce a} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 8 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ F_2 + F_3 \end{array} \\
 & \qquad \qquad \qquad \rightarrow F_2 \\
 & \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & -2 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ \frac{F_2}{-2} \rightarrow F_2 \end{array} \text{conduce a} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} \\ -3F_2 + F_1 \rightarrow F_1 \end{array} \\
 & \qquad \qquad \qquad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

El uso de operaciones de fila para convertir una matriz en forma escalonada reducida se denomina a veces **eliminación de Gauss – Jordán**. En este caso, el término *eliminación de Gauss* se refiere al proceso hasta que ha alcanzado su forma triangular superior, o forma escalonada (no reducida). Por razones computacionales, cuando se resuelven sistemas de

ecuaciones lineales, a veces es preferible detener las operaciones de fila antes de que la matriz esté completamente reducida.

Antecedentes

Algunos casos especiales del método (presentados más no demostración) ya eran conocidos por los matemáticos chinos en torno al año 179 AC. El método de eliminación de Gauss – Jordán aparece en el capítulo ocho del importante texto matemático chino “Jiuzhang suanshu” o *Los nueve capítulos sobre el arte matemático*. Su uso se ilustra en dieciocho problemas, de dos a cinco ecuaciones cada uno. La primera referencia al libro por este título data del 179 DC, pero algunas de sus partes fueron escritas alrededor del 150 AC., señalado por Liu Hui en el siglo III.

Definiciones y ejemplo de algoritmo

El proceso de reducción de filas hace uso de operaciones básica de filas, y se puede dividir en dos partes. La primera parte (llamada eliminación hacia adelante) reduce un sistema dado a la forma escalonada de filas, a partir de la cual se puede decir si no hay soluciones, una solución única, o infinitas soluciones. La segunda parte (llamada sustitución hacia atrás) continúa usando operaciones de fila hasta que se encuentra la solución; en otras palabras, pone la matriz en forma escalonada reducida.

Además, resulta muy útil para analizar el algoritmo, que la reducción de filas produce una descomposición matricial de la matriz original. Las operaciones elementales de fila pueden verse como la multiplicación a la izquierda de la matriz original por matrices elementales. Alternativamente, una secuencia de operaciones elementales que reduce una sola fila puede verse como la multiplicación por una matriz de Frobenius.

Entonces, la primera parte del algoritmo calcula una descomposición, mientras que la segunda parte escribe la matriz original como el producto de una matriz invertible determinada de forma única y una matriz escalonada de filas reducida determinada de forma única.

Operaciones de fila

Hay tres tipos de operaciones elementales de fila que se pueden realizar en las filas de una matriz ya indicados anteriormente:

1. Intercambiar las posiciones de dos filas.
2. Multiplicar una fila por un escalar distinto de cero.
3. Añadir a una fila un múltiplo escalar de otra.

Si la matriz está asociada a un sistema de ecuaciones lineales, entonces estas operaciones no cambian el conjunto solución. Por lo tanto, si el objetivo es resolver un sistema de ecuaciones lineales, el uso de estas operaciones de fila podría facilitar el problema.

Algoritmo de eliminación de Gauss y de Gauss-Jordán

1. Ir a la primera columna número cero de izquierda a derecha.
2. Si la primera fila tiene un cero en esta columna, intercambiarlo con otra que no lo tenga.
3. Luego, obtener ceros debajo de este elemento delantero, sumando múltiplos adecuados del renglón superior a los renglones debajo de él.
4. Cubrir el renglón superior y repetir el proceso anterior con la submatriz restante. Repetir con el resto de los renglones (en este punto la matriz se encuentra en forma escalonada).

5. Comenzando con el último renglón no cero, avanzar hacia arriba: para cada renglón obtener 1 delantero e introducir ceros arriba de este sumando múltiplos correspondientes a los renglones correspondientes.

Una variante interesante de la eliminación de Gauss es la que llamamos eliminación de Gauss – Jordán, (debido al mencionado Gauss y a Wilhelm Jordán), consiste en ir obteniendo los 1 delanteros durante los pasos uno al cuatro (llamados paso directo) así para cuando estos finalicen ya se obtendrá la matriz en forma escalonada reducida.

Ejemplo

Supongamos que deseamos hallar los números "x", "y", "z", que satisfacen simultáneamente estas ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Esto es un sistema de ecuaciones lineales. El objetivo es reducir el sistema a otro equivalente, que tenga las mismas soluciones. Las operaciones (llamadas elementales) son estas:

- Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo.
- Intercambiar de posición dos ecuaciones
- Sumar a una ecuación un múltiplo de otra.

Estas operaciones pueden representarse con matrices elementales que se usan también en otros procedimientos como la factorización o la diagonalización por congruencia de una matriz simétrica.

Podemos eliminar x de la segunda ecuación si sumando $3/2$ veces la primera ecuación a la segunda y después sumamos la primera ecuación a la tercera. El resultado es:

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1 \\ 2y + z = 5 \end{cases}$$

Ahora eliminamos y de la primera ecuación sumando -2 veces la segunda ecuación a la primera, y sumamos -4 veces la segunda ecuación a la tercera para eliminar y .

$$\begin{cases} 2x - 2z = 6 \\ \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = 1 \\ -z = 1 \end{cases}$$

Entonces podemos resolver por Gauss al sustituir en el sistema de ecuaciones el valor de z continuando con las incógnitas anteriores de abajo hacia arriba y de derecha a izquierda obteniendo el valor de todas las incógnitas. Si continuamos con la variante de Gauss – Jordán eliminamos z de la primera ecuación sumando -2 veces la tercera ecuación a la primera, y sumando $1/2$ veces la tercera ecuación a la segunda para eliminar z .

$$\begin{cases} 2x = 4 \\ \frac{1}{2}y = \frac{3}{2} \\ -z = 1 \end{cases} \begin{array}{l} \text{Despejando,} \\ \text{podemos ver} \\ \text{las soluciones:} \end{array} \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = -1 \end{cases}$$

Para clarificar los pasos, se trabaja con la matriz aumentada. Podemos ver los 3 pasos en su notación anterior.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 8 \\ -3x - y + 2z = -11 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Iniciamos copiando la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ -3 & -1 & 2 & -11 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \frac{3}{2}F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} -2F_2 + F_1 \rightarrow F_1 \\ -4F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 & | & 6 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & | & 1 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2F_3 + F_1 \rightarrow F_1 \\ \frac{1}{2}F_3 + F_2 \rightarrow F_2 \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1/2 & 0 & | & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_1/2 \rightarrow F_1 \\ 2F_2 \rightarrow F_2 \end{array}$$

finalmente resulta: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 3 \\ 0 & 0 & -1 & | & 1 \end{pmatrix}$

Si el sistema fuera incompatible, entonces nos encontramos con una fila como:

$$[0 \quad 0 \quad 0 \quad a]$$

Que representa la ecuación: $0x + 0y + 0z = a$, donde $a \neq 0$, lo que supone una contradicción y, por tanto, no tiene solución. En el caso de que $a = 0$ el sistema tiene varias soluciones.

Forma escalonada y reducida.

Dos formas especiales de matrices son la escalonada y la escalonada reducida. Una matriz puede tener las siguientes propiedades:

1. Todas las filas 0 están en la de la parte inferior de la matriz.
2. El primer elemento diferente de cero de cada fila, este es llamado "pivote"; está a la derecha del pivote de la fila anterior (esto supone que todos los elementos debajo de un pivote son cero).

Si una matriz **A** cumple con esas propiedades, se dice **escalonada**. Además, cumpliendo estas otras condiciones que detallaremos a continuación, decimos que la matriz se encuentra en la forma **escalonada reducida por filas**, o simplemente en forma **escalonada reducida**.

1. Todos los elementos delanteros ("pivotes") son iguales a 1
2. Todos los elementos por encima de los pivotes son nulos.

Cuando una matriz representa a un sistema de ecuaciones situaciones como tener una columna de ceros parece imposible ya que correspondería a una variable que nunca habría aparecido. Sin embargo esta situación puede

presentarse (imaginemos la ecuación de un plano en el espacio en la que no aparece alguna de las componentes, por ejemplo $y + z = 5$). Así la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

También es una matriz escalonada.

Una vez que la matriz del sistema se ha transformado hasta obtener una matriz escalonada reducida es muy fácil discutirlo (es decir, determinar cuántas soluciones tiene):

1. Cuando aparece un pivote en la columna de los términos independientes el sistema es incompatible (no tiene ninguna solución).
2. En otro caso el sistema es compatible. Si además el número de pivotes coincide con el número de incógnitas el sistema es compatible determinado (tiene una única solución). Cuando el número de pivotes es menor que el número de incógnitas el sistema es indeterminado (tiene infinitas soluciones que dependen de tantos parámetros como indique la diferencia entre el número de incógnitas y el número de pivotes).

Otras aplicaciones

Encontrar la inversa de una matriz

Es posible usar la eliminación gaussiana para encontrar inversas de matrices $n \times n$. Para ello se aumenta la matriz dada, digamos **A** con una matriz identidad, simplemente escribiendo las filas de la identidad a continuación de las de nuestra matriz **A**, por ejemplo dada:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Se construiría} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

y ahora se realizan las operaciones elementales sobre las filas de la matriz aumentada que sean necesarias para obtener la forma escalonada reducida de la matriz A ; sumando tanto a la segunda como a la tercera fila la primera obtenemos

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) (-1)F_2 \rightarrow F_2$$

Multiplicamos a la segunda fila por -1 y la intercambiamos con la primera

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) F_2 \leftrightarrow F_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) -2F_1 + F_2 \rightarrow F_2$$

Tenemos el pivote de la primera fila que usamos para hacer ceros debajo, luego usamos el pivote de la segunda fila

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) -2F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 & -4 & 1 \end{array} \right) -1F_3 \rightarrow F_3$$

y por último cambiamos de signo la tercera fila y usamos el pivote correspondiente

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_3 + F_1 \rightarrow F_1 \\ -F_3 + F_2 \rightarrow F_2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 4 & -1 \end{array} \right)$$

El proceso ha finalizado porque en la parte izquierda tenemos la forma escalonada reducida de A y puesto que ésta es la matriz identidad, entonces A tiene inversa y su inversa es la matriz que aparece a la derecha, en el lugar que al principio ocupaba la identidad. Cuando la forma escalonada reducida que aparece no es la identidad es que la matriz de partida no tiene inversa.

Métodos iterativos de Jacobi y Gauss – Seidel

Los métodos de Jacobi y Gauss – Seidel son los equivalentes en la solución de sistemas de ecuaciones lineales al método de aproximaciones sucesivas en la solución de ecuaciones algebraicas y trascendentes.

Consiste básicamente en obtener una ecuación de recurrencia (matricial en este caso) y proponer un vector solución inicial; posteriormente, se deberán realizar las iteraciones necesarias hasta que la diferencia entre dos vectores consecutivos cumpla con una tolerancia predefinida.

En realidad, estos métodos representan una adaptación vectorial de un proceso escalar, lo que implica la necesidad de adaptar los conceptos necesarios: los procesos iterativos se detienen cuando entre dos aproximaciones consecutivas se cumple con determinado error preestablecido. En este caso, deberá medirse la norma entre dos vectores para reconocer el momento en que se satisface la cota de error.

Por otra parte, resta el hecho de tener que evaluar un criterio de equivalencia el cual, naturalmente, tendrá carácter vectorial.

Definición del método de Jacobi

Para el sistema de ecuaciones lineales: $\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b}$

Donde $\mathbf{A}$ es la matriz de coeficientes, $\vec{x}$ es el vector (matriz) de incógnitas y $\vec{b}$ el de términos independientes (Matriz de las soluciones).

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b} \quad (1)$$

En la ecuación (1) se puede sustituir a la matriz $\mathbf{A}$ por la suma de dos matrices:

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} + \mathbf{R} \quad (2)$$

En la matriz **D** sus elementos son cero (0) excepto los ubicados en la diagonal que corresponden a los elementos de la matriz **A** y **R** que es una con ceros en la diagonal y sus elementos restantes coinciden con los respectivos de **A**

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(3)

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad R = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(4)

(5)

Sustituyendo la ecuación (2) en (1):

$$(\mathbf{D} + \mathbf{R}) \cdot \vec{x} = \vec{b} \Rightarrow \mathbf{D}\vec{x} + \mathbf{R}\vec{x} = \vec{b}$$

Despejando el término $\mathbf{D}\vec{x}$

$$\mathbf{D}\vec{x} = \vec{b} - \mathbf{R}\vec{x}$$

Premultiplicando por la matriz $\mathbf{D}^{-1}$

$$\mathbf{D}^{-1} \cdot \mathbf{D}\vec{x} = \mathbf{D}^{-1} \cdot (\vec{b} - \mathbf{R}\vec{x}) \Rightarrow \vec{x} = \mathbf{D}^{-1} \cdot (\vec{b} - \mathbf{R}\vec{x}) \quad (6)$$

La ecuación (6) no aporta una solución por si misma, si se observa desde la óptica del algebra matricial. Sin embargo, si se aplica desde una forma recursiva

$$\vec{x}^{(k+1)} = \mathbf{D}^{-1} \cdot (\vec{b} - \mathbf{R}\vec{x}^{(k)}) \quad (7)$$

Para $k = 0, 1, 2, \dots, n$ y donde $\vec{x}^{(k)}$ representa un vector solución inicial y $\vec{x}^{(k+1)}$ es una aproximación posterior a $\vec{x}^{(k)}$. Se puede constatar claramente

que la ecuación (7) es totalmente representativa de un método de aproximaciones sucesivas.

Esta ecuación (7) requiere de un breve análisis para su aplicación práctica. En principio, la matriz **D**, detallada en (4) solo posee elementos diferentes de cero (que corresponden a los propios de **A**) en su diagonal principal.

Es fácilmente comprobable que la matriz inversa **D** – **1** también posee únicamente valores diferentes de cero en su diagonal principal y que corresponden a los recíprocos de los ubicados en la matriz **A**, es decir, serán $\frac{1}{a_{ii}}$. Por otra parte, el resto de los elementos de cada renglón de la matriz **A** se encuentran en **R** y son restados del vector de términos independientes.

En contexto, la ecuación (7) equivale, a partir del sistema de ecuaciones lineales, a despejar a la incógnita de ubicada en la diagonal principal de cada una de las ecuaciones que conforman el sistema, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1 \dots (a_{12}x^{(k_2)} + a_{13}x^{(k_3)} + \dots + a_{1n}x^{(k_n)})}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2 \dots (a_{21}x^{(k_2)} + a_{23}x^{(k_3)} + \dots + a_{2n}x^{(k_n)})}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{b_3 \dots (a_{31}x^{(k_2)} + a_{32}x^{(k_3)} + \dots + a_{3n}x^{(k_n)})}{a_{33}} \\ &\text{Sucesivamente} \\ x_n^{(k+1)} &= \frac{b_n \dots (a_{n1}x^{(k_2)} + a_{n2}x^{(k_3)} + \dots + a_{nn}x^{(k_n)})}{a_{nn}} \end{aligned}$$

(9)

El método de Jacobi propone que el vector $x^{(0)}$ sea igual a cero. Partiendo de esta propuesta, el vector siguiente será $x^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}$, es decir, el

elemento independiente entre el coeficiente de la diagonal principal para cada ecuación.

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{b}_1}{\mathbf{a}_{11}} \\ \frac{\mathbf{b}_2}{\mathbf{a}_{22}} \\ \frac{\mathbf{b}_3}{\mathbf{a}_{33}} \\ \vdots \\ \frac{\mathbf{b}_n}{\mathbf{a}_{nn}} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Este vector $\mathbf{X}^{(1)}$ se sustituye en las ecuaciones (8) obteniéndose el siguiente $\mathbf{X}^{(1)}$. **El proceso se realiza consecutivamente hasta que la norma entre dos vectores consecutivos sea menor que cierta tolerancia preestablecida. La norma θ se calcula como**

$$\theta = \sqrt{(x_1^{(k+1)} - x_1^{(k)})^2 + (x_2^{(k+1)} - x_2^{(k)})^2 + (x_3^{(k+1)} - x_3^{(k)})^2 + \dots + (x_n^{(k+1)} - x_n^{(k)})^2} \quad (11)$$

Criterio de convergencia del Método de Jacobi.

El método de Jacobi es susceptible de los efectos del pivoteo. En consecuencia, su criterio de convergencia lo conforman los criterios de la diagonal dominante, la cual tiene dos condiciones:

1. **Condición necesaria:** El elemento ubicado en la diagonal principal de cada ecuación sea mayor en valor absoluto que el resto de los elementos de la misma ecuación.

$$|\mathbf{a}_{ii}| > |\mathbf{a}_{ij}| \quad (12)$$

2. **Condición suficiente:** El elemento ubicado en la diagonal principal de cada ecuación sea mayor en valor absoluto que la suma del resto de los elementos de la misma ecuación.

$$|a_{ii}| > \sum |a_{ij}| \quad (13)$$

Método de Gauss – Seidel.

Este método es una versión acelerada de Jacobi. Donde se necesita tener un vector aproximado completo para proceder a la sustitución en las ecuaciones de recurrencia y obtener una nueva aproximación.

El método de Gauss – Seidel se propone ir sustituyendo los nuevos valores de la aproximación siguiente conforme se vayan obteniendo sin esperar a tener un vector completo.

Esto acelera la convergencia. Iniciando con las ecuaciones de recurrencia del método de Jacobi (9)

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{b_1 \dots (a_{12}x_2^{(k+1)} + a_{13}x_3^{(k+1)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k+1)})}{a_{11}} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{b_2 \dots (a_{21}x_1^{(k+1)} + a_{23}x_3^{(k+1)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k+1)})}{a_{22}} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{b_3 \dots (a_{31}x_1^{(k+1)} + a_{32}x_2^{(k+1)} + \dots + a_{3n}x_n^{(k+1)})}{a_{33}} \end{aligned}$$

Sucesivamente

$$x_n^{(k+1)} = \frac{b_n \dots (a_{n1}x_1^{(k+1)} + a_{n2}x_2^{(k+1)} + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})}{a_{nn}} \quad (14)$$

Criterio de convergencia del Método de Gauss – Seidel

El criterio de convergencia del método de Gauss – Seidel corresponde totalmente a de la diagonal dominante cuyas condiciones se expresan en las ecuaciones (12) y (13)

Ejemplo.

Sea el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 + 8x_3 = 51 \end{cases} \quad (15)$$

Vemos que los elementos ubicados en la diagonal principal cumplen satisfactoriamente con el criterio de convergencia o diagonal dominante ($a_{ii} \neq 0$). resolviendo el sistema usando ambos métodos para contrastar su uso. Se Inicia por el método de Jacobi. Las ecuaciones de recurrencia son:

$$\begin{aligned} x_1^{(k+1)} &= \frac{3 - x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}}{10} \\ x_2^{(k+1)} &= \frac{9 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k)}}{6} \\ x_3^{(k+1)} &= \frac{51 + 2x_1^{(k)} - 3x_2^{(k)}}{8} \end{aligned} \quad (16)$$

La primera iteración $k = 1$ es:

$$\begin{aligned} x_1^{(1)} &= \frac{3}{10} \\ x_2^{(1)} &= \frac{9}{6} \\ x_3^{(1)} &= \frac{51}{8} \end{aligned} \quad x^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{10} \\ \frac{9}{6} \\ \frac{51}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 1,5 \\ 6,375 \end{bmatrix} \quad (17)$$

La segunda iteración $k = 2$ se obtiene sustituyendo al vector $\mathbf{x}^1$ (17) en las ecuaciones de recurrencia.

$$\begin{aligned} x_1^{(2)} &= \frac{3 - (1,5) - 3(6,375)}{10} \\ x_2^{(2)} &= \frac{9 - 4(0,3) - 6,375}{6} \\ x_3^{(2)} &= \frac{51 + 2(0,3) - 3(1,5)}{8} \end{aligned} \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} -1,125 \\ 2,3625 \\ 5,8875 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Las sucesivas iteraciones se muestran en cuadros 1 y 2. las tolerancia son calculadas con la ecuación (11).

Luego de trece iteraciones, con una tolerancia = 0,000007, se obtiene el vector solución

Cuadro 1 – Iteraciones 0 a 6 por el método dr Jacobi

Iteración	$\mathbf{x}^{(0)}$	$\mathbf{x}^{(1)}$	$\mathbf{x}^{(2)}$	$\mathbf{x}^{(3)}$	$\mathbf{x}^{(4)}$	$\mathbf{x}^{(5)}$	$\mathbf{x}^{(6)}$
X_1	0,30000	-1,12500	-1,11375	-1,06469	-0,98802	-0,99087	-0,99705
X_2	1,50000	2,36250	3,23125	3,11047	3,02393	2,98241	2,99292
X_3	6,37500	5,8875	5,20781	4,88484	4,94240	4,99402	5,00888
Tolerancia		1,73557	1,10310	0,34829	0,12915	0,06631	0,01922

Cuadro 1 – Iteraciones 7 a 12 por el método dr Jacobi

Iteración	$\mathbf{x}^{(7)}$	$\mathbf{x}^{(8)}$	$\mathbf{x}^{(9)}$	$\mathbf{x}^{(10)}$	$\mathbf{x}^{(11)}$	$\mathbf{x}^{(12)}$
X_1	-1,00107	-1,00063	-1,00011	-0,99991	-0,99996	-1,00000
X_2	2,99951	3,00128	3,00041	2,99997	2,99991	2,99998
X_3	5,00339	4,99992	4,99936	4,99982	5,00003	5,00004
Tolerancia	0,00947	0,00392	0,00116	0,00066	0,00023	0,000007

$$x^{(12)} = \begin{bmatrix} -1,00000 \\ 2,99998 \\ 5,00004 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Ahora realizamos la solución con la mejora del método Gauss – Seidel. Las ecuaciones de recurrencia son:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{3 - x_2^{(k)} - 2x_3^{(k)}}{10} \quad (20)$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{9 - 4x_1^{(k+1)} + x_3^{(k)}}{6}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{51 + 2x_1^{(k+1)} - 3x_3^{(k+1)}}{8}$$

La iteración $x^{(1)}$ se obtiene de la misma forma que la indicada en el vector (17).

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} 0,3 \\ 1,5 \\ 6,375 \end{bmatrix} \quad (21)$$

La diferencia se presenta en el cálculo de la iteración $x^{(2)}$

$$x_1^{(2)} = \frac{3 - (1,5) - 2(6,375)}{10} = -1,125$$

$$x_2^{(2)} = \frac{9 - 4(-1,125) + 6,375}{6} = 3,3125 \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} -1,125 \\ 3,3125 \\ 4,85156 \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$x_3^{(2)} = \frac{51 + 2(-1,125) - 3(3,3125)}{8} = 4,85156$$

Repitiendo el proceso consecutivamente, mismo que se presenta en el cuadro 3.

Cuadro 3 – Iteraciones por el método de Jacobi

Iteración	$x^{(0)}$	$x^{(1)}$	$x^{(2)}$	$x^{(3)}$	$x^{(4)}$	$x^{(5)}$
X_1	0,30000	-1,125	-1,0015625	-0,999329427	-1,000057752	-0,999997259
X_2	1,50000	3,3125	2,976302083	3,000968967	3,000005882	2,999995399
X_3	6,37500	4,8515625	5,008496094	4,999804281	4,999983356	5,00002411
Tolerancia		2,763447678	0,391016634	0,026248607	0,00122068	6,42839x10 ⁽⁻⁹⁾

Se dice entonces que después de seis iteraciones, con una tolerancia = $6,428 \times 10^{-53}$, el vector solución es:

$$x^{(12)} = \begin{bmatrix} -0,999997259 \\ 2,999995399 \\ 5,000002411 \end{bmatrix} \quad (23)$$

Conclusiones

Se concluye en dos sentidos diferentes: Primeramente, debe percibirse que el método de Jácobi es un antecedente del método de Gauss – Seidel,

mismo que lo mejora de forma notable al acelerar su convergencia. En segundo término, pero no menos importante, estos métodos del género de las aproximaciones sucesivas dependen fundamentalmente de su criterio de convergencia.

En este caso, de la diagonal dominante. Es difícil determinar qué tan dominante es una diagonal. No se establece una convención que nos diga la relación que debe guardar el elemento a_{ii} sobre el resto de los coeficientes a_{ij} de su ecuación. En todo caso, entre más evidente sea el dominio de los elementos sobre la diagonal principal, más rápida será la convergencia de la solución.

Otra forma del desarrollo del método Gauss – Seidel.

Es un método iterativo y por lo mismo, resulta ser un método bastante eficiente. Comenzamos con nuestro sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1K}x_k = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2K}x_k = b_2 \\ \vdots = \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kK}x_k = b_k \end{cases}$$

De la ecuación 1 despejemos x_1 , de la ecuación 2 despejemos x_2 , ..., de la ecuación k despejemos x_k . Esto nos da el siguiente conjunto de ecuaciones:

$$x_1 = \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \cdots - a_{1K}x_k}{a_{11}}$$

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{21}x_1 - \cdots - a_{2K}x_k}{a_{22}}$$

Sucesivamente

$$x_k = \frac{b_k - a_{k1}x_1 - \cdots - a_{kK-1}x_{k-1}}{a_{kk}}$$

Estas expresiones de las ecuaciones son las que forman nuestras fórmulas iterativas. Iniciamos el proceso iterativo, dándole el valor de cero a las variables $x_2, \dots, x_k$; esto nos dará un primer valor para x_1 .

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}}$$

Ahora, sustituimos este valor de x_1 en la 2^{da} ecuación, y las variables $x_3, \dots, x_k$ siguen teniendo el valor de cero. Obteniendo el valor para x_2 :

$$x_2 = \frac{b_2 - a_{12} \left(\frac{b_1}{a_{11}} \right)}{a_{22}}$$

los valores obtenidos de x_1 y x_2 , los sustituimos en la 3^{era} ecuación, y las demás variables $x_4, \dots, x_k$ mantiene el valor de cero; y así sucesivamente hasta llegar a la última ecuación. Todo este pasó, nos arrojará una lista de primeros valores para nuestras incógnitas, la cual conforma nuestro primer paso en el proceso iterativo. Digamos que tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 \\ x_2 &= \alpha_2 \\ &\vdots \\ x_k &= \alpha_k \end{aligned}$$

Repetimos el proceso, ahora sustituyendo estos últimos datos en lugar de ceros como al inicio, obtendremos una segunda lista de valores para cada una de las incógnitas. Digamos que ahora tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_1 \\ x_2 &= \beta_2 \\ &\vdots \\ x_k &= \beta_k \end{aligned}$$

Calculamos los errores aproximados relativos, respecto a cada una de las incógnitas. Así, tenemos la lista de errores como sigue:

$$|\epsilon_{a,1}| = \left| \frac{\beta_1 - \alpha_1}{\beta_1} \times 100\% \right|$$

$$|\epsilon_{a,2}| = \left| \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\beta_2} x 100\% \right|$$

$$|\epsilon_{a,k}| = \left| \frac{\beta_k - \alpha_k}{\beta_k} x 100\% \right|$$

El proceso se vuelve a repetir hasta que:

$$|\epsilon_{a,i}| < \epsilon_s; \quad \forall i = 1, 2, \dots, k$$

Donde ϵ_s es una cota suficiente prefijada.

Ejemplo 1

Usar el método de Gauss – Seidel para aproximar la solución del sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 - 0,2x_2 - 0,5x_3 = 8 \\ 0,1x_1 + 7x_2 + 0,4x_3 = -19,5 \\ 0,4x_1 - 0,1x_2 + 10x_3 = 72,5 \end{cases}$$

Hasta que $|\epsilon_{a,i}| < 1\%$.

Solución

Primero despejamos las incógnitas x_1 , x_2 y x_3 de las ecuaciones 1, 2 y 3 respectivamente. Tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{8 + 0,2x_2 + 0,5x_3}{3} \\ x_2 &= \frac{-19,5 - 0,1x_1 - 0,4x_3}{7} \\ x_3 &= \frac{72,4 - 0,4x_1 + 0,1x_2}{10} \end{aligned}$$

Estas últimas, son nuestro fórmulas iterativas.

Iniciamos el proceso iterativo, sustituyendo los valores de $x_2 = x_3 = 0$ en la primera ecuación, para calcular el primer valor de x_1 :

$$x_1 = 2,66667$$

Ahora, sustituimos $x_1 = 2,66667$ y $x_3 = 0$ en la segunda ecuación, para obtener x_2 :

$$x_2 = -2,82381$$

Ahora sustituimos $x_1 = 2,66667$ y $x_2 = -2,82381$ en la tercera ecuación, para obtener x_3 :

$$x_3 = 7,10521$$

Así, tenemos nuestra primera aproximación a la solución del sistema:

$$x_1 = 2,66667 \quad x_2 = -2,82381 \quad x_3 = 7,10521$$

Como aun no podemos calcular ningún error aproximado, repetimos el proceso pero ahora con los últimos datos obtenidos para las incógnitas:

Sustituyendo $x_2 = -2,82381$ y $x_3 = 7,10521$ en la ecuación 1 obtenemos $x_1 = 3,6626$.

Sustituyendo $x_1 = 3,6626$ y $x_3 = 7,10521$ en la ecuación 2 obtenemos $x_2 = -3,24404$;

finalmente, sustituyendo $x_1 = 3,6626$ y $x_2 = -3,24404$ en la ecuación 3 obtenemos $x_3 = 7,06106$.

Así, tenemos la segunda lista de valores de aproximación a la solución del sistema:

$$x_1 = 3,6626 \quad x_2 = -3,24404 \quad x_3 = 7,06106$$

Calculando los errores absolutos para cada una de las incógnitas. Tenemos:

$$|\epsilon_{a,1}| = \left| \frac{3,6626 - 2,66667}{3,6626} \times 100\% \right| = 27\%$$

$$|\epsilon_{a,2}| = \left| \frac{-3,24404 + 2,82381}{-3,24404} \times 100\% \right| = 12,9\%$$

$$|\epsilon_{a,3}| = \left| \frac{7,06106 - 7,1051}{7,06106} \times 100\% \right| = 0,6\%$$

Como no se ha logrado el objetivo, debemos repetir el mismo proceso con los últimos valores obtenidos de cada una de las incógnitas. Nótese que aunque el error aproximado $|\epsilon_{a,3}|$ ya cumple con ser menor al 1%, esto se debe de cumplir para los tres errores aproximados!

Repitiendo el mismo proceso. Omitiendo los pasos intermedios, obtenemos:

$$x_1 = 3,62724 \quad x_2 = -3,24102 \quad x_3 = 7,06250$$

Y en este caso tenemos los siguientes errores aproximados:

$$|\epsilon_{a,1}| = 0,09\% \quad |\epsilon_{a,2}| = 0,07\% \quad |\epsilon_{a,3}| = 0,001\%$$

Vemos que ahora si se ha cumplido el objetivo para cada uno de los errores aproximados. Por lo tanto, concluimos que la solución aproximada es:

$$x_1 = 3,62724 \quad x_2 = -3,24102 \quad x_3 = 7,06250$$

Observación.

Es lógico preguntarse si siempre el método de Gauss-Seidel converge a la solución del sistema de ecuaciones y también es lógico esperar que la respuesta es NO.

Un resultado de Análisis Numérico nos da una condición suficiente para la convergencia del método.

Teorema. El método de Gauss – Seidel converge a la solución del sistema si se cumple la condición de que la matriz de coeficientes del sistema sea una matriz *diagonalmente dominante*, es decir, si se cumple la siguiente condición:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \text{ para cada } i = 1, 2, \dots, n$$

La condición de ser una matriz diagonalmente dominante simplemente significa que los elementos de la diagonal son mayores (en valor absoluto) que la suma de los valores absolutos de los demás elementos del mismo renglón. Nótese que en el ejemplo anterior, la matriz si es diagonalmente dominante y por lo tanto, el método de Gauss-Seidel si converge a la solución del sistema.

Sin embargo, la condición de la matriz diagonalmente dominante, solamente es una condición suficiente pero no necesaria, es decir, existen sistemas de ecuaciones que *no* cumplen con la condición y que *si* convergen a la solución y también existen sistemas de ecuaciones que *no* cumplen con la condición y que *no* convergen a la solución.

Finalmente, obsérvese que aunque un sistema no cumpla con la condición de ser diagonalmente dominante, es posible a veces, lograr que si se cumpla con esta condición mediante un intercambio de renglones, como veremos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2

Mediante el método de Gauss – Seidel señale la solución aproximada del sistema:

$$\begin{cases} -5x_1 + 1,4x_2 - 2,7x_3 = 94,2 \\ 0,7x_1 - 2,5x_2 + 15x_3 = -6 \\ 3,3x_1 - 11x_2 + 44x_3 = -27,5 \end{cases}$$

Hasta que $|\epsilon_a| < 1\%$.

Solución

En este caso, vemos que la matriz de coeficientes del sistema no es diagonalmente dominante (¿por qué?). Pero también vemos que si intercambiamos los renglones (filas) 2 y 3 entonces si es diagonalmente dominante. Así, primero hacemos el intercambio de renglones (filas) y nuestro sistema es:

$$\begin{cases} -5x_1 + 1,4x_2 - 2,7x_3 = 94,2 \\ 3,3x_1 - 11x_2 + 44x_3 = -27,5 \\ 0,7x_1 - 2,5x_2 + 15x_3 = -6 \end{cases}$$

Procedemos entonces, a despejar x_1 , x_2 y x_3 de las ecuaciones 1, 2 y 3 respectivamente. Tenemos:

$$x_1 = \frac{94,2 - 1,4x_2 + 2,7x_3}{-5}$$

$$x_2 = \frac{-27,5 - 3,3x_1 - 4,4x_3}{-11}$$

$$x_3 = \frac{-6 - 0,7x_1 + 2,5x_2}{15}$$

Iniciamos el proceso iterativo sustituyendo los valores de $x_2 = 0$ y $x_3 = 0$ en la ecuación 1 para obtener x_1 :

$$x_1 = -18,84$$

Sustituimos $x_1 = -18,84$ y $x_3 = 0$ en la 2^{da} ecuación para obtener x_2 :

$$x_2 = -3,152$$

Por tanto, sustituimos $x_1 = -18,84$ y $x_2 = -3,152$ en la 3^{era} ecuación para obtener x_3 :

$$x_3 = -0,04613$$

Los valores obtenidos en la primera iteración son:

$$x_1 = -18,84 \quad x_2 = -3,152 \quad x_3 = -0,04613$$

Solo tenemos la primera aproximación de la solución del sistema, debemos seguir el proceso iterativo. Sustituyendo $x_2 = -3,152$ y $x_3 = -0,04613$ en la 1^{era} ecuación, obtenemos $x_1 = -19,69765$;

Sustituyendo $x_1 = -19,69765$ y $x_3 = -0,04613$ en la 2^{da} ecuación, obtenemos $x_2 = -3,42775$;

Sustituyendo $x_1 = -19,69765$ y $x_2 = -3,42775$ en la 3^{ra} ecuación, obtenemos $x_3 = -0,05207$.

Luego, nuestra segunda aproximación es:

$$x_1 = -19,69765 \quad x_2 = -3,42775 \quad x_3 = -0,05207$$

Calcular los errores aproximados para cada una de las incógnitas. Tenemos:

$$|\epsilon_{a,1}| = \left| \frac{-19,69765 + 18,84}{19,69765} \times 100\% \right| = 4,35\%$$

$$|\epsilon_{a,2}| = \left| \frac{-3,42775 + 3,152}{-3,42775} \times 100\% \right| = 8,04\%$$

$$|\epsilon_{a,3}| = \left| \frac{-0,05207 + 0,04613}{-0,05207} x 100\% \right| = 11,4\%$$

Como no se ha cumplido el objetivo, debemos seguir avanzando en el proceso iterativo. Resumimos los resultados como sigue:

Tercera iteración:

$$x_1 = -19,69765 \Rightarrow |\epsilon_{a,1}| = 0,3\%$$

$$x_2 = -3,45232 \Rightarrow |\epsilon_{a,2}| = 0,7\%$$

$$x_3 = -0,05271 \Rightarrow |\epsilon_{a,3}| = 1,2\%$$

Cuarta iteración:

$$x_1 = -19,77819 \Rightarrow |\epsilon_{a,1}| = 0,03\%$$

$$x_2 = -3,45454 \Rightarrow |\epsilon_{a,2}| = 0,06\% \text{ y } x_3 = -0,05277 \Rightarrow |\epsilon_{a,3}| = 0,1\%$$

Logrado en la cuarta iteración cumplir la restricción, los valores aproximados de la solución del sistema son:

$$x_1 = -19,7819 \quad x_2 = -3,45454 \quad x_3 = -0,05277$$

Auto evaluación

1.- Determine el valor de las variables, aplicando el método Gauss–Jordán en los siguientes Sistemas de ecuaciones Lineales:

$$\begin{array}{ll} \text{a.-} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 0,5x_3 = -5 \\ -2x_1 + 5x_2 - 1,5x_3 = 0 \\ -0,2x_1 + 1,75x_2 - x_3 = 10 \end{cases} & \text{b.-} \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 6x_4 = 2,3 \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 5x_4 = 6,9 \\ -5x_1 + x_2 - 3x_3 = -16,8 \\ 10x_2 - 4x_3 + 7x_4 = -36 \end{cases} \\ \text{c.-} \begin{cases} 2x - y + 3z + w = -6 \\ x + y + 3z - w = -10 \\ 3x - y + 2z + 2w = 0 \\ -2x - 3y - z - 2w = 3 \end{cases} & \text{d.-} \begin{cases} 0,7x_1 + 2,7x_2 - 6x_3 + 0,7x_4 = 1,6487 \\ 2x_1 - 0,8x_2 + 3x_3 - x_4 = -2,342 \\ -x_1 - 1,5x_2 + 1,4x_3 + 3x_4 = -4,189 \\ 7x_2 - 1,56x_3 + 5x_4 = 15,792 \end{cases} \end{array}$$

2.- Usar el método de Gauss – Seidel para aproximar la solución del sistema:

$$\begin{array}{ll} \text{a.-} \begin{cases} 3x_1 - 0,2x_2 - 0,5x_3 = 8 \\ 0,1x_1 + 7x_2 + 0,4x_3 = -19,5 \\ 0,4x_1 - 0,1x_2 + 10x_3 = 72,5 \end{cases} & \text{b.-} \begin{cases} 5x_1 - 8x_2 + x_3 = -71 \\ -2x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 134 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -58 \end{cases} \end{array}$$

Hasta que $|\epsilon_{a,i}| < 1\%$.

$$\text{c.-} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ -4x_1 - 5x_2 - 6x_3 = 9 \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 = -16 \end{cases} \quad \text{d.-} \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + 6x_3 = -2 \\ 7x_1 + 8x_2 + 10x_3 = 5 \end{cases}$$

Unidad 5

VECTORES CARACTERISTICOS Y VALORES DE UNA MATRIZ

Valores propios y vectores propios para una matriz cuadrada.

La Teoría Espectral estudia los valores propios y vectores propios de una matriz. Su aplicación en diversas áreas de la ciencia es esencialmente de importancia fundamental.

El estudio que realizaremos está definido en el campo de los números Complejos “**C**”; teniendo en cuenta que el conjunto de los números Reales “**R**” es sub conjunto de los números Complejo “**C**”

Ejemplo 1. Vector propio y valor propio

Dado

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -10 \\ 0 & 22 & 16 \\ 0 & -9 & -2 \end{bmatrix}$$
$$X = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ y } X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calcular el producto **AX** para cada **X** y analice los valores obtenidos.

Solución

Primero, realizamos **AX** para $X = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$

El producto obtenido es

$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -10 \\ 0 & 22 & 16 \\ 0 & -9 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0)(5) + (5)(-4) + (-10)(3) \\ (0)(5) + (22)(-4) + (16)(3) \\ (0)(5) + (-9)(-4) + (-2)(3) \end{bmatrix}$$
$$A \cdot X = \begin{bmatrix} 0 - 20 - 30 \\ 0 - 88 + 48 \\ 0 + 36 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -50 \\ -40 \\ 30 \end{bmatrix} = 10 \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Observamos, que el producto **AX** obtenido es un vector que es igual a 10 veces el vector **X**. ósea, **AX = 10X**.

Realicemos el segundo producto **AX** para el vector $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

El producto es

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -10 \\ 0 & 22 & 16 \\ 0 & -9 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0)(1) + (5)(0) + (-10)(0) \\ (0)(1) + (22)(0) + (16)(0) \\ (0)(1) + (-9)(0) + (-2)(0) \end{bmatrix} =$$

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

El valor **AX** obtenido es un vector igual a 0 veces el vector **X**, **AX = 0X**.

En conclusión podemos señalar que para esta matriz el producto obtenido, lo podemos expresar como **kX**, para ambos vector **X**.

realicemos el producto por otro vector **X**; por ejemplo. $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -10 \\ 0 & 22 & 16 \\ 0 & -9 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0)(1) + (5)(1) + (-10)(1) \\ (0)(1) + (22)(1) + (16)(1) \\ (0)(1) + (-9)(1) + (-2)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 5 - 10 \\ 0 + 22 + 16 \\ 0 - 9 - 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AX} = \begin{bmatrix} -5 \\ 38 \\ -11 \end{bmatrix}$$

AX no se obtuvo un vector de la forma **kX**, luego podemos señalar que para algún escalar **k** no se cumple. **AX = kX**

Existe valores escalares en que los productos calculados como en los Ejemplo 1. Se cumple la ecuación **AX = kX**, donde **k** es un escalar, decimos que el escalar **k** es **un valor propio** de **A**. algunos autores emplean la letra griega Lambda (λ) como símbolo especial en lugar de **k** cuando señalamos los valores propios. Para los valores realizados en el Ejemplo 1, los valores 10 y 0 son valores propios de la matriz **A** expresándolos como.

$$\lambda_1 = 10 \text{ y } \lambda_2 = 0$$

Cuando $\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X}$ se cumple para algunos $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$, entonces que $\mathbf{X}$ es un **vector propio** de la matriz $\mathbf{A}$. Los vectores propios de $\mathbf{A}$ están asociados a un valor propio. Por lo tanto, si λ_1 es un valor propio de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{AX} = \lambda_1\mathbf{X}$, nombramos a este vector propio como $\mathbf{X}_1$. Para que un vector sea propio, $\mathbf{X}$ debe ser distinto de cero.

El significado geométrico para los vectores propios. Cuando se tiene un vector **distinto de cero**, al multiplicarlo por una matriz resulta otro vector que es paralelo al primero o igual a $\mathbf{0}$, este vector se denomina vector propio de la matriz. Este significado es cuando los vectores están en campo de los números Reales ($\mathbf{R}$). Definiendo formalmente los valores propios y vectores propios de la siguiente forma:.

Definición:

Dado la matriz $\mathbf{A}$ cuadrada $n \times n$ y un vector $\mathbf{X} \in \mathbf{C}$ (Pertenece al campo de los números complejos) un **vector distinto de cero** para el cual se cumple

$$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X} \quad (1)$$

Si existe un escalar λ . que llamaremos **valor propio** de la matriz $\mathbf{A}$ y $\mathbf{X}$ se designa como un **vector propio** de $\mathbf{A}$ asociado con λ , o un λ (autovector de $\mathbf{A}$).

El conjunto de todos los valores propios de una $n \times n$ matriz $\mathbf{A}$ se denota por $\sigma(\mathbf{A})$ y se conoce como el **espectro** de $\mathbf{A}$.

Los vectores propios de una matriz $\mathbf{A}$ son aquellos vectores $\mathbf{X}$, que al multiplicarlo por el vector $\mathbf{A}$ resulta un vector en la misma dirección u dirección opuesta a $\mathbf{X}$. Como el vector cero ($\mathbf{0}$) no tiene dirección, no tiene indicar que el vector cero ($\mathbf{0}$) sea un vector propio.

Analicemos los vectores propios con más detalle. Supongamos $\mathbf{X}$ que satisface el ejemplo 1. Luego

$$\mathbf{AX} - \lambda\mathbf{X} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Para algunos $X \neq 0$. De forma equivalente se podrías escribir $(\lambda I - A)X = 0$, que comúnmente se usa. Ósea, que al buscar los vectores propios, buscamos soluciones no triviales a este sistema homogéneo de ecuaciones.

Las soluciones a un sistema homogéneo de ecuaciones son soluciones básicas, y sus combinaciones lineales. Estas soluciones básicas de la ecuación las llamaremos **vectores propios básicos** $(\lambda I - A)X = 0$. Por lo tanto podemos afirmar que cualquier combinación lineal (distinta de cero) de vectores propios básicos resulta un vector propio.

Si la matriz $(\lambda I - A)$ es invertible, ósea $(\lambda I - A)^{-1}$ existe. Por lo tanto la siguiente ecuación.

$$X = IX = ((\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A)) X = (\lambda I - A)^{-1}((\lambda I - A)X) = (\lambda I - A)^{-1} 0 = 0$$

Indicando que $X = 0$. Pero se señaló que $X \neq 0$. Luego $(\lambda I - A)$ no puede tener una inversa.

Se inició afirmando que la matriz es no invertible, por lo tanto su determinante es igual a 0. Concluimos que

$$\det(\lambda I - A) = 0$$

Recuerde que es equivalente a $\det(A - \lambda I) = 0$.

La expresión $\det(\lambda I - A)$ es un polinomio (de variable x) expresada como **polinomio característico de A**, y $\det(\lambda I - A) = 0$ es la **ecuación característica**. Luego nos referimos a los valores propios de **A** como **valores característicos**.

Teorema 1. La existencia de un vector propio.

Dada **A** una matriz $n \times n$ matriz y supongamos $\det(\lambda I - A) = 0$ para algunos $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\mathbb{C}$ Campo de los números complejos).

Por lo tanto, λ es un valor propio de **A** y luego existe un vector distinto de cero $X \in \mathbb{C}$ tal que **$AX = \lambda X$** .

Demostración:

Determinación de los vectores propios y valores propios.

Los valores propios y los vectores propios de una matriz simétrica son muy importante para el estudio de las matemáticas y la ingeniería. Denotamos por valores propios o raíces características de una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, a los valores de $\mathbf{a}_{nm}$ a tales que:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$$

Desarrollando el determinante tenemos un polinomio de grado “n”. Se obtiene el polinomio que por algún método se hallar sus raíces. Procedimiento recomendado al tener valores propios complejos, no solo reales.

Luego de obtener los valores propios, se procede a hallar el vector propio $\mathbf{X}$ correspondiente al valor propio λ , mediante la resolución del sistema homogéneo

$$\mathbf{AX} = \lambda \mathbf{X}$$

Donde λ es el valor característico; $\mathbf{A}$ y $\mathbf{X}$ son los vectores característicos donde el vector $\mathbf{X}$ es $\mathbf{X} = [x_0, x_1, \dots, x_{n-1}]$.

Multiplicidad de un valor propio:

Dada $\mathbf{A}$ una matriz $n \times n$ con polinomio característico dado por $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Entonces, se entiende por la multiplicidad de un valor propio λ de $\mathbf{A}$, el número de veces que λ existe como raíz de ese polinomio característico.

Ejemplo 1.

Dado

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determine sus vectores característicos correspondientes a los valores característicos

Solución

El Primer paso es, hallar los valores propios λ de la matriz A resolviendo la ecuación

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) = \det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow (\lambda - 2)^2 = 0$$

Tenemos que el polinomio característico de A , lo expresamos por $(\lambda - 2)^2$. Realizando operaciones para obtener las raíces de este polinomio, resolvemos $(\lambda - 2)^2 = 0$, para determinar λ . Resultando que $\lambda = 2$ es una raíz doble. Por lo tanto, $\lambda = 2$ es un valor propio de A de multiplicidad igual a 2.

Busquemos ahora cómo encontrar los valores propios y los vectores propios para la matriz A en detalle.

El segundo paso es, Para cada λ , obtenido, Hallar los vectores propios básicos $X \neq 0$, ósea, las soluciones básicas de $(\lambda I - A)X = 0$.

Comprobando el valor obtenido, al verificar que $AX = \lambda X$ con cada λ y los vectores propios asociados X .

El vector propio para $\lambda = 2$. Se quiere determinar los vectores $X \neq 0$ que cumplan la ecuación $AX = X$. en nuestro caso $(2I - A)X = 0$

$$\left(2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 - 2 & 0 \\ 0 & 2 - 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz aumentada para este sistema y la forma de escalón reducido correspondiente están dadas por

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

La solución es cualquier vector de la forma $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ resulta el vector propio básico para $\lambda = 2$ como $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Ejemplo 2.

Encuentra sus valores propios y vectores propios de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}$$

Solución

a. Primero hallamos los valores propios de **A**, para ello resolvemos la ecuación **det(λI - A) = 0**, donde

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det(\lambda I - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda + 5 & -2 \\ 7 & \lambda - 4 \end{bmatrix}\right) = 0$$

Obtenemos el determinante y resolviendo se tiene

$$\begin{vmatrix} \lambda + 5 & -2 \\ 7 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 5)(\lambda - 4) - (7)(-2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 5 & -2 \\ 7 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 5\lambda - 20 + 14 = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda + 5 & -2 \\ 7 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

Factorizando, se tiene

$$\begin{vmatrix} \lambda + 5 & -2 \\ 7 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda + 3 = 0 \\ \lambda - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -3 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}$$

Se obtuvieron los valores propios del vector **A**

b. Hallemos los vectores propios básicos para cada **λ**.

Iniciamos por encontrar los vectores propios para $\lambda_1 = -3$. Se quiere determinar los vectores **X** ≠ **0** que cumplan la ecuación **AX = -3X**. en nuestro caso **(-3I - A)X = 0**

$$\left(-3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -3 + 5 & 0 - 2 \\ 0 + 7 & -3 - 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 7 & -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La matriz aumentada para este sistema y la forma de escalón reducido correspondiente están dadas por

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2 & 0 \\ 7 & -7 & 0 \end{array}\right) F_1 \div 2 \rightarrow F_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 7 & -7 & 0 \end{array}\right) (-7)F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La solución es cualquier vector de la forma $\begin{bmatrix} s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ resulta el vector propio básico para $\lambda_1 = -3$ como $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para verificar, observamos que $\mathbf{AX} = -3\mathbf{X}$ para este vector propio básico.

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5)(1) + (2)(1) \\ (-7)(1) + (4)(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 + 2 \\ -7 + 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esto es lo que buscábamos, luego sabemos que este autovector básico es correcto.

Ahora hallaremos los vectores propios para $\lambda_2 = 2$; igual que antes queremos determinar los vectores $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ que cumplan la ecuación $\mathbf{AX} = 2\mathbf{X}$. en nuestro caso $(2\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} \left(2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -4 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 2+5 & 0-2 \\ 0+7 & 2-4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 7 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La matriz aumentada para este sistema y la forma de escalón reducido correspondiente están dadas por

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cc|c} 7 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{array} \right) F_1 \div 7 \rightarrow F_1 &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2/7 & 0 \\ 7 & -2 & 0 \end{array} \right) (-7)F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ &\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2/7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

La solución es cualquier vector de la forma $\begin{bmatrix} 2/7 s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 2/7 \\ 1 \end{bmatrix}$
Multiplicando este vector por 7 para operar más cómodamente y analizar de manera simple la solución a este sistema, dada por $t \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

Por lo tanto el vector propio básico para $\lambda_2 = 2$ como $\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$

Comprobando esto al verificar la ecuación $\mathbf{AX} = 2\mathbf{X}$ que este vector propio básico.

$$\begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -7 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-5)(2) + (2)(7) \\ (-7)(2) + (4)(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 + 14 \\ -14 + 28 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 14 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Es lo que buscábamos, por lo tanto sabemos que este vector propio básico es correcto.

Ejemplo 3.

Hallar los valores propios y los vectores propios para la matriz $A_{3,3}$

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -10 & 14 & -8 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Solución

Realicemos los mismos pasos que en el ejemplo anterior de la matriz 2×2 . Iniciamos buscando los valores propios de A . Que son las soluciones de la ecuación **$\det(\lambda I - A) = 0$; por lo tanto nos queda de la forma siguiente:**

$$\det \left(\lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -10 & 14 & -8 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Realizando las operaciones indicadas resulta

$$\det \left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -2 & 4 \\ 10 & -14 & 8 \\ 5 & -2 & -6 \end{bmatrix} \right) = 0; \det \left(\begin{bmatrix} \lambda - 5 & -2 & 4 \\ 10 & \lambda - 14 & 8 \\ 5 & -2 & \lambda - 6 \end{bmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 & 4 \\ 10 & \lambda - 14 & 8 \\ 5 & -2 & \lambda - 6 \end{vmatrix} = 0$$

Por cualquier procedimiento que conozcamos la ecuación que genera este determinante

$$\begin{aligned} & ((\lambda - 5)(\lambda - 14)(\lambda - 6) + (-2)(8)(5) + (10)(-2)(4)) \\ & - ((4)(\lambda - 14)(5) + (8)(-2)(\lambda - 5) + (-2)(10)(\lambda - 6)) = 0 \\ & ((\lambda^2 - 14\lambda - 5\lambda + 70)(\lambda - 6) - 80 - 80) \\ & - ((20)(\lambda - 14) + (-16)(\lambda - 5) + (-20)(\lambda - 6)) = 0 \\ & ((\lambda^2 - 19\lambda + 70)(\lambda - 6) - 160) - (20\lambda - 280 - 16\lambda + 80 - 20\lambda + 120) = 0 \end{aligned}$$

$$(\lambda^3 - 6\lambda^2 - 19\lambda^2 + 114\lambda + 70\lambda - 420 - 160) - (-16\lambda - 30) = 0$$

$$\lambda^3 - 25\lambda^2 + 184\lambda - 580 + 16\lambda + 80 = 0$$

$$\lambda^3 - 25\lambda^2 + 200\lambda - 500 = 0$$

Factorizando por Ruffini se tiene

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -25 & 200 & -500 \\ 5 & & 5 & -100 & 500 \\ \hline & 1 & -20 & 100 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto $\lambda = 5$ que escribimos de la forma $(\lambda - 5) = 0$ el polinomio que resulta es de segundo grado, podemos escribir esta ecuación de la forma

$$(\lambda - 5)(\lambda^2 - 20\lambda + 100) = 0$$

Factorizando nuevamente, ahora buscamos dos números que multiplicados den 100 y sumados den 20; dichos números son 10 y 10}

Nuestra ecuación la podemos escribir en forma de tres productos:

$$(\lambda - 5)(\lambda - 10)(\lambda - 10) = 0 \Rightarrow (\lambda - 5)(\lambda - 10)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = 10 \\ \lambda_3 = 10 \end{cases}$$

Obtuvimos los valores propios. Note que 10 es una raíz de multiplicidad dos

Ahora hallemos los vectores propios básicos para cada λ .

Iniciamos por encontrar los vectores propios para $\lambda_1 = 5$. Se quiere determinar los vectores $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ que cumplan la ecuación $\mathbf{AX} = 5\mathbf{X}$. en nuestro caso $(5\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}$

$$(5\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \left(5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -10 & 14 & -8 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(5\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \left(\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -10 & 14 & -8 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(5\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 10 & 2 & -4 \\ -10 & 19 & -8 \\ -5 & 2 & 11 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando el método de Gauss – Jordán para resolver este sistema. La matriz aumentada para este sistema y la forma de escalón reducido correspondiente están dadas por

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 10 & 2 & -4 & 0 \\ -10 & 19 & -8 & 0 \\ -5 & 2 & 11 & 0 \end{array}\right) F_1 \div 10 \rightarrow F_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/5 & 7/10 & 0 \\ -10 & 19 & -8 & 0 \\ -5 & 2 & 11 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 10F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ 5F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/5 & 7/10 & 0 \\ 0 & 21 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 29/2 & 0 \end{array}\right) F_2 \div (21) \rightarrow F_2 \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1/5 & 7/10 & 0 \\ 0 & 1 & -1/21 & 0 \\ 0 & 3 & 29/2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -1/5 F_2 + F_1 \rightarrow F_1 \\ -3F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 149/210 & 0 \\ 0 & 1 & -1/21 & 0 \\ 0 & 0 & 205/14 & 0 \end{array}\right) F_2 \times 14/205 \rightarrow F_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 149/210 & 0 \\ 0 & 1 & -1/21 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -149/210 F_3 + F_1 \rightarrow F_1 \\ 1/21 F_3 + F_2 \rightarrow F_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

La solución es cualquier vector de la forma $\begin{bmatrix} 0s \\ 0s \\ 0s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ resulta el

vector propio básico para $\lambda_1 = 5$ como $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Para verificar, observamos que $\mathbf{AX} = 5\mathbf{X}$ para este vector propio básico.

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -10 & 14 & -8 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (5)(0) + (2)(0) + (-4)(0) \\ (-10)(0) + (14)(0) + (-8)(0) \\ (-5)(0) + (2)(0) + (6)(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 \\ 0 + 0 + 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -10 & 14 & -8 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Esto es lo que buscábamos, luego sabemos que este autovector básico es correcto.

Ahora encontremos los vectores propios para $\lambda_2 = \lambda_3 = 10$. Se quiere determinar los vectores $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ que cumplan la ecuación $\mathbf{AX} = 10\mathbf{X}$. en nuestro caso $(10\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned}(10\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} &= \left(10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -10 & 14 & -8 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\(10\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} &= \left(\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -2 & 4 \\ 10 & -14 & 8 \\ 5 & -2 & -6 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\(10\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} &= \begin{bmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 10 & 4 & 8 \\ 5 & -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Utilizando nuevamente el método de Gauss – Jordán para resolver este sistema. La matriz aumentada para este sistema y la forma de escalón reducido correspondiente están dadas por}

$$\begin{aligned}\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -2 & 4 & 0 \\ 10 & 4 & 8 & 0 \\ 5 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) F_1 \div 5 \rightarrow F_1 &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 10 & 4 & 8 & 0 \\ 5 & -2 & 4 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} -10F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ -5F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) F_2 \div (8) \rightarrow F_2 &\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \frac{2}{5}F_2 + F_1 \rightarrow F_1 \end{array} \\ &\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)\end{aligned}$$

La solución es cualquier vector de la forma $\begin{bmatrix} -\frac{4}{5}s \\ 0s \\ 1s \end{bmatrix} = \frac{1}{5}s \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$ resulta el

vector propio básico para $\lambda_2 = 10$ como $\frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$

Para verificar, observamos que $\mathbf{AX} = 10\mathbf{X}$ para este vector propio básico.

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -10 & 14 & -8 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} (5)(-4) + (2)(0) + (-4)(5) \\ (-10)(-4) + (14)(0) + (-8)(5) \\ (-5)(-4) + (2)(0) + (6)(5) \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{5} \begin{bmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -10 & 14 & -8 \\ -5 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -20 + 0 - 20 \\ 40 + 0 - 40 \\ 20 + 0 + 30 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -40 \\ 0 \\ 50 \end{bmatrix} = 10 \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Esto es lo que buscábamos, luego sabemos que este autovector básico es correcto.

Polinomio característico

El **álgebra lineal** nos define el polinomio característico de una **matriz cuadrada** como un polinomio invariante por similitud matricial, cuyas raíces son los valores propios de dicha matriz. Donde el determinante de la matriz y su traza (suma de los elementos de la diagonal principal).

El polinomio característico de un endomorfismo ($f: N \rightarrow N$, donde el espacio inicial y final son el mismo) de un espacio vectorial de dimensión finita es el polinomio característico de la matriz de ese endomorfismo sobre cualquier base (ósea, el polinomio característico no depende de la elección de una base).

Entendemos por base y dimensión de un espacio vectorial al conjunto "**b**" donde **b** es linealmente independiente y abarca a $N = b$, ósea, si **b** es una base de N y **b** solo tiene un número finito de elementos, decimos entonces que N posee dimensión finita, por lo tanto el número de vectores en **b** es la dimensión de N .

Su ecuación característica, conocida como ecuación determinante, es la ecuación que se obtiene igualando a cero el polinomio característico.

Las raíces reales de dicho polinomio mismo serán los valores propios. Es por ello que los polinomios característicos son de especial importancia para la obtener los valores, subespacio y vectores propios de una aplicación

lineal. Además se verifica la existencia de dichos valores lineales y de la diagonalizabilidad de la matriz

En la teoría espectral de grafos, el polinomio característico de un grafo es el polinomio característico de su matriz de adyacencia.

Fundamento:

Una matriz cuadrada $\mathbf{A}$, donde deseamos hallar un polinomio cuyas raíces son los valores propios (raíces) de $\mathbf{A}$. Para una matriz diagonal $\mathbf{A}$, el polinomio característico es fácil de obtener; si los elementos de la diagonal son " x_i " para $i = 1, 2, 3, \dots, n$, el polinomio característico en la indeterminada " t " es

$$(t - x_1)(t - x_2)(t - x_3) \dots (t - x_n)$$

El polinomio posee esta forma ya que los elementos de la diagonal de una matriz diagonal coinciden con sus valores propios.

Para una matriz $\mathbf{A}$ genérica, se puede proceder de la siguiente forma: Si λ es un valor propio de $\mathbf{A}$, entonces existe un vector propio $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ tal que

$$\mathbf{AX} = \lambda\mathbf{X} \text{ ó } (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{X} = \mathbf{0}$$

Donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad. Como $\mathbf{X}$ es no nulo, la matriz $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$ es singular, lo que significa que su determinante es 0. Concluimos que las raíces de la función determinante $(\mathbf{A} - t\mathbf{I})$ son los valores propios de $\mathbf{A}$. por qué dicha función es un polinomio en t , ya está.

Definición

Sea $\mathbf{k}$ un cuerpo (por ejemplo $\mathbf{k}$ es el cuerpo de los números reales o de los números complejos) y una matriz cuadrada $\mathbf{A}$ n -dimensional sobre $\mathbf{k}$. El polinomio característico de $\mathbf{A}$, denotado por $p_{\mathbf{A}}(t)$, es el polinomio definido por:

$$p_{\mathbf{A}}(t) = \det (\mathbf{A} - t\mathbf{I})$$

Donde **I** es la matriz identidad $n \times n$. Algunos autores definen el polinomio característico como **det(tI - A)**; la diferencia está en que esta última forma de definirlo siempre produce un polinomio Mónico (polinomio de una variable distinto de cero en el que el coeficiente de mayor grado es igual a 1), mientras que la señalada inicialmente difiere en el signo cuando la matriz tiene un número impar de valores propios. Esta diferencia es, sin embargo, de poca importancia ya que las raíces son las mismas.

Ejemplo 4

Queremos hallar el polinomio característico de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Debemos calcular el determinante de

$$(A - tI) = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} - t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t & 0 \\ 0 & -t \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2-t & 1 \\ -1 & -t \end{bmatrix}$$

Su determinante es

$$\begin{vmatrix} 2-t & 1 \\ -1 & -t \end{vmatrix} = (2-t)(-t) - (1)(-1) = -2t + t^2 + 1 = t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$$

Obtuvimos el polinomio característico de **A**.

Propiedades

El polinomio $p_A(t)$ es de grado **n** y su coeficiente principal es **(-1)ⁿ**. lo más importante del polinomio característico mencionado anteriormente (fundamento) sobre los valores propios de **A** son las raíces de $p_A(t)$. El coeficiente constante $p_A(0)$ es igual al determinante de **A**, y el coeficiente de t^{n-1} es igual a **(-1)ⁿ⁻¹tr(A)**, la traza de **A**. Para una matriz **A** de 2×2 , el polinomio característico se puede expresar como:

$$t^2 - \text{tr}(A)t + \det(A).$$

Todos los polinomios reales de grado impar poseen al menos un número real como raíz, así que para todo *n* impar, toda matriz real tiene al menos un valor propio real. La mayoría de los polinomios reales de grado par

no tienen raíces reales, pero el teorema fundamental del álgebra, señala que todo polinomio de grado n tiene n raíces complejas, contadas con sus multiplicidades. Las raíces no reales de polinomios reales, por tanto valores propios no reales, aparecen en pares conjugados.

El teorema de Carley – Hamilton señala que si reemplazamos t por A en la expresión de $p_A(t)$ obtenemos la matriz nula: $p_A(A) = 0$. Es decir, toda matriz satisface su propio polinomio característico. La consecuencia de esto, se puede demostrar que el polinomio mínimo de A divide el polinomio característico de A .

Dos matrices semejantes poseen el mismo polinomio característico; pero el recíproco no se cumple en general. Dos matrices con el mismo polinomio característico no siempre son semejantes.

La matriz A y su traspuesta tienen el mismo polinomio característico.

A es semejante a una matriz triangular si y solo si, su polinomio característico puede ser completamente factorizado en factores lineales sobre k . De hecho, A es semejante a una matriz en forma canónica de Jordán.

Ejemplo 5

Dada la siguiente matriz hallar los valores y vectores característicos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución

Primero es hallar el polinomio característico

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

Donde

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}$$

$$(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2 - \lambda \end{bmatrix}$$

Por lo tanto

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix}$$

Resolviendo el determinante por cualquier método, usando la regla de Laplace, que nos dice:

Es posible que un determinante sea desarrollado por los elementos de una o una columna. A este desarrollo le llamaremos “desarrollo por cofactores” de un determinante. Para ello haremos uso de el teorema de Laplace que definiremos ahora:

“Un determinante es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea cualquiera (fila o columna) por sus cofactores correspondiente”.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 4 \\ -1 & -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} + (1)(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} + \\ & (1)(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 - \lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^2(2 - \lambda)((3 - \lambda)(-2 - \lambda) - (4)(-1)) \\ & \quad + (-1)^3(1)((2)(-2 - \lambda) - (4)(-1)) \\ & \quad + (-1)^4(1)((2)(-1) - (3 - \lambda)(-1)) \\ &= 1 \cdot (2 - \lambda)(-6 - 3\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 4) + 1 \cdot (-1)(-4 - 2\lambda + 4) + 1 \\ & \quad \cdot (1)(-2 + 3 - \lambda) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 2) + (-1)(-2\lambda) + (-\lambda + 1) \\ &= 2\lambda^2 - \lambda^3 - 2\lambda + \lambda^2 - 4 + 2\lambda + 2\lambda - \lambda + 1 = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = 0 \\ & \quad \lambda^3 - 3\lambda^2 - \lambda + 3 = 0 \end{aligned}$$

Polinomio característico de **A**

Aplicando ahora Ruffini para obtener las raíces

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -3 & -1 & 3 \\ 1 & & 1 & -2 & 3 \\ \hline & 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

Por lo tanto $X = -1$ que escribimos de la forma $(\lambda + 1) = 0$, el polinomio que resulta es de segundo grado, podemos escribir esta ecuación de la forma

$$(\lambda + 1)(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = 0$$

Factorizando nuevamente, ahora buscamos dos números que multiplicados den 2 y restados den 3; dichos números son 3 y 1

Nuestra ecuación la podemos escribir en forma de tres productos:

$$(\lambda + 1)(\lambda - 3)(\lambda + 1) = (\lambda + 1)^2(\lambda - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 3 \end{cases}$$

Obtuvimos los valores propios de la matriz **A** y además note que -1 es una raíz de multiplicidad dos

Ahora hallemos los vectores propios básicos para cada λ .

Iniciamos por encontrar los vectores propios para $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. Se quiere determinar los vectores $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ que cumplan la ecuación $\mathbf{AX} = -\mathbf{X}$. en nuestro caso $(-\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} (-\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} &= \left(-\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ (-\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} &= \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ (-\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} &= \begin{bmatrix} -3 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Utilizando el método de Gauss – Jordán para resolver este sistema. La matriz aumentada para este sistema y la forma de escalón reducido correspondiente están dadas por

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & | & 0 \\ -2 & -4 & -4 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} F_1 \leftrightarrow F_3 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ -2 & -4 & -4 & | & 0 \\ -3 & -1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ 3F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} F_2 \div (-2) \rightarrow F_2 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -F_2 + F_1 \rightarrow F_1 \\ -2F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

La solución es cualquier vector de la forma $\begin{bmatrix} 0 \\ s \\ -s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ resulta el

vector propio básico para $\lambda_1 = -1$ como $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

Para verificar, observamos que $\mathbf{AX} = -\mathbf{X}$ para este vector propio básico.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(0) + (1)(1) + (1)(-1) \\ (2)(0) + (3)(1) + (4)(-1) \\ (-1)(0) + (-1)(1) + (-2)(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 1 - 1 \\ 0 + 3 - 4 \\ 0 - 1 + 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Esto es lo que buscábamos, luego sabemos que este autovector básico es correcto.

Ahora encontremos los vectores propios para $\lambda_3 = 3$. Se quiere determinar los vectores $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ que cumplan la ecuación $\mathbf{AX} = 3\mathbf{X}$. en nuestro caso $(3\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \mathbf{0}$

$$(3\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \left(3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(3\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & -3 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(3\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando nuevamente el método de Gauss – Jordán para resolver este sistema. La matriz aumentada para este sistema y la forma de escalón reducido correspondiente están dadas por}

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} 2F_1 + F_2 \rightarrow F_2 \\ -F_1 + F_3 \rightarrow F_3 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) F_2 \div (-2) \rightarrow F_2$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} F_2 + F_1 \rightarrow F_1 \\ -2F_2 + F_3 \rightarrow F_3 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La solución es cualquier vector de la forma $\begin{bmatrix} -2s \\ -3s \\ 1s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ resulta el

vector propio básico para $\lambda_2 = 3$ como $\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para verificar, observamos que $\mathbf{AX} = -\mathbf{X}$ para este vector propio básico.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(-2) + (1)(-3) + (1)(1) \\ (2)(-2) + (3)(-3) + (4)(1) \\ (-1)(-2) + (-1)(-3) + (-2)(1) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 - 3 + 1 \\ -4 - 9 + 4 \\ 2 + 3 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ -9 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esto es lo que buscábamos, luego sabemos que este autovector básico es correcto.

Autoevaluación:

Dada las siguientes matrices, hallar los valores y vectores característicos

a.- $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ b.- $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ c.- $B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

d.- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e.- $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 3 & -7 \end{bmatrix}$ f.- $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ -2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

- Burden, R. & Faires, Douglas. (2002). Análisis Numérico-
- Chapra, S. (2011). Problemas de cálculo numérico para ingenieros con aplicaciones Matlab. Serie Schaum
- Lehman. Ch. (2010). Álgebra Superior. Métodos numéricos
- Smith, A.W. (1988). Análisis Numérico, México Editorial Prentice-Hall
- Sullivan, J. (2006). Polinomios y funciones racionales. Álgebra y Trigonometría. Pearson Educación 7ª edición
- <http://es.wikipedia.or>
- Golub, Gene H.; Charles F. Van Loan (1986). *Matrix Computations* (3rd edición). Johns Hopkins University.
- Higham, Nicholas J. (1996). *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Hildebrand, F. B. (1974). *Introduction to Numerical Analysis* (2nd edición). McGraw-Hill