

METODO DE NEWTON-RAPHSON

Resolver una ecuación, no siempre es simple o factible. Aún más, la situación se complica cuando en la ecuación intervienen funciones trascendentes. Así, no existen fórmulas para resolver ecuaciones tan simples como $\cos x = x$.

Para ayudarnos en la tarea de hallar raíces de ecuaciones complicadas, viene a nuestro auxilio el método de Newton-Raphson. Este método, mediante un simple proceso de iteración, podemos aproximar, con la exactitud deseada, una raíz real r de una ecuación $f(x) = 0$.

Este método fue presentado por Isaac Newton (1.642–1.727) en su obra **Method of Fluxions** escrita el año 1.671 y publicada, muchos años después, en 1.736. Para ilustrar su método, Newton, como ejemplo, encuentra aproximaciones a la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$ (ver el ejemplo 2, más abajo).

*Joseph Raphson (1.648–1.715) fue un matemático inglés egresado de la Universidad de Cambridge y amigo de Newton. Estuvo involucrado, a favor de Newton, en la reyerta con Leibniz sobre los orígenes del Cálculo. Raphson, a quien Newton le permitía acceso a sus trabajos, publicó el año 1.690, mucho antes que apareciera el Method of Fluxión, su obra **Analysis Aequationum Universalis**. En esta obra aparece, por primera vez, el método que ahora se llama de Newton-Raphson.*

Veamos lo que dice este método. Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) . Si $f(a)$ y $f(b)$ tiene signos distintos, entonces, el teorema del valor intermedio nos asegura que existe un

número real $a < r < b$ tal que $f(r) = 0$. Esto es, r es una raíz de f que está entre a y b . Haciendo un esbozo rápido de la gráfica de f , elegimos una primera aproximación x_1 . El método de Newton se basa en la hipótesis de que la recta tangente al gráfico en el punto $(x_1, f(x_1))$ corta al eje X un punto x_2 cercano a r . Veamos como hallar x_2 .

La recta tangente L en el punto $(x_1, f(x_1))$ tiene por ecuación:

$$y = f(x_1) - f'(x_1)(x - x_1)$$

Si esta recta corta al eje X en x_2 , tenemos

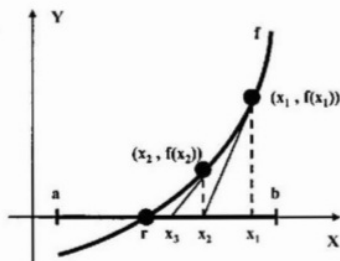
$$0 = f(x_1) - f'(x_1)(x_2 - x_1)$$

De donde,

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}, \text{ si } f'(x_1) \neq 0$$

Reiniciamos el proceso tomando x_2 en lugar de x_1 y logramos la tercera aproximación x_3 , dado por

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$



Continuando el proceso, conseguimos una sucesión de aproximaciones $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots$, donde

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Cada aproximación sucesiva x_n se llama una iteración.

Diremos que esta sucesión de aproximaciones converge a r si x_n se acerca más y más a medida que n crece; es decir cuando:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = r$$

En resumen, tenemos:

METODO DE NEWTON-RAPHSON. Sea $f(r) = 0$, donde f es derivable en un intervalo abierto que contiene a r . Para aproximar a la raíz r seguir los siguientes pasos:

1. Tomar una estimación inicial x_1 cercana a r . Ayudarse con el gráfico de f .
2. A partir de x_1 , hallar nuevas estimaciones $x_2, x_3, \dots, x_n, x_{n+1}$, mediante:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ donde } f'(x_n) \neq 0$$

3. La aproximación buscada es x_{n+1} si se cumple que $x_{n+1} = x_n$, con el grado de aproximación buscada.

EJEMPLO 1. Comenzando con $x_1 = 1$, calcular las aproximaciones x_2, x_3, x_4 y x_5 de la raíz positiva de la ecuación:

$$x^2 - 3 = 0$$

Solución

La raíz positiva de $x^2 - 3 = 0$ es $\sqrt{3}$. Luego, nos están pidiendo cuatro aproximaciones de $\sqrt{3}$.

Bien, la función f es diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y, en particular, en todo intervalo abierto que contiene a $\sqrt{3}$. Además, $f'(x) = 2x$

Luego,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{(x_n)^2 - 3}{2x_n} = \frac{(x_n)^2 + 3}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right)$$

Ahora, $x_1 = 1$, entonces

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{3}{x_1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{3}{1} \right) = 2$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left(x_2 + \frac{3}{x_2} \right) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{3}{2} \right) = \frac{7}{4} = 1,75$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left(x_3 + \frac{3}{x_3} \right) = \frac{1}{2} \left(1,75 + \frac{3}{1,75} \right) = \frac{6,0625}{3,5} = 1,732142857$$

$$x_5 = \frac{1}{2} \left(1,732142857 + \frac{3}{1,732142857} \right) = \frac{6,000318877}{3,464285714} = 1,73205081$$

Una calculadora nos da que $\sqrt{3} = 1,732050808$. Vemos que este valor y el de x_5 coinciden en 6 cifras decimales.

OBSERVACION. El grado de aproximación se expresa dando el número de cifras decimales deseados para la raíz. Así, si se pide una aproximación de 3 cifras decimales, se calculan las aproximaciones hasta que x_{n+1} y x_n coincidan en, por lo menos, las tres primeras cifras decimales. Otra manera de expresar este requerimiento se hace pidiendo que las aproximaciones sucesivas x_{n+1} y x_n difieran en menos de $0,001 = 10^{-3}$. En general, decir que una aproximación x_{n+1} es de k cifras decimales es equivalente a decir que x_{n+1} y x_n difieran en menos de 10^{-k} .

A continuación aproximamos la raíz de la ecuación $x^3 - 2x - 5 = 0$, mostrada por Newton en su obra **Method of Fluxions**.