Instituto Universitario de Tecnología para la Informática

MATERIA:

MATEMÁTICA I

Valencia, Noviembre 2018

INTRODUCCIÒN

Medir y contar fueron las primeras actividades matemáticas del hombre primitivo. Haciendo marcas en los troncos de los árboles lograban, estos primeros pueblos, la medición del tiempo y el conteo del número de animales que poseían, así surgió la aritmética. Pasaron cientos de siglos para que el hombre alcanzara un concepto abstracto del número, base indispensable para la formación de la ciencia algebraica.

A. Baldor

OBJETIVO GENERAL:

Resolver problemas aplicando los conceptos fundamentales del álgebra, así como las funciones numéricas, sus gráficas y su aplicación en situaciones cotidianas.

OBJETIVO ESPECÍFICOS:

- Aplicar los conocimientos fundamentales del álgebra y sus aplicaciones en la vida cotidiana.
- Analizar los diversos tipos de funciones numéricas y sus respectivas gráficas.

UNIDAD I

1.- CONCEPTOS FUNDAMENTALES DE ALGEBRA:

CONJUNTO DE NÚMEROS RACIONALES (Q):

Son las llamadas fracciones y se denotan con la letra (Q) y se expresan como un cociente (división), donde la parte de arriba, llamada “numerador” (dividendo) y la parte de abajo “denominador” (divisor); tanto el numerador como el denominador son siempre números enteros.

El conjunto de los números racionales es muy extenso, por lo tanto, incluirlos todos en un conjunto o representarlos en una recta numérica, jamás se terminaría de ubicarlos.

En el conjunto de números racionales son siempre posibles las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división (menos la división entre cero) y su resultado será otro racional o un entero.

CONJUNTO DE NÚMEROS IRRACIONALES (I):

Se denotan con la letra (I), son exactamente los que no son racionales y son números decimales ilimitados, cuyas cifras decimales no se repiten y van al infinito-, ejemplo. 2,1542789

CONJUNTO DE NÚMEROS REALES (R):

- Números Reales (R)
  - Racionales (Q)
    - Enteros (Z)
      - (N) Naturales
      - Enteros Negativos
    - Fraccionarios
      - Fracciones Propias
      - Fracciones Impropias
  - Irracionales (I)
    - Algebraicos Irracionales
    - Trascendentes

OPERACIONES CON CONJUNTOS NUMÉRICOS

Antes de iniciarlas, se debe conocer:

a.) Suma algebraica.
b.) Regla de los signos.
c.) Signos de agrupación.

Todas son reglas muy sencillas, pero que se deben manejar correctamente, debido a que una colocación equivocada de un signo, nos cambia radicalmente un resultado:

a.- Suma Algebraica:

Se maneja para sumar y/o restar:

1. Cuando se suman números positivos, se suman las cifras y se les mantiene el signo positivo en el resultado. Ejemplo: $5 + 8 + 9 = 22$
2. Cuando se suman números negativos, se suman las cifras y se mantiene el signo negativo en el resultado. Ejemplo: $- 4 - 10 – 9 = -23$
3. Cuando se tiene un número positivo y uno negativo, se restan las cifras y al resultado se le coloca el signo del número mayor. Ejemplo: $36 – 14 = 22$; $13 – 27 = -14$.

b.- Regla de los signos:

Se aplica para multiplicar y dividir:

(+) . (+) = (+)	(-) . (+) = (-)	(+) . (-) = (-)	(-) . (-) = (+)
(+) ÷ (+) = (+)	(-)÷ (+) = (-)	(+) ÷ (-) = (-)	(-)÷ (-) = (+)

Si se multiplican o dividen **signos iguales**, el resultado es **positivo**¸ si se multiplican o dividen **signos diferentes** el resultado es **negativo.**

c.- Signos de agrupación:

Estos signos indican que las cantidades encerradas en ellos, deben considerarse como un todo, es decir, como una sola cantidad y también se utilizan para señalar el orden en que deben efectuarse las operaciones.

Los signos de agrupación más usados son: el paréntesis ( ); el corchete [ ] y la llave { }, así como para dar más claridad a las expresiones; es recomendable usarlos en este mismo orden e igualmente cuando se efectúan las operaciones y se debe proceder a eliminarlos, se recomienda mantener el mismo orden.

Para suprimir o eliminar los signos de agrupación se debe tener en cuenta presente las siguientes normas:

a.- Cuando los signos de agrupación están precedidos por el signo (+), se elimina el signo de agrupación y a las cantidades que están dentro de él, se les conserva el mismo signo. Ejemplo:

$$8 + 9 + (3 + 2 – 6) = 8 + 9 + 3 + 2 – 6$$

$$4x + (- y + 5z) = 4x – y + 5z$$

b.- Cuando los signos de agrupación están precedidos por el signo (-), se elimina el signo de agrupación y las cantidades que están dentro de él, se les cambia el signo. Ejemplo:

$$4 – (8 + 10 – 5) = 4 – 8 – 10 + 5$$

$$6x – (- y + 4z) = 6y + y – 4z$$

c.- Cuando los signos de agrupación están precedidos por un número cualquiera, no habiendo signo (+) ni signo (-) entre ellos, se trata de una multiplicación, entre el número de afuera y los números contenidos dentro de los signos de agrupación, esto equivale a la llamada “propiedad distributiva de la multiplicación” y se resuelve multiplicando el número de afuera por cada uno de los números o términos que están dentro y en cada uno de ellos deben multiplicarse los respectivos signos.

Ejemplo:

$$7\ (6 - 8 + 15) = 42 - 56 + 105$$

$$-6\ (3x + 7 - y + 2z) = -18x - 42 + 6y - 12z$$

$$(-5x + 16 - 40y + z)\ 8 = -\ 40 + 128 - 320y + 8z$$

$$(-4)\ (16 - 12 + 20 - 15) = -\ 64 + 48 - 80 + 60$$

OPERACIONES COMBINADAS CON NÚMEROS ENTEROS (Z)

1) $2\ \{-\ 3\ [8 - (2 . 3) + (4 - 3)] + (8\ .\ 5) - (3 + 1) + 2\}$ eliminación de paréntesis

$= 2\ \{-\ 3\ [8 - 6 + 4 - 3] + 40 - 3 - 1 + 2\}$ eliminación de corchetes

$= 2\ \{-\ 24 + 18 - 12 + 9 + 40 - 3 - 1 + 2\}$ eliminación de llaves

$= -\ 48 + 36 - 24 + 18 + 80 - 6 - 2 + 4$

$= 138 - 80$

$= 58$

2) $\{4 - 3\ [5 - 6\ (7 - 2)]\} \cdot \{8 - [2 - (6 - 3)]\}$

$= \{4 - 3\ [5 - 42 + 12]\} \cdot \{8 - [2 - 6 + 3]\}$

$= \{4 - 15 + 126 - 36\} \cdot \{8 - 2 + 6 - 3\}$

$= \{79\} \cdot \{9\} = 711$

3) {4 $[3-(5\,.\,6)]-(7-2)\}\cdot[8-2\,(6-3)]$

= {4 $[3-30]$ - 7 + 2} · $[8-12+6]$

= {12 – 120 – 7 + 2} · $[2]$

= 24 – 240 – 14 + 4

= 28 – 254

= - 226

Ejercicios propuestos:

1) – 8 { -7 $[(-5)\cdot(4)\cdot(-15)]$ - $[-(10+15-2)]$ - 12} =
2) – {14 + (16 – 14) – $[(42)\div(-6)]$ - 7 (15 – 9 – 2)} =
3) 6 + {$[18-(12)\cdot(-9)]$ – $[16\,(5-12)+\,4]$} – 6 =

NÚMEROS RACIONALES O FRACCIONARIOS (FRACCIONES):

Una fracción es la relación entre dos números enteros diferentes que se dividen y se expresa así: $\frac{NUMERADOR}{DENOMINADOR}$. Una fracción expresa las partes de una o más unidades.

Número Mixto: está formado por un número entero y una fracción. Ejemplo: 3 $\frac{2}{5}$ y se resuelve de la siguiente manera: Se convierte en una fracción

3 x 5 + 2 = 15 + 2 = 17 $\longrightarrow$ El resultado es el numerador de la fracción y se coloca el mismo denominador, es decir, 3 $\frac{2}{5}=\frac{17}{5}$

Valor de una fracción: Se calcula dividiendo el numerador entre el denominador; esta división puede dar como resultado un número entero (exacta). Ejemplo: $\frac{16}{2}=8$, o puede dar un decimal (inexacta), ejemplo: $\frac{3}{4}=0{,}75.$

Fracciones equivalentes: Dos fracciones son equivalentes, cuando sus valores son iguales, es decir, que valen lo mismo. También dos fracciones son equivalentes cuando sus productos cruzados son iguales. Ejemplo:

$\frac{3}{5}$ y $\frac{9}{15}$ $\Longrightarrow$ $\frac{3}{5}$ = 0,6 y $\frac{9}{15}$ = 0,6 ó 3 x 15 = 5 x 9 $\Longrightarrow$ 45 = 45

Ampliación o amplificación de fracciones: Significa hacer crecer la fracción, obteniendo una mayor, pero que tenga el mismo valor, o sea, equivalente; para esto se multiplican el numerador y denominador por un mismo número entero, diferente de cero (0) y de uno (1). Ejemplo:

$$\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{3} = \frac{24}{15} \cdot \frac{2}{2} = \frac{48}{30}$$

$$\frac{8}{5} = 1{,}6 \quad \frac{24}{15} = 1{,}6 \quad \frac{48}{30} = 1{,}6$$

Simplificación de fracciones: Significa hacer decrecer la fracción, reducirla, obtener una menor pero que tenga el mismo valor, o sea, equivalente; para esto se divide el numerador y el denominador entre un mismo número entero, diferente de cero (0) y de uno (1).

$$\frac{36}{24} \div \frac{2}{2} = \frac{18}{12} \div \frac{2}{2} = \frac{9}{6} \div \frac{3}{3} = \frac{3}{2}$$

Aquí observamos que la fracción original $\frac{36}{24}$ y las tres fracciones obtenidas $\left(\frac{18}{12}\right), \left(\frac{9}{6}\right)\ y\ \left(\frac{9}{6}\right)$ son equivalentes, todas tienen el mismo valor: 1,5

$$\frac{36}{24} = 1{,}5 \quad \frac{18}{12} = 1{,}5 \quad \frac{9}{6} = 1{,}5 \quad \frac{3}{2} = 1{,}5$$

La simplificación es una operación de mucha aplicación en las fracciones, normalmente todos los resultados en fracciones deben simplificarse, siempre que se pueda; también podemos realizar simplificaciones en los resultados parciales; obtenidos durante el desarrollo de un ejercicio y podemos simplificar antes de comenzar a resolver un ejercicio.

Cuando se hace una simplificación y se llega a una fracción que ya no se puede simplificar más, se dice que es “irreducible”, se ha llevado a su mínima expresión.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR (M.C.D.) Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (m.c.m.)

M.C.D.: Es el mayor número que divide a todos exactamente, o sea, el mayor divisor común.

m.c.m.: Es el menor número que es divisible exactamente entre todos.

Para el cálculo de ambos, lo primero que se hace es descomponer todos los números en sus factores primos y se colocan en forma de potencia, ejemplo:

Sean los números 16 y 42:

$$\begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \quad 16 = 2^4 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \\ & \end{array} \quad 42 = 2 \,.\, 3 .\, 7$$

Para el M.C.D.: Se toman solamente los números comunes a ambos, con el menor exponente; se observa en el ejercicio anterior que el único número común es el “2” y con el menor exponente es el $2^1 = 2$, luego el M.C.D. es igual a 2.

Si hay 2 o más números comunes, se toma uno de cada uno con el menor exponente, se resuelven las potencias y se multiplican entre sí esos factores; cuando no existen números comunes, el M.C.D. será (1), ya que este es el único número que los divide a todos.

Para el m.c.m.: Se toman los números comunes y no comunes (uno de cada número) con el mayor exponente, se resuelven las potencias y se multiplican entre sí esos factores.

Del ejemplo anterior tomamos $2^4 \cdot 3 \cdot 7 = 16 \cdot 3 \cdot 7 = 336$; el m.c.m. = 336.

FORMA DE PROBARLO:

Para el M.C.D.: 2 es el mayor divisor de 16 y 42 a la vez,

$$16 \div 2 = 8 \qquad 42 \div 2 = 21$$

Para el m.c.m.: 336 es el menor número que es divisible entre 16 y 42,

$$336 \div 16 = 21 \qquad 336 \div 42 = 8$$

Ejercicios:

1) Sean los números 12, 40 y 32, hallar el M.C.D. y el m.c.m.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2^2 \cdot 3$

$40 = 2^3 \cdot 5$ M.C.D. = $2^2 = 4$

$32 = 2^5$ m.c.m. = $2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 32 \cdot 3 \cdot 5 = 480$

2) Sean los números 25, 60 y 90, hallar el M.C.D. y el m.c.m.

$$\begin{array}{r|l} 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$25 = 5^2$

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ M.C.D. = $5 = 5$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$ m.c.m. = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 4 \cdot 9 \cdot 25 = 900$

OPERACIONES CON NÚMEROS REALES (R) → FRACCIONES

1.- SUMA Y RESTA DE NÚMEROS REALES: El procedimiento para sumar y/o restar fracciones es similar; se presentan dos casos: cuando tienen igual denominador o cuando tienen diferente denominador:

a) **Con igual denominador:** la suma y/o resta de dos o más fracciones de igual denominador, el resultado es otra fracción, cuyo "numerador" es la suma algebraica de los numeradores de las fracciones dadas y se coloca el mismo denominador.

Ejemplos:

$$\frac{8}{5}+\frac{3}{5}+\frac{2}{5}=\frac{8+3+2}{5}=\frac{13}{5}$$

$$\frac{15}{3}+\frac{8}{3}-\frac{9}{3}=\frac{15+8-9}{3}=\frac{14}{3}$$

$$\frac{9}{7}-\frac{14}{7}-\frac{8}{7}=\frac{9-14-8}{7}=-\frac{13}{7}$$

b) **Con diferente denominador:** Para resolver se pueden utilizar varios métodos:

* **CRUZADO:** Se utiliza solo cuando se van a sumar o restar dos fracciones.

Se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, y se coloca como numerador de la nueva fracción.

Luego se multiplica el numerador de la segunda fracción por el denominador de la primera fracción y se coloca el signo que tenga la segunda fracción, en el numerador de la nueva fracción. Se resuelve en el nuevo numerador la suma algebraica resultante.

Por último se multiplican los denominadores de ambas fracciones, y se coloca como denominador de la nueva fracción. En caso de ser necesario, se puede simplificar la fracción.

Ejemplos:

$$\frac{5}{9}+\frac{3}{8}=\frac{(5\cdot 8)+(3\cdot 9)}{9\cdot 8}=\frac{40+27}{72}=\frac{67}{72}$$

$$\frac{6}{7}-\frac{4}{5}=\frac{(6\cdot 5)-(4\cdot 7)}{7\cdot 5}=\frac{30-28}{35}=\frac{2}{35}$$

$$-\frac{10}{6}+\frac{3}{4}=\frac{(-10\cdot 4)+(6\cdot 3)}{(6\cdot 4)}=\frac{-40+18}{24}=\frac{-22}{24}=-\frac{11}{12}$$

$$-\frac{5}{3}-\frac{4}{9}=\frac{(-5\cdot 9)-(3\cdot 4)}{3\cdot 9}=\frac{-45-12}{27}=\frac{-57}{27}=-\frac{19}{9}$$

Con el uso del m.c.m.: Se puede aplicar en cualquier suma o resta de 2, 3 o más fracciones.

Se calcula el m.c.m. (m.c.d) a los denominadores y se coloca éste como denominador del resultado.

Se divide ese denominador entre cada uno de los denominadores de las fracciones (debe ser exacta la división) y el resultado se multiplica por cada uno de los numeradores correspondientes.

Se realiza la suma algebraica de los numeradores, es caso de ser necesario se simplifica la fracción.

Ejemplos:

$$\frac{3}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}=\frac{(15\cdot 3)+(12\cdot 2)+(10\cdot 1)}{60}=\frac{45+24+10}{60}=\frac{79}{60}$$

m.c.m. :

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

m.c.m. = $2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 60$

$$-\frac{4}{20}+\frac{2}{5}-\frac{3}{8}=\frac{(-4\cdot 2)+(2\cdot 8)-(3\cdot 5)}{40}=\frac{-8+16-15}{40}=\frac{-7}{40}$$

$$=-\frac{7}{40}$$

m.c.m. :

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \text{m.c.m.} = 2^3 \cdot 5 = 40$$

$$\frac{6}{24} - \frac{9}{32} + \frac{7}{20} = \frac{(6 \cdot 20) - (9 \cdot 15) + (7 \cdot 24)}{480} = \frac{120 - 135 + 168}{480} = \frac{153}{480}$$

$$= \frac{51}{160}$$

m.c.m. :

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 32 & 2 \\ 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \text{m.c.m.} = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 = 480$$

Sumar o restar un entero con una fracción: Se procede como si se tratase de un número mixto, se multiplica el número entero (con su respectivo signo), por el denominador y se le suma o se le resta el numerador (de acuerdo al signo que tenga la fracción) y ese será el numerador resultante conservando el mismo denominador.

Ejemplos:

$$6 + \frac{3}{5} = \frac{(6 \cdot 5) + 3}{5} = \frac{30 + 3}{5} = \frac{33}{5}$$

$$-5 + \frac{7}{8} = \frac{(-5 \cdot 8) + 7}{8} = \frac{-40 + 7}{8} = \frac{-33}{8} = -\frac{33}{8}$$

$$-6 - \frac{3}{7} = \frac{(-6 \cdot 7) - 3}{7} = \frac{-42 - 3}{7} = \frac{-45}{7} = -\frac{45}{7}$$

Ejercicio:

1.- $5+\frac{4-\frac{3}{2}}{1+\frac{2}{5}}=5+\frac{\frac{5}{2}}{\frac{7}{5}}=5+\frac{25}{14}=\frac{(5\cdot 14)+25}{14}=\frac{70+25}{14}=\frac{95}{14}$

MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES:

El producto de dos o más fracciones, es otra fracción, cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores. También debe realizarse la multiplicación de los signos que tengan las fracciones.

Ejemplo:

$$\frac{8}{7}\cdot\frac{5}{9}=\frac{(8\cdot 5)}{(7\cdot 9)}=\frac{40}{63}$$

$$\left(-\frac{8}{9}\right)\cdot\left(\frac{13}{12}\right)=-\frac{(8\cdot 13)}{(9\cdot 12)}=-\frac{104}{108}=-\frac{52}{54}=-\frac{26}{27}$$

$$\frac{9}{8}\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)=\frac{(9\cdot -3)}{8\cdot 7}=\frac{-27}{56}$$

$$\left(\frac{9}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{9\cdot(-4)\cdot 3}{3\cdot 2\cdot 8}=\frac{-108}{48}=-\frac{54}{24}=-\frac{27}{12}=-\frac{9}{4}$$

DIVISIÓN O COCIENTE DE FRACCIONES:

El cociente de dos fracciones, es otra fracción que resulta de multiplicar la primera fracción por el inverso se la segunda fracción, o multiplicarlas en forma cruzada, el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, el cual será el numerador de la fracción resultante y multiplicar el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción, el cual será el denominador de la fracción resultante. También deberá hacerse la división de los signos.

Ejemplos:

$$\frac{7}{3} \div \frac{5}{8} = \frac{7}{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{56}{15} \qquad \text{ó} \qquad \frac{7}{3} \div \frac{5}{8} = \frac{(7 \cdot 8)}{(3 \cdot 5)} = \frac{56}{15}$$

$$\frac{4}{3} \div \left(-\frac{2}{7}\right) = \frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right) = \frac{4 \cdot (-7)}{3 \cdot 2} = \frac{-28}{6} = -\frac{14}{3}$$

Ejercicio combinado con fracciones:

$$\frac{1}{2} - \left\{\frac{1}{2} - \left[\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)\right] + 3\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{3}\right\} = \frac{1}{2} - \left\{\frac{1}{2} - \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right] + \frac{3}{2} - \frac{5}{3}\right\}$$

$$\frac{1}{2} - \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{5}{3}\right\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + \frac{5}{3}$$

$$\frac{6}{3} - \frac{2}{2} = \frac{(6 \cdot 2) - (3 \cdot 2)}{3 \cdot 2} = \frac{12 - 6}{6} = \frac{6}{6} = 1$$

REGLA DE TRES

La regla de tres es una operación que consiste en encontrar el cuarto término de una proporción, a la que solo se le conocen solo tres términos. La proporción es una igualdad de dos razones.

Puede ser **simple** cuando solamente intervienen en ella dos variables o **compuesta** cuando intervienen tres o más variables.

Toda regla de tres presenta una incógnita y una hipótesis. La hipótesis está constituida por los datos del problema que se conocen y la incógnita por el dato que se busca.

De acuerdo a la relación con la incógnita, puede ser **directa** cuando los aumentos en una variable provocan aumento en la otra variable o **inversa** cuando los aumentos en una variable provocan la disminución en la otra variable.

Ejemplo:

1.- Si necesito 8 litros de pintura para pintar 2 habitaciones, ¿cuántos litros necesito para pintar 5 habitaciones?

Este problema se interpreta de la siguiente manera: la relación es **directa**, dado que, a mayor número de habitaciones hará falta más pintura, y lo que se representa así:

$$\left.\begin{array}{l} 2\ habitaciones\ \rightarrow 8\ litros \\ 5\ habitaciones\ \rightarrow x\ litros \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{8\ litros\ \cdot 5\ habitaciones}{2\ habitaciones} = 20\ litros$$

2.- Si 8 trabajadores construyen un muro en 15 horas, ¿cuánto tardarán 5 trabajadores en levantar el mismo muro?

En este caso se tiene por tanto una relación de proporcionalidad **inversa**, y deberemos aplicar una regla de tres simple inversa, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} 8\ trabajadores\ \rightarrow 15\ horas \\ 5\ trabajadores\ \rightarrow x\ horas \end{array}\right\} \rightarrow x = \frac{8\ trabajadores\ \cdot 15\ horas}{5\ horas} = 24\ horas$$

Regla de tres compuesta:

La regla de tres compuesta se emplea cuando se relacionan tres o más magnitudes, de modo que a partir de las relaciones establecidas entre las magnitudes conocidas se obtiene la desconocida.

Una regla de tres compuesta se compone de varia reglas de tres simples aplicadas sucesivamente.

Como entre las magnitudes se pueden establecer relaciones de proporcionalidad directa e inversa, se pueden distinguir tres casis de regla de tres compuesta:

1.- **Regla de tres compuesta directa:**

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \longrightarrow B_1 \longrightarrow C_1 \longrightarrow D \\ A_2 \longrightarrow B_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \qquad \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{B_1}{B_2} \cdot \frac{C_1}{C_2} = \frac{D}{x}$$

$$x = \frac{A_2 \cdot B_2 \cdot C_2 \cdot D}{A_1 \cdot B_1 \cdot C_1}$$

Ejemplo:

Nueve grifos abiertos durante 10 horas diarias han consumido una cantidad de agua por el valor de 20 bolívares. Averiguar el precio del vertido en 15 grifos abiertos 12 horas durante los mismos días.

A más grifos, más bolívares $\longrightarrow$ Directa

A más horas, más bolívares $\longrightarrow$ Directa

9 grifos $\longrightarrow$ 10 horas $\longrightarrow$ 20 bolívares

15 grifos $\longrightarrow$ 12 horas $\longrightarrow$ x bolívares

$$\frac{9}{15} \cdot \frac{10}{12} = \frac{20}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{90}{180} = \frac{20}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{20 \cdot 180}{90}$$

$$x = 40 \; bolívares$$

2.- **Regla de tres compuesta inversa:**

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \longrightarrow B_1 \longrightarrow C_1 \longrightarrow D \\ A_2 \longrightarrow B_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \qquad \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{B_2}{B_1} \cdot \frac{C_2}{C_1} = \frac{D}{x}$$

$$x = \frac{A_1 \cdot B_1 \cdot C_1 \cdot D}{A_2 \cdot B_2 \cdot C_2}$$

Ejemplo:

Cinco obreros trabajando 6 horas diarias construyen un muro en 2 días. ¿Cuánto tardarán 4 obreros trabajando 7 horas diarias?

A menos obreros, más días ⟶ Inversa

A más horas, menos días ⟶ Inversa

5 obreros ⟶ 6 horas ⟶ 2 días

4 obreros ⟶ 7 horas ⟶ x días

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{2}{x} \quad \rightarrow \quad \frac{28}{30} = \frac{2}{x} \quad \rightarrow \quad x = \frac{2 \cdot 30}{28} \quad \rightarrow \quad x = \frac{60}{28} \quad \rightarrow \quad x = 2{,}14 \; días$$

3.- **Regla de tres compuesta mixta:**

$$\left.\begin{array}{l} A_1 \longrightarrow B_1 \longrightarrow C_1 \longrightarrow D \\ A_2 \longrightarrow B_2 \longrightarrow C_2 \longrightarrow x \end{array}\right\} \qquad \frac{A_1}{A_2} \cdot \frac{B_2}{B_1} \cdot \frac{C_1}{C_2} = \frac{D}{x}$$

$$x = \frac{A_2 \cdot B_1 \cdot C_2 \cdot D}{A_1 \cdot B_2 \cdot C_1}$$

Ejemplo:

Si 8 obreros realizan en 9 días trabajando a razón de 6 horas por día un muro de 30 m. ¿Cuántos días necesitarán 10 obreros trabajando 8 horas diarias para realizar los 50 m de muro que faltan?

A más obreros, menos días $\longrightarrow$ Inversa

A más horas, menos días $\longrightarrow$ Inversa

A más metros, más días $\longrightarrow$ directa

8 obreros $\longrightarrow$ 9 días $\longrightarrow$ 6 horas $\longrightarrow$ 30 m

10 obreros $\longrightarrow$ x días $\longrightarrow$ 8 horas $\longrightarrow$ 50 m

$$\frac{10}{8} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{9}{x} \rightarrow \frac{2.400}{2.400} = \frac{9}{x} \rightarrow 1 = \frac{9}{x} \rightarrow x = 9$$

PORCENTAJE O TANTO POR CIENTO

El **porcentaje** o **tanto por ciento (%),** es una de las aplicaciones más usadas de las **proporciones o razones.**

El porcentaje es una forma de **comparar** cantidades, es una unidad de referencia que relaciona una **magnitud (una cifra o cantidad)** con el **todo que le corresponde (el todo es siempre el 100)**, considerando como unidad la centésima parte del todo.

Ejemplos:

$$1\ centésimo = \frac{1}{100}\ , \quad 5\ centésimos = \frac{5}{100}\ , \quad 50\ centésimos = \frac{50}{100}$$

Nota importante. No olvidar que las fracciones deben expresarse siempre lo más pequeñas posible, deben ser fracciones irreductibles.

¿Qué significa 50 %?: Significa que de una cantidad que se ha dividido en cien partes se han tomado 50 de ellas, o sea, la mitad.

¿Qué significa 25 %?: Significa que de un total de 100 partes se han tomado 25, o sea ¼ (25/100 al simplificar por 5, se reduce a ¼).

Cálculo de Porcentaje

El Porcentaje o Tanto por ciento se calcula a partir de variables **directamente proporcionales** (significa que si una variable aumenta la otra también aumenta y viceversa).

En el cálculo intervienen cuatro componentes:

$$cantidad\ total \ \rightarrow 100\ \%$$

$$cantidad\ parcial \rightarrow porcentaje\ parcial$$

Ejemplo

(Cantidad total) 1.000 Bs. - equivale al - 100 % (porcentaje total)
(Cantidad parcial) 500 Bs. - equivale al - 50 % (porcentaje parcial)

Existen tres situaciones o tipos de problemas que pueden plantearse. Éstos son:

1.- Dada una cantidad total, calcular el número que corresponde a ese porcentaje (%) parcial:

Ejemplo: ¿Cuál (cuanto) es el 20% de 80?

	Cantidad	**Porcentaje**
Total	80	100
Parcial	x	20

Para resolverlo, se hace:

$$\frac{80}{x} = \frac{100}{20} \rightarrow x = \frac{80 \cdot 20}{100} \rightarrow x = \frac{1.600}{100} \rightarrow x = 16$$

Respuesta: el 20 % de 80 es 16.

2.- Calcular el total, dada una cantidad que corresponde a un porcentaje de él.

Ejemplo: Si el 20 % de una cierta cantidad total es 120 ¿Cuál es el total?

Cantidad	**Porcentaje**
x	100
120	20

Para resolverlo, se hace:

$$\frac{x}{120} = \frac{100}{20} \rightarrow x = \frac{100 \cdot 120}{20} \rightarrow x = \frac{12.000}{20} \rightarrow x = 600$$

Respuesta: 120 es el 20 % de un total de 600.

3.- Dado el total y una parte de él, calcular qué % es esa parte del total.

Ejemplo: ¿Qué porcentaje es 40 de 120?

Cantidad	**Porcentaje**
120	100
40	x

Para resolverlo, se hace:

$$\frac{120}{40} = \frac{100}{x} \;\rightarrow\; x = \frac{100 \cdot 40}{120} \;\rightarrow x = \frac{4.000}{120} \rightarrow x = 33{,}33$$

Respuesta: 40 es el 33,33 % de 120.

POTENCIACIÓN

POTENCIACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS (Z) Y RACIONALES (Q)

Se denomina potencia de un número, al producto de varios factores iguales a dicho número.

ELEMENTOS DE UNA POTENCIA:

$$\mathbf{5^3} \qquad \qquad \left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}\right)^{\mathbf{4}}$$

5 = Base 3 = exponente $\quad \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{2}}$ **= Base 4 = exponente**

La base es el factor que se repite y el exponente nos indica las veces que la base se repite, o sea, que se multiplica por sí misma.

Resolver una potencia, significa, multiplicar la base por sí misma tanta veces como lo indica el exponente. Ejemplos:

$$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{81}{16} \quad \text{ó} \quad \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{81}{16}$$

$$(x+1)^3 = (x+1) \cdot (x+1) \cdot (x+1)$$

REGLA DE LOS SIGNOS DE POTENCIACIÓN:

1.- Base positiva y exponente par: El resultado es positivo. Ejemplos:

$$6^2 = 6 \cdot 6 = 36 \qquad \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{9}$$

2.- Base positiva y exponente impar: El resultado es positivo. Ejemplos:

$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \qquad \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{4}{7} = \frac{64}{343}$$

3.- Base negativa y exponente par: El resultado da positivo. Ejemplos:

$$(-3)^2 = -3 \cdot -3 = 9 \qquad \left(-\frac{3}{2}\right)^4 = \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{81}{16}$$

4.- Base negativa y exponente impar: El resultado es negativo. Ejemplos:

$$(-2)^3 = -2 \cdot -2 \cdot -2 = -8 \qquad \left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}$$

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN:

1.- Potencias con exponente cero: Cualquier número o base elevado a potencia "cero" el resultado siempre es igual a "UNO" (1). Ejemplos:

$$4^0 = 1 \qquad (-6)^0 = 1 \qquad \left(\frac{4}{9}\right)^0 = 1 \qquad \left(-\frac{8}{3}\right)^0 = 1$$

2.- Potencias con exponente uno (1): Cualquier base o número elevado a la "UNO", el resultado es igual a la misma base (con el mismo signo). Ejemplos:

$$15^1 = 15 \qquad (-9)^1 = -9 \qquad \left(\frac{9}{5}\right)^1 = \frac{9}{5} \qquad \left(-\frac{3}{2}\right)^1 = -\frac{3}{2}$$

3.- Potencias con exponente negativo: Cuando tenemos un número elevado a un exponente negativo, antes de resolver la potencia, debemos convertir el exponente a positivo y para esto se invierte la base y se le cambia el signo al exponente. Ejemplos:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{-1} = \left(\frac{5}{2}\right)^{1} = \frac{5}{2} \qquad \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^{2} = 4^2 = 16$$

$$8^{-2} = \left(\frac{1}{8}\right)^{2} = \frac{1}{64} \qquad \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{3} = -\frac{27}{8}$$

Ejercicio combinado con exponentes negativos:

$$\left(\frac{3}{2} + \frac{8}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{15+16}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{31}{10}\right)^{-2} = \left(\frac{10}{31}\right)^{2} = \frac{100}{961}$$

$$\left(\frac{6}{5} - \frac{4}{9}\right)^{-2}\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{54-20}{45}\right)^{-2}\left(\frac{8+3}{6}\right)^{-3} = \left(\frac{34}{45}\right)^{-2}\left(\frac{11}{6}\right)^{-3}$$

$$= \left(\frac{45}{34}\right)^{2}\left(\frac{6}{11}\right)^{3} = \left(\frac{2.025}{1.156}\right)\left(\frac{216}{1.331}\right) = \frac{437.400}{1.538.636}$$

$$= \frac{109.350}{384.659}$$

4.- Producto de potencias de igual base: Se coloca la misma base y se suman algebraicamente los exponentes. Ejemplos:

$$6^3 \cdot 6^5 = 6^{3+5} = 6^8$$

$$\left(\frac{5}{7}\right)^{3} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{9} = \left(\frac{5}{7}\right)^{3+9} = \left(\frac{5}{7}\right)^{12}$$

$$(-7)^5 \cdot (-7)^{-2} \cdot (-7)^4 = (-7)^{5+(-2)+4} = (-7)^7$$

$$\left(\frac{6}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^{-3} \cdot \left(\frac{6}{4}\right) \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^0 \cdot \left(\frac{6}{4}\right)^{-7} = \left(\frac{6}{4}\right)^{4+(-3)+1+0+(-7)} = \left(\frac{6}{4}\right)^{-5} = \left(\frac{4}{6}\right)^5 = \frac{1024}{7776}$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} . \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 . \left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^{5-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-2+7} . \left(\frac{2}{3}\right)^{4+1} = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 . \left(\frac{2}{3}\right)^5$$

5.- Cociente de potencias de igual base: Se coloca la misma base y se restan los exponentes. Ejemplos:

$8^5 \div 8^3 = 8^{5-3} = 8^2 = 64$ ó $\frac{8^5}{8^3} = 8^{5-3} = 8^2 = 64$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^6 \div \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{6-2} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16}$$

$$\frac{6^3}{6^5} = 6^{3-5} = 6^{-2} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

$$\frac{5^{12}}{5^{-4}} = 5^{12-(-4)} = 5^{12+4} = 5^{16}$$

$$\frac{3^{-4}}{3^6} = 3^{-4-6} = 3^{-10} = \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$$

$$\frac{3^{-7}}{3^{-2}} = 3^{-7-(-2)} = 3^{-7+2} = 3^{-75} = \left(\frac{1}{3}\right)^5$$

6.- Potencia de una potencia: Se coloca la misma base y se multiplican los exponentes. Ejemplos:

$(6^3)^4 = (6)^{3 \cdot 4} = (6)^{12}$

$[(-8)^{-2}]^4 = (-8)^{-2 \cdot 4} = (-8)^{-8} = \left(-\frac{1}{8}\right)^8$

$(8^5)^0 = (8)^{5 \cdot 0} = 8^0 = 1$

$\left[\left(\frac{5}{7}\right)^3\right]^6 = \left(\frac{5}{7}\right)^{3 \cdot 6} = \left(\frac{5}{7}\right)^{18}$

$\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{-10}\right]^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^{-10 \cdot 3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{-30} = \left(\frac{4}{3}\right)^{30}$

$\left[\left(-\frac{4}{3}\right)^2\right] = \left(-\frac{4}{3}\right)^{2 \cdot 1} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$

7.- Potencia de un producto: Esta propiedad también puede considerarse como una extensión de la anterior; para resolver se multiplica el exponente de cada factor por el exponente del producto. Ejemplos:

$(6 \cdot 5 \cdot 4)^2 = 6^2 \cdot 5^2 \cdot 4^2 = 36 \cdot 25 \cdot 8 = 14.400$

$\left[\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{5}\right)\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{8}{27} \cdot \frac{64}{125} = \frac{512}{3.375}$

$(9^2 \cdot 7^3 \cdot 8^4)^2 = 9^{2 \cdot 2} \cdot 7^{3 \cdot 2} \cdot 8^{4 \cdot 2} = 9^4 \cdot 7^6 \cdot 8^8$

$$\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{4} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-6} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)\right]^{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{4 \cdot 3} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-6 \cdot 3} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{1 \cdot 3}$$

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{-18} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^{12} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{18} \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{3}$$

NOTA: Cuando se presentan ejercicios combinados con potenciación, se debe seguir el siguiente orden:

1.- Se resuelven las potencias.

2.- Se resuelven las multiplicaciones de igual base.

3.- Se resuelven las divisiones de igual base.

Ejercicios con bases literales:

$$X^3 \cdot X^5 = X^{3+5} = X^8$$

$$X^9 \cdot X \cdot X^0 \cdot X^{-3} = X^{9+1+0-3} = X^7$$

$$\frac{m^{10}}{m^3} = m^{10-3} = m^7$$

$$\frac{m^3}{m^8} = m^{3-8} = m^{-5} = \frac{1}{m^5}$$

$$\frac{a^3 \cdot b^6 \cdot z^4}{a^2 \cdot b^6 \cdot z^7} = a \cdot z^{-3} = \frac{a}{z^3}$$

$$(x^4 \cdot y^2)^3 = x^{12} \cdot y^6$$

$$(a^3 \cdot b^{-2} \cdot c^5)^4 = a^{12} \cdot b^{-8} \cdot c^{20} = \frac{a^{12} \cdot c^{20}}{b^8}$$

$$\frac{x^6 \cdot y^3 \cdot z^6 \cdot x^2 \cdot y^{-1} \cdot z}{x^2 \cdot y^5 \cdot z^8} = \frac{x^8 \cdot y^2 \cdot z^7}{x^2 \cdot y^5 \cdot z^8} = \frac{x^6}{y^3 \cdot z}$$

RADICACIÓN Y RACIONALIZACIÓN:

RADICACIÓN: Se dice que la radicación es una operación inversa a la potenciación; extraer la raíz cuadrada de un número, es el proceso inverso de elevar al cuadrado. Se simboliza con $(\sqrt{})$ que se llama raíz o radical.

Elementos de un radical:

Índice

$$\sqrt[3]{x^2}$$

Exponente

Cantidad sub-radical o radicando

El menor índice es el 2 y no se coloca, se llama raíz cuadrada.

Como existe una estrecha relación entre la radicación y la potenciación, a continuación se expresarán raíces en forma de potencias y viceversa.

Expresión de raíces en forma de potencias:

$$\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt[5]{7} = 7^{\frac{1}{5}} \qquad \sqrt[3]{(x-2)^4} = (x-2)^{\frac{4}{3}}$$

Expresión de potencias en forma de raíces:

$$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5} \qquad c^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{c^m} \qquad x^{\frac{4}{9}} = \sqrt[9]{x^4}$$

PROPIEDADES O LEYES DE LA RADICACIÓN:

1.- Raíz de un producto: Es igual al producto de las raíces de cada uno de los factores. Ejemplos:

$$\sqrt[4]{2 \cdot 3} = \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{3} \qquad \sqrt[m]{a \cdot b} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$$

2.- Raíz de un cociente: Es igual a la raíz del numerador entre la raíz del denominador. Ejemplos

$$\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}} \qquad \sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$$

3.- Potencia de una raíz: Se conserva el índice y se eleva la cantidad sub-radical al producto de los exponentes. Ejemplos:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m} \qquad \left(\sqrt[3]{2^2}\right)^4 = \sqrt[3]{2^8} \qquad \left(\sqrt[5]{x^2y^3}\right)^6 = \sqrt[5]{x^{12}\,y^{18}}$$

4.- Raíz de una raíz: Se conserva el exponente de la cantidad sub-radical y se multiplican los índices. Ejemplos:

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a} \qquad \sqrt[3]{\sqrt[4]{5}} = \sqrt[12]{5} \qquad \sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[5]{m}}} = \sqrt[40]{m}$$

OPERACIONES CON RADICALES:

EXTRACCIÓN: Para extraer factores de una raíz, se divide el exponente del factor (número o letra) que se desea extraer, entre el índice de la raíz y el factor que sale se eleva al cociente obtenido. Si la división es inexacta, se procede igual, pero se mantiene dentro de la raíz dicho factor elevado al residuo dado. Para poder extraer un factor, el exponente debe ser igual o mayor que el índice. Cuando se extrae todo el radicando, la raíz se elimina. Ejemplos:

$$\sqrt[3]{x^6 \cdot y^2} = x^2\,\sqrt[3]{y^2}$$

Se divide 6 ÷ 3 por lo tanto queda x^2

$$\sqrt[4]{x^4 \cdot y^7} = x\,y\,\sqrt[3]{y^3}$$

Se divide 4÷4, por lo que queda x y 7 ÷ 4 es igual a 1 con residuo 3

Ejercicios:

1. $\sqrt[4]{x^8} = x^2 \quad \Longrightarrow \quad (8 \div 4 = 2)$
2. $\sqrt[3]{a^6 \cdot b^2} = a^2 \sqrt[3]{b^2} \quad \Longrightarrow \quad (6 \div 3 = 2)$
3. $\sqrt[6]{3^6 \cdot 4^8} = 3 \cdot 4\sqrt[3]{4^2} = 12 \sqrt[3]{16}$

   $(6 \div 6) = 1 \quad y \ (8 \div 6) = 1, con\ residuo = 2$
4. $\sqrt[3]{5^2\, x^6\, y^4\, z^8} = x^2 y\, z^2 \sqrt[3]{5^2 y\, z^2} = x^2 y\, z^2 \sqrt[3]{25 y\, z^2}$
5. $\sqrt[4]{\frac{x^6 y^8 z^9}{m^{12}}} = \frac{x\, y^2\, z^2}{m^3} \sqrt[4]{x^2 z}$

Nota: La extracción se usa como un caso de simplificación de radicales.

MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN DE RADICALES:

Para realizar ambas operaciones es indispensable que los índices de las raíces sean iguales.

Multiplicación: El producto de dos o más radicales, es otro radical del mismo índice y cuya cantidad sub-radical es el producto de las cantidades sub-radicales; si es posible deben simplificarse los resultados. Ejemplos:

1.- $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a \cdot b}$

2.- $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2 \cdot 3} = \sqrt[3]{6}$

3.- $\sqrt[4]{x^2 \cdot y} \cdot \sqrt[4]{x^3 \cdot y} = \sqrt[4]{x^5 \cdot y^2} = x \sqrt[4]{x \cdot y^2}$

4.- $\sqrt[5]{a^3 \cdot b^2} \cdot \sqrt[5]{a^3 \cdot b^4} = \sqrt[5]{a^6 \cdot b^6} = ab \sqrt[5]{a \cdot b}$

División: El cociente o división de dos sub-radicales, es otro radical del mismo índice, cuya cantidad sub-radical es el cociente de las cantidades sub-radicales; si es posible deben simplificarse los resultados. Ejemplos:

1.- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$

2.- $\frac{\sqrt[4]{12}}{\sqrt[4]{6}} = \sqrt[4]{\frac{12}{6}} = \sqrt[4]{2}$

3.- $\frac{\sqrt{x^5 \cdot y^2}}{\sqrt{x^2 \cdot y}} = \sqrt{\frac{x^5 \cdot y^2}{x^2 \cdot y}} = \sqrt{x^3 \cdot y} = x\sqrt{x \cdot y}$

Radicales semejantes: Dos o más radicales son semejantes, cuando tienen el mismo índice y la misma cantidad sub-radical y su utilización es en la suma y resta de radicales. Ejemplos:

1.- $a\sqrt[n]{x}$ y $-b\sqrt[n]{x}$ la semejanza se da por el radical $\sqrt[n]{x}$

2.- $5\sqrt[4]{3}$ y $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{3}$ la semejanza se da por el radical $\sqrt[4]{3}$

Para sumar o restar, verificada la semejanza, se suman algebraicamente los coeficientes y al resultado se le coloca el mismo radical. Ejemplos:

1.- $4\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2} = (4 - 3 + 1)\sqrt[3]{2} = 2\sqrt[3]{2}$

2.- $\frac{1}{2}\sqrt{5} - 8\sqrt{5} + \frac{3}{5}\sqrt{5} = \left(\frac{1}{2} - 8 + \frac{3}{5}\right)\sqrt{5} = -\frac{69}{10}\sqrt{5}$

$(\frac{1}{2} - 8 + \frac{3}{5} = \frac{5-80+15}{10} = -\frac{69}{10})$

3.- $7\sqrt{3} + 2\sqrt{5} - 3\sqrt{3} + 4\sqrt{5} =$

$7\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5} + 4\sqrt{5} =$

$4\sqrt{3} + 6\sqrt{5}$

4.- $5\sqrt{8} - 3\sqrt{2} + \sqrt{8} + 4\sqrt{2} + 10 =$

$5\sqrt{8} + \sqrt{8} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} + 10 =$

$6\sqrt{8} + \sqrt{2} + 10$

RACIONALIZACIÓN

Se puede racionalizar los numeradores, pero en este caso se racionalizarán los denominadores. Racionalizar el denominador de una fracción es convertir una fracción cuyo denominador sea irracional (un radical), en un denominador entero o simplemente eliminarlo.

En los denominadores puede haber monomios (un solo término) o binomios (dos términos).

a.- Con denominador monomio: Se presentan dos casos:

$\frac{2}{\sqrt{3}} \longrightarrow$ El denominador es la raíz cuadrada de un número o letra, se debe eliminar esa raíz y para esto se multiplica ese denominador por el mismo, así se eleva al cuadrado y se elimina la raíz cuadrada. Al multiplicar el denominador también se debe hacer con el numerador. Ejemplo:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Ejercicios:

1.- $\frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$

2.- $\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{3}$

3.- $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{18}}{\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{2\sqrt{18}}{6} = \frac{\sqrt{2 \cdot 3^2}}{3} = \frac{3\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2}$

4.- $\frac{5}{3\sqrt{10}} = \frac{5 \cdot \sqrt{10}}{3\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{3 \cdot \left(\sqrt{10}\right)^2} = \frac{5\sqrt{10}}{3 \cdot 10} = \frac{5\sqrt{10}}{30} = \frac{\sqrt{10}}{6}$

5.- $\frac{x}{\sqrt[3]{x^2 \cdot y}} = \frac{x\sqrt[3]{x \cdot y^2}}{\sqrt[3]{x^2 \cdot y} \cdot \sqrt[3]{x \cdot y^2}} = \frac{x\sqrt[3]{x \cdot y^2}}{\sqrt[3]{x^3 \cdot y^3}} = \frac{x\sqrt[3]{x \cdot y^2}}{x \cdot y} = \frac{\sqrt[3]{x \cdot y^2}}{y}$

En este último ejercicio, se debe multiplicar el numerador y el denominador por un radical que tenga el mismo exponente que la raíz, por lo tanto hay que completar los exponentes del radical del denominador igual al índice de la raíz.

Ejercicios:

1.- $\frac{5}{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2 \cdot c^4}} = \frac{5 \cdot \sqrt[4]{a \cdot b^2}}{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^2 \cdot c^4} \cdot \sqrt[4]{a \cdot b^2}} = \frac{5\sqrt[4]{a \cdot b^2}}{\sqrt[4]{a^4 \cdot b^4 \cdot c^4}} = \frac{5\sqrt[4]{a \cdot b^2}}{abc}$

2.- $\frac{4xy}{\sqrt[3]{x^2 \cdot y \cdot z^4}} = \frac{4xy\ \sqrt[3]{x \cdot y^2 \cdot z^2}}{\sqrt[3]{x^2 \cdot y \cdot z^4} \cdot \sqrt[3]{x \cdot y^2 \cdot z^2}} = \frac{4xy\ \sqrt[3]{x \cdot y^2 \cdot z^2}}{\sqrt[3]{x^3 \cdot y^3 \cdot z^6}} = \frac{4xy\ \sqrt[3]{x \cdot y^2 \cdot z^2}}{x\,yz^2} =$

$\frac{4\sqrt[3]{x \cdot y^2 \cdot z^2}}{z^2}$

En este caso z^4, tiene exponente mayor que el índice de la raíz, por lo que se duplica el índice, o sea, 3 + 3 = 6 y se completa el exponente de z hasta llegar a 6, es decir, se multiplica por z^2.

b.- Con denominador binomio: Para racionalizar el denominador de una fracción, cuando se trata de un binomio que contiene radicales, se multiplican el numerador y el denominador por la "conjugada" del denominador y luego se simplifica

Nota:

La conjugada de un binomio: Si se tiene un binomio $\sqrt{x} + \sqrt{4}$, su conjugada será $\sqrt{x} - \sqrt{4}$; o sea, los mismos términos del binomio pero el signo que los separa se cambia. Ejemplos:

A + B → A – B $\qquad \sqrt{2} - \sqrt{5} \rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{5} \qquad -\sqrt{3} + 7 \rightarrow -\sqrt{3} - 7$

Un binomio por su conjugada: esto equivale a un caso de productos notables, que se refiere a una suma por su diferencia, y que es igual a una diferencia de cuadrados (el cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término). Ejemplos:

$$(a + b) = a^2 - b^2$$

$$\left(\sqrt{3} + 1\right)\left(\sqrt{3} - 1\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$$

$$\left(2\sqrt{5}-7\right)\left(2\sqrt{5}+7\right) = \left(2\sqrt{5}\right)^2 - 7^2 = 4 \cdot 5 - 49 = 20 - 49 = -29$$

Ejercicios:

1.- $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2-\sqrt{6}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{2-\sqrt{6}}{2-3} = \frac{2-\sqrt{6}}{-1} =$

$-(2-\sqrt{6}) = -2+\sqrt{6}$

2.- $\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{7}}{2\sqrt{5}+\sqrt{7}} = \frac{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)}{\left(2\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{5}-\sqrt{7}\right)} = \frac{\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(2\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{7}\right)-\left(\sqrt{7}\right)\left(2\sqrt{5}\right)+\left(\sqrt{7}\right)^2}{\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2} =$

$$\frac{\left(2\sqrt{5}\right)^2 - 2\sqrt{35} - 2\sqrt{35} + 7}{20-7} = \frac{10-4\sqrt{35}+7}{13} = \frac{17-4\sqrt{35}}{13}$$

3.- $\frac{3}{3\sqrt{3}+2} = \frac{3\left(3\sqrt{3}-2\right)}{\left(3\sqrt{3}+2\right)\left(3\sqrt{3}-2\right)} = \frac{9\sqrt{3}-6}{\left(3\sqrt{3}\right)^2-2^2} = \frac{9\sqrt{3}-6}{27-4} = \frac{9\sqrt{3}-6}{23}$

PRODUCTOS NOTABLES

Son ciertos productos o multiplicaciones que cumplen reglas fijas y cuyos resultados pueden ser determinados por simple inspección, sin necesidad de efectuar la multiplicación.

Productos notables de 2do grado:

1.- Cuadrado de una suma: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Enunciado: El cuadrado del primer término, más el doble producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

Esta fórmula se aplica a cualquier cuadrado de una suma, luego se efectúan las operaciones matemáticas correspondientes, tales como multiplicaciones numéricas y literales y de signos.

Ejercicios:

1.- $(x+3)^2 = x^2 + 2(x)(3) + 3^2 = x^2 + 6x + 9$

2.- $(2x+3y)^2 = (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

3.- $(5x^{10} + 4x^4y^5)^2 = (5x^{10})^2 + 2(5x^{10})(4x^4y^5) + (4x^4y^5)^2 =$

$25x^{20} + 40x^{14}y^5 + 16x^8y^{10}$

4.- $\left(\frac{2}{3}a^3b + \frac{4}{5}a^5b^2\right)^2 = \left(\frac{2}{3}a^3b\right)^2 + 2\left(\frac{2}{3}a^3b\right)\left(\frac{4}{5}a^5b^2\right) + \left(\frac{4}{5}a^5b^2\right)^2 =$

$$\frac{4}{9}a^6b^2 + \frac{16}{15}a^8b^3 + \frac{16}{25}a^{10}b^4$$

5.- $(x^{m+1} + y^{m-2})^2 = (x^{m+1})^2 + 2(x^{m+1})(y^{m-2}) + (y^{m-2})^2 =$

$$x^{2m+2} + 2x^{m+1}y^{m-2} + y^{2m-4}$$

6.- $(5a^{x-2}b^3 + 3a^{2x+3}b^{x-2})^2 =$

$$(5a^{x-2}b^3)^2 + 2(5a^{x-2}b^3)(3a^{2x+3}b^{x-2}) + (3a^{2x+3}b^{x-2})^2 =$$

$$(25a^{2x-4}b^6) + (30a^{3x+1}b^{x+1}) + (9a^{4x+6}b^{2x-4})$$

2.- Cuadrado de una diferencia: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Enunciado: El cuadrado del primer término, menos el doble producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

Ejercicios:

1.- $(x-5)^2 = x^2 - 2(x)(5) + 5^2 = x^2 - 10x + 25$

2.- $(4a^2 - 2b^3)^2 = (4a^2)^2 - 2(4a^2)(2b^3) + (2b^3)^2 =$

$$16a^4 - 16a^2b^3 + 4b^6$$

3.- $(10m^5n^2 - 7m^3n)^2 = (10m^5n^2)^2 - 2(10m^5n^2)(7m^3n) + (7m^3n)^2$

$$100m^{10}n^4 - 140m^8\,n^3 + 49m^6n^2$$

4.- $\left(\frac{x}{5} - \frac{1}{10}x^3y\right)^2 = \left(\frac{x}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{5}\right)\left(\frac{1}{10}x^3y\right) + \left(\frac{1}{10}x^3y\right)^2$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{2x^4y}{50} + \frac{1}{100}x^6y^3 = \frac{x^2}{25} - \frac{x^4y}{25} + \frac{1}{100}x^6y^3$$

5.- $(8x^{2m+3} - 6x^{m-3})^2 = (8x^{2m+3})^2 - 2(8x^{2m+3})(6x^{m-3}) + (6x^{m-3})^2$

$$64x^{4m+6} - 96x^{3m} + 36x^{2m-6}$$

3.- Producto de una suma por su diferencia: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Enunciado: El cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término.

Ejercicios:

1.- $(x+7)(x-7) = x^2 - 7^2 = x^2 - 49$

2.- $(4a^3 + 2b^4)(4a^3 - 2b^4) = (4a^3)^2 - (2b^4)^2 = 16a^6 - 4b^8$

3.- $(8xy+1)(8xy-1) = (8xy)^2 - (1)^2 = 64x^2y^2 - 1$

4.- $\left(\frac{x}{4} + y^3\right)\left(\frac{x}{4} - y^3\right) = \left(\frac{x}{4}\right)^2 - (y^3)^2 = \frac{x^2}{16} - y^6$

5.- $\left(\frac{8}{9}x^3 + \frac{10}{3}xy^4\right)\left(\frac{8}{9}x^3 + \frac{10}{3}xy^4\right) = \left(\frac{8}{9}x^3\right)^2 - \left(\frac{10}{3}xy^4\right)^2 =$

$$\frac{64}{81}x^6 - \frac{100}{9}x^2y^8$$

4.- Producto de un binomio que tienen un término común:

$$(x \pm a)(x \pm b) = x^2 + (a \pm b)x + (a)(b)$$

Enunciado: El cuadrado del término común (x), más la suma algebraica de los términos no comunes (a y b), más el producto de los no comunes (a)(b) con sus respectivos signos.

Se pueden presentar cuatro situaciones diferentes:

$$(x+a)(x+b) \qquad (x+a)(x-b) \qquad (x-a)(x+b) \qquad (x-a)(x-b)$$

Ejercicios:

1.- $(x+5)(x+6) = x^2 + \left((6x) + (5x)\right) + (6)(5) = x^2 + 11x + 30$

2.- $(x+5)(x-6) = x^2 + \left((-6x) + (5x)\right) + (-6)(5) = x^2 - x - 30$

3.- $(x-5)(x+6) = x^2 + \left((6x) + (-5x)\right) + (6)(-5) = x^2 + x - 30$

4.- $(x-5)(x-6) = x^2 + \left((-6x) + (-5x)\right) + (-6)(-5) = x^2 - 11x + 30$

5.- $(a^8+3)(a^8-7) = (a^8)^2 + \left((-7a^8) + (3a^8)\right) - (3)(7) = a^{16} - 4a^8 - 21$

6.- $(z^3-12)(z^3+4) = (z^3)^2 + \left((4z^3) + (-12z^3)\right) - (4)(-12) = z^6 - 8z^3 - 48$

7.- $(y-9)(y-8) = y^2 + \left((-8y) + (-9y)\right) + (-9)(-8) = y^2 - 17y + 72$

5.- Producto de dos binomios sin términos comunes: Se procede hacer las multiplicaciones como en la propiedad distributiva.

Ejercicios:

1.- $(3x-9)(x+1) = (3x^2) + (3x) - (9x) + (-9)(1) = 3x^2 - 6x - 9$

2.- $(x+5)(y-4) = (xy) + 4x + 5y + (5)(-4) = xy + 4x + 5y - 20$

3.- $(4x^2+7x)(3x^3+2x) = 12x^5 + 8x^3 + 21x^4 + 14x^2$

4.- $(5a^4-6a^3)(a^3+2a^4) = 5a^7 + 10a^8 - 6a^6 - 12a^7 = 10a^8 - 7a^7 - 6a^6$

6.- Productos notables al cubo:

Cubo de una suma: $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Enunciado: El cubo del primer término más el triple producto del primer término al cuadrado por el segundo más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo más el cubo del segundo término.

Ejercicios:

1.- $(x+2)^3 = x^3+3x^2(2)+3x(2)^2+(2)^3 = x^3+6x^2+12x+8$

2.- $(4x^3+2x^4)^3 = (4x^3)^3+3(4x^3)^2(2x^4)+(34x^3)(2x^4)^2+(2x^4)^3 =$

$64x^9+3(16x^6)2x^4+3(4x^3)(4x^8)+8x^{12} = 64x^9+96x^{10}+48x^{11}+8x^{12}$

3.-$\left(\frac{2}{5}a^5+\frac{4}{5}a^2b\right)^3 = \left(\frac{2}{5}a^5\right)^3+3\left(\frac{2}{5}a^5\right)^2\left(\frac{4}{5}a^2b\right)+3\left(\frac{2}{5}a^5\right)\left(\frac{4}{5}a^2b\right)^2+\left(\frac{4}{5}a^2b\right)^3$

$$\frac{8}{125}a^{15}+\frac{48}{125}a^{12}b+\frac{96}{125}a^9b^2+\frac{64}{125}a^6b^3$$

Cubo de una diferencia: $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Enunciado: El cubo del primer término menos el triple producto del primer término al cuadrado por el segundo más el triple producto del primer término por el cuadrado del segundo menos el cubo del segundo término.

Ejercicios:

1.- $(x-3)^3 = x^3-3x^2(3)+3x(3)^2-(3)^3 = x^3-9x^2+27x-27$

2.- $(5m^4-3m^2n)^3 = (5m^4)^3-3(5m^4)^2(3m^2n)+3(5m^4)(3m^2n)^2-(3m^2n)^3 =$

$$125m^{12}-225m^{10}n+135m^8n^2-27m^6n^3$$

3.- $\left(\frac{1}{2}a^6-\frac{2}{3}a^3b^2\right)^3 = \left(\frac{1}{2}a^6\right)^3-3\left(\frac{1}{2}a^6\right)^2\left(\frac{2}{3}a^3b^2\right)+3\left(\frac{1}{2}a^6\right)\left(\frac{2}{3}a^3b^2\right)^2-\left(\frac{2}{3}a^3b^2\right)^3$

$$\frac{1}{8}a^{18}-\frac{6}{12}a^{15}b^2+\frac{12}{18}a^{12}b^4-\frac{8}{27}a^9b^6$$

$$=\frac{1}{8}a^{18}-\frac{1}{2}a^{15}b^2+\frac{2}{3}a^{12}b^4-\frac{8}{27}a^9b^6$$

Ejercicios Propuestos:

1.- $(7x+5)^2 =$

2.- $(4x^5-2x^{10})^3 =$

3.-$(x-1)(x-5) =$

4.- $(2x^3+7)^3 =$

5.- $\left(\frac{4}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2\right)\left(\frac{4}{3}a^3+\frac{1}{2}a^2\right)$

6.- $(a^5 - 8)^3 =$

7.- $(5a^3 - 3a)^2 =$

8.- $(5x^3 - 2x)(4x^2 + 7) =$

9.- $(x + 9)(x - 7) =$

10.- $(4y + 3y^5)^2 =$

11.- $(5x^2 + 1)(5x^2 - 1) =$

FACTORIZACIÓN

Significa descomponer en factores un polinomio o ecuación, en un producto de dos o más factores.

Se presentan diversos casos, la mayoría de ellos se fundamentan en las fórmulas de los productos notables.

1.- **Trinomios de cuadrados perfectos:**

Primer caso: suma

Es una operación contraria al primer caso de productos notables (cuadrado de una suma).

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \longrightarrow$ Producto notable

$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \longrightarrow$ Factorización

Procedimiento: Se calculan las raíces cuadradas del primer y del tercer término, los cuales deben ser enteros y positivos, luego se calcula el término del medio que debe ser el doble producto de las raíces obtenidas.

Ejercicios:

1.- $x^2 + 10x + 25 = \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad \left(\sqrt{25}\right)^2 = 5$

$(x)^2 + 2(x)(5) + (5)^2 = (x+5)^2$

2.- $x^2 + 18x + 81 = \quad \rightarrow \quad \left(\sqrt{x}\right)^2 = x \quad \left(\sqrt{81}\right)^2 = 9$

$(x)^2 + 2(x)(9) + (9)^2 = (x+9)^2$

3.- $4y^2 + 20y + 25 = \quad \rightarrow \left(\sqrt{4y^2}\right)^2 = 2y \quad \left(\sqrt{25}\right)^2 = 5$

$(2y)^2 + 2(2y)(5) + (5)^2 = (2y+5)^2$

4.- $16x^6 + 24x^4 + 9x^2 = \quad \rightarrow \left(\sqrt{16x^6}\right)^2 = 4x^3 \quad \left(\sqrt{9x^2}\right)^2 = 3x$

$(4x^3)^2 + 2(4x^3)(3x) + (3x)^2 = (4x^3 + 3x)^2$

5.- $49x^4y^2 + 14x^2y + 1 = \quad \rightarrow \left(\sqrt{49x^4y^2}\right)^2 = 7x^2y \quad \left(\sqrt{1}\right)^2 = 1$

$(7x^2y)^2 + 2(7x^2y)(1) + (1)^2 = (7x^2y + 1)^2$

Segundo caso: resta

Es una operación contraria al segundo caso de productos notables (cuadrado de una diferencia).

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ ⟶ Producto notable

$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ ⟶ Factorización

Ejercicios:

1.- $x^2 - 10x + 25 =$ $\rightarrow$ $(\sqrt{x}) = x$ $(\sqrt{25}) = 5$

$(x)^2 - 2(x)(5) + (5)^2 = (x-5)^2$

2.- $x^2 - 12x + 36 =$ $\rightarrow$ $(\sqrt{x}) = x$ $(\sqrt{36}) = 6$

$(x)^2 - 2(x)(56) + (6)^2 = (x-6)^2$

3.- $16x^4 - 8x^2y^3 + y^6 =$ $\rightarrow (\sqrt{16x^4}) = 4x^2$ $(\sqrt{y^6}) = y^3$

$(4x^2)^2 - 2(4x^2)(y^3) + (y^3)^2 = (4x^2 - y^3)^2$

4.- $y^2 - 6xy + 9x^2 =$ $\rightarrow (\sqrt{y^2}) = y$ $(\sqrt{9x^2}) = 3x$

$(y)^2 - 2(y)(3x) + (3x)^2 = (y-3x)^2$

5.- $49x^2 - 56x + 16 =$ $\rightarrow (\sqrt{49x^2}) = 7x$ $(\sqrt{16}) = 4$

$(7x)^2 - 2(7x)(4) + (4)^2 = (7x-4)^2$

Casos parecidos pero que no son cuadrados perfectos:

a.- $x^2 - 8 - 16 =$ $\rightarrow (x^2)$ y (16) son cuadrados perfectos, sus raíces son (x) y (4) pero no se pueden factorizar por ser el tercer término negativo (-16).

b.- $x^2 + 10 \mp 9 =$ $\rightarrow (x^2)$ y (9) son cuadrados perfectos, sus raíces son (x) y (3) pero el doble producto de sus raíces 2(x)(3)= es diferente al término del medio (10x).

c.- $x^3 + 10x + 25$ ó $x^4 + 10x + 20$ → no son trinominos de cuadrados perfectos, en el primer término (x^3) y en el segundo (20), no es cuadrado perfecto no tiene raíz exacta.

Tercer caso: Diferencia de cuadrados perfectos

Es la operación contraria al tercer caso de producto notable (una suma por su diferencia)

$$(a+b)(a-b) = (a^2 - b^2) \rightarrow \text{Producto notable}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

↓ ↓

a b

Procedimiento: Se verifica calculándole las raíces (cuadradas) a los dos términos $(a^2)\ y\ (b^2)$, si las raíces dan exactas $(a) y (b)$ y se trata de una resta, entonces se toman las dos raíces, y se coloca el producto de la suma por la resta de ambos términos.

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ejercicios:

1.- $16x^2 - 49 = (4x+7)(4x-7)$ $\left(\sqrt{16x^2}\right)^2 = 4x$ $\left(\sqrt{49}\right)^2 = 7$

2.- $4a^2 - 9x^2 = (2a+3x)(2a-3x)$ $\left(\sqrt{4a^2}\right)^2 = 2a$ $\left(\sqrt{9x^2}\right)^2 = 3x$

3.- $49 - 100x^2 = (7+10x)(7-10x)$ $\left(\sqrt{49}\right)^2 = 7$ $\left(\sqrt{100x^2}\right)^2 = 10x$

4.- $\frac{x^4}{9} - \frac{y^8}{25} = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{y^4}{5}\right)\left(\frac{x^2}{3} - \frac{y^4}{5}\right)$ $\left(\sqrt{\frac{x^4}{9}}\right)^2 = \frac{x^2}{3}$ $\left(\sqrt{\frac{y^8}{25}}\right)^2 = \frac{y^4}{5}$

5.-

$$\frac{9}{25}x^6 - \frac{1}{4}x^2 = \left(\frac{3x^3}{5} + \frac{x}{2}\right)\left(\frac{3x^3}{5} - \frac{x}{2}\right) \quad \left(\sqrt{\frac{9}{25}x^6}\right)^2 =$$

$$\frac{3x^3}{5} \quad \left(\sqrt{\frac{1}{4}x^2}\right)^2 = \frac{x}{2}$$

Cuarto caso: Trinomio de la forma a$x^2 + bx + c$. Producto de dos binomios:

El producto de dos binomios con un término común, cuyo resultado es un trinomio.

$$(x \pm a)(x \pm b) = x^2 + (a \pm b)x + (\pm a)(\pm b)$$

$$(x+5)(x-3) = x^2 + (5-3)x + (5)(-3) = x^2 + 2x - 15$$
$$\rightarrow producto\ notable$$

Ahora para factorizar este trinomio $x^2 + 2x - 15$, no se puede realizar por ninguno de los casos anteriores, por lo que se tiene este cuarto caso:

Procedimiento:

1.- Se calcula la raíz cuadrada del primer término (x) para verificar que es un cuadrado perfecto y se coloca como primer término de ambos binomios.

(x)(x)

2.- El signo del primer binomio es el signo del segundo término y el signo de del segundo binomio es la multiplicación de los signos del segundo y del tercer término.

(x +)(x-)

3.- Para buscar los segundos términos de cada uno de los binomios, se buscan dos números que sumados o restados del como resultado el mismo número del segundo término (+2) y que multiplicados den como resultado el tercer término (-15).

$$x^2 + 2x - 15 = (x + 5)(x - 3)$$

Ejercicios:

1.- $x^2 + 10x + 21 = (x + 7)(x + 3)$ $(7 + 3) = 10$ $(7)(3) = 21$

2.- $x^2 - 10x + 24 = (x - 6)(x - 4)$ $(-6 - 4) = -10$ $(-6)(-4) = 21$

3.- $x^2 + 11x + 24 = (x + 8)(x + 3)$ $(8 + 3) = 11$ $(8)(3) = 24$

4.- $x^2 - 7x + 10 = (x - 5)(x - 2)$ $(-5 - 2) = -7$ $(-5)(-2) = 10$

5.- $x^2 + x - 42 = (x + 7)(x - 6)$ $(7 - 6) = 1$ $(7)(-6) = -42$

6.- $x^2 - 3x - 4 = (x - 4)(x + 1)$ $(-4 + 1) = -3$ $(-4)(1) = -4$

Quinto caso: Factor Común

Está basada en la propiedad distributiva de la multiplicación, es la operación contraria a ella. Ejemplo:

Sea el polinomio P(x) = $2x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 16x$, para sacar el factor común, se procede de la siguiente manera:

Se calcula el MCD de la parte numérica del dicho polinomio.

$$\begin{array}{r|l} 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

MCD= 2 (comunes con el menor exponente)

Luego se saca el de la parte literal, se toma el que tenga el menor exponentes, en este caso es "x", por lo que el factor común será "2x".

Por último se divide cada término por "2x"

$$\frac{2x^4}{2x} = x^3 \qquad \frac{6x^3}{2x} = 3x^2 \qquad \frac{8x^2}{2x} = 4x \qquad \frac{16x}{2x} = 8$$

Queda el polinomio: P(x) = $2x\ (x^3 - \ 3x^2 + \ 4x + 8)$

Ejercicios:

1.- $5x^6 - \ 10x^4 + 15x^2 = 5x^2(x^4 - \ 2x^2 + 3)$ Factor común: $5x^2$

2.- $6x^4 + 24x^7 - 18x^3 - 9x^{11} = 3x^3(2x + \ 8x^4 - 6 - 9x^8)$

3.- $\frac{6}{5}a^3 - \frac{9}{5}a^2 + \frac{3}{5} = \frac{3}{5}(2a^3 - 3a^2 + 1)$

4. - $2x(a-1) - z(a-1) = \ (a-1)(2x-z)$ El factor que se repite en ambos términos es $(a-1)$ por lo tanto es el factor común.

5.- $(n+2)(n-1) - \ (n-1)(n-3) = \ (n-1)[(n+2)-(n-3)]$ Factor común $(n-1)$.

Sexto caso: suma de cubos perfectos

Son binomios de la forma $a^3 + b^3$, donde las raíces cúbicas de los términos a^3 y b^3, son enteras (a) y (b), su fórmula será:

$$(a^3 + b^3) = (a+b)[a^2 - ab + b^2]$$

Enunciado: Es igual al producto de la suma de las raíces cúbicas por el factor determinado por el cuadrado de la primera raíz a^2 menos el producto de las dos raíces $(a) \cdot (b)$ mas el cuadrado de la segunda raíz b^2.

Ejercicios:

1.- $8x^3 + 64 = (2x+4)[(2x)^2 - (2x)(4) + (4)^2] = (2x+4)(4x^2 - 8x + 16)$

$\sqrt[3]{8x^3} = 2x$ $\sqrt[3]{64} = \ \sqrt[3]{4^3} = 4$ → raíces cúbicas

2.- $125a^3 + 512 = (5a+8)[(5a)^2 - (5a)(8) + (8)^2] = (5a+8)(5a^2 - 40a + 64)$

$\sqrt[3]{125a^3} = 5a$ $\sqrt[3]{512} = \ \sqrt[3]{8^3} = 8$ → raíces cúbicas

3.- $27n^9 + 8m^3 = (3n^3 + 2m)[(3n^3)^2 - (3n^3)(2m) + (2m)^2] =$

$(3n^3 + 8)(9n^6 - 36n^3m + 4m^2)$

$\sqrt[3]{27n^9} = 3n^3$ $\sqrt[3]{8m^3} = 2m$ → raíces cúbicas

Séptimo caso: Diferencia de cubos perfectos

Son binomios de la forma $a^3 - b^3$, donde las raíces cúbicas de los términos son números enteros. Su fórmula es:

$$(a^3 - b^3) = (a - b)[a^2 - ab + b^2]$$

Ejercicios:

1.- $8x^3 - 125 = (2x - 5)[(2x)^2 + (2x)(5) + (5)^2] = (2x - 5)(4x^2 + 10x + 25)$

$\sqrt[3]{8x^3} = 2x$ $\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$ → raíces cúbicas

2.- $a^6 - b^{12} = (a^2 - 5)[(a^2)^2 + (a^2)(b^4) + (b^4)^2] = (a^2 - b^4)(a^4 + a^2b^4 + b^8)$

$\sqrt[3]{a^6} = a^2$ $\sqrt[3]{b^{12}} = b^4$ → raíces cúbicas

3.- $216x^6 - 1000y^9 = (6x^2 - 10y^3)[(6x^2)^2 + (6x^2)(10y^3) + (10y^3)^2] =$

$(6x^2 - 10y^3)(36x^4 + 60x^2y^3 + 100y^6)$

$\sqrt[3]{216x^6} = 6x^2$ $\sqrt[3]{1000y^9} = 10y^3$ → raíces cúbicas

Octavo caso: Factorización con el uso de la resolvente

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Cuando se tienen polinomios o ecuaciones de segundo grado que no podemos factorizar a través de los casos anteriores, se puede proceder como una simple ecuación de segundo grado y se utiliza la resolvente.

Ejemplo: Factorizar la siguiente expresión $x^2 - 5x + 6$

Se iguala a cero para convertirla en una ecuación de segundo grado

$x^2 - 5x + 6 = 0$, donde: a=1; b= -5 y c= 6, se toman los coeficientes que acompañan a la variable x, luego se sustituye en la fórmula

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_1 = \frac{5 + 1}{2} \rightarrow x_1 = \frac{6}{2} \rightarrow x_1 = 3 \rightarrow (x - 3) = 0$$

$$x_2 = \frac{5 - 1}{2} \rightarrow x_2 = \frac{4}{2} \rightarrow x_2 = 2 \rightarrow (x - 2) = 0$$

Se le cambia el signo al resultado de las raíces, ahora se multiplican los binomios resultantes:

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

Ejercicios:

1.- $2x^2 - 7x + 3 = 0$ a=2 b= -7 c= 3

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(2)(3)}}{2(2)}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4} \rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x_1 = \frac{7 + 5}{4} \rightarrow x_1 = \frac{12}{4} \rightarrow x_1 = 3 \rightarrow (x - 3) = 0$$

$$x_2 = \frac{7 - 5}{4} \rightarrow x_2 = \frac{2}{4} \rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$2x^2 - 7x + 3 = (x - 3)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

2.- $3x^2 - 8x - 3 = 0$ a=3 b= -8 c= -3

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(3)(-3)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64+36}}{6} \rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{100}}{6}$$

$$x_1 = \frac{8+10}{6} \rightarrow x_1 = \frac{18}{6} \rightarrow x_1 = 3 \rightarrow (x-3) = 0$$

$$x_2 = \frac{8-10}{6} \rightarrow x_2 = -\frac{2}{6} \rightarrow x_2 = -\frac{1}{3} \rightarrow \left(x + \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$3x^2 - 8x - 3 = (x-3)\left(x+\frac{1}{3}\right)$$

Noveno caso: Factorización por Ruffini (Polinomios de cualquier grado)

Consiste en descomponer el polinomio en un producto de factores.

Regla de Ruffini:

Procedimiento: Se ordena el polinomio dividiendo en forma descendiente (me mayor a menor) y se completa si es necesario; luego se toman los coeficientes en orden y se colocan en línea.

Para dividir: sean los polinomios P(x) = $3x^3 + 4 + x^4 + 2x$ para dividirlo entre Q(x) = x+1

Ordenamos y completamos $x^4 + 0x^3 + 3x^2 + 2x + 4 \div (x+1)$, se toman los coeficientes del primer polinomio y se divide entre el término independiente del divisor pero con signo contrario, o sea, por -1

	1	3	0	2	4
-1		-1	-2	2	-4
	1	2	-2	4	0

El último término se elimina, como da cero la división es exacta, el resultado será un polinomio de menor grado → $x^3 + 2x^2 - 2x + 4$.

Hay casos de división de polinomios, cuyo resultado no es exacto, o sea que el resto o residuo es diferente de cero. Ejemplo:

Sea el polinomio P(x) = $7x^4 - 5x^2 + 3x - 2$ para dividirlo entre Q(x) = x-2, sea realiza igual que en el caso anterior, se ordena de forma decreciente y se completa el polinomio.

P(x) = $7x^4 \mp 0x^3 - 5x^2 + 3x - 2 \div (x - 2)$

	7	0	-5	3	-2	
2		14	28	46	98	
	7	14	23	49	96	$\rightarrow resto$

$$D \div d = c + R$$

Para factorizar utilizando la Regla de Ruffini, se procede como una división, pero debe continuarse hasta el final, dividiendo cada uno de los polinomios de menor grado (resultantes) e ir eliminando en cada paso el último término (independiente), o sea, haciéndolo igual a cero y así descomponer el polinomio en factores.

Ejercicio: Descomponer el polinomio P(x) = $x^4 + 6x^3 + 8x^2 - 6x - 9$, en factores, para ello debemos encontrar número (divisores) que anulen el polinomio, el resto debe ser cero.

	1	6	8	-6	-9	
1		1	7	15	9	$x_1 = 1 \rightarrow (x - 1)$
	1	7	15	9	0	
-1		-1	-6	- 9		$x_2 = -1 \rightarrow (x + 1)$
	1	6	9	0		
-3		-3	-9			$x_3 = -3 \rightarrow (x + 3)$
	1	3	0			
-3		-3				$x_4 = -3 \rightarrow (x + 3)$
	1	0				

$$R = (x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 3)$$

Se ha descompuesto el polinomio, en un producto de cuatro binomios.

Existen situaciones en que el polinomio no se puede factorizar totalmente por Ruffini; por lo que puede utilizarse otro método para concluirlo.

Ejercicios:

1.- Descomponer el polinomio P(x) = $x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 7x + 3$ en factores

$$
\begin{array}{r|rrrrr l}
 & 1 & 5 & 8 & 7 & 3 & \\
-1 & & -1 & -4 & -4 & -3 & x_1 = -1 \rightarrow (x+1) \\
\hline
 & 1 & 4 & 4 & 3 & 0 & \\
-3 & & -3 & -3 & -3 & & x_2 = -3 \rightarrow (x+3) \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 0 & &
\end{array}
$$

Como no se puede seguir factorizando por Ruffini, se procede a formar el polinomio cociente de la siguiente manera $x^2 + x + 1$ (segundo grado) y se aplica la resolvente para obtener las dos raíces que faltan:

$x^2 + x + 1 = 0$ a=1 b= 1 c= 1

$$x = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

Como la cantidad sub-radical es negativa (-3) no tiene solución en el campo de los reales, por lo que el polinomio queda de la siguiente manera:

$$(x+1)(x+3)(x^2 + x + 1)$$

2.- Descomponer el polinomio P(x) = $x^5 - 7x^4 + 14x^3 - 2x^2 - 15x + 9$ en factores

	1	-7	14	-2	-15	9	
1		1	-6	8	6	-9	$x_1 = 1 \to (x-1)$
	1	-6	8	6	-9	0	
-1		-1	7	-15	9		$x_2 = -1 \to (x+1)$
	1	-7	15	-9	0		
3		3	-12	9			$x_2 = 3 \to (x-3)$
	1	-4	3	0			

Como no se puede seguir factorizando con Ruffini, se forma un polinomio con el cociente $x^2 - 4x + 3$, como es una ecuación de segundo grado, se aplica la resolvente

$x^2 - 4x + 3 = 0$ a=1 b= -4 c= 3

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} \to x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2}$$

$$x_1 = \frac{4+2}{2} \to x_1 = \frac{6}{2} \to x_1 = 3 \to (x-3) = 0$$

$$x_2 = \frac{4-2}{2} \to x_2 = \frac{2}{2} \to x_2 = 1 \to (x-1) = 0$$

$$x^5 - 7x^4 + 14x^3 - 2x^2 - 15x + 9 = (x-1)(x+1)(x-3)(x-3)(x-1)$$

3.- Descomponer el polinomio P(x) = $x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$ en factores

	1	4	3	-4	-4	
-1		-1	-3	0	4	$x_1 = -1 \rightarrow (x + 1)$
	1	3	0	-4	0	
1		1	4	4		$x_2 = \ 1 \rightarrow (x - 1)$
	1	4	4	0		
-2		-2	-4			$x_2 = -2 \rightarrow (x + 2)$
	1	2	0			
-2		-2				$x_2 = -2 \rightarrow (x + 2)$
	1	0				

$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x + 2)$$
$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = (x + 1)(x - 1)(x + 2)^2$$

4.- Descomponer el polinomio P(x) = $x^3 + x^2 - x - 1$ en factores

	1	1	-1	-1	
-1		-1	0	1	$x_1 = -1 \rightarrow (x + 1)$
	1	0	-1	0	
1		1	1		$x_2 = \ 1 \rightarrow (x - 1)$
	1	1	0		
-1		-1			$x_2 = -1 \rightarrow (x + 1)$
	1	0			

$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x + 1)(x - 1)(x + 1)$$
$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x + 1)^2(x - 1)$$

5.- Descomponer el polinomio P(x) = $x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4$ en factores

	1	-4	3	4	-4	
1		1	-3	0	4	$x_1 = 1 \to (x-1)$
	1	-3	0	4	0	
-1		-1	4	-4		$x_2 = -1 \to (x+1)$
	1	-4	4	0		
2		2	-4			$x_2 = 2 \to (x-2)$
	1	-2	0			
2		2				$x_2 = 2 \to (x-2)$
	1	0				

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 4x - 4 = (x-1)(x+1)(x+2)(x+2)$$
$$x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4 = (x+1)(x-1)(x-2)^2$$

6.- Descomponer el polinomio P(x) = $x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ en factores

	1	4	5	2	
-1		-1	-3	-2	$x_1 = -1 \to (x+1)$
	1	3	2	0	
-1		-1	-2		$x_2 = -1 \to (x+1)$
	1	2	0		
-2		-2			$x_2 = -2 \to (x+2)$
	1	0			

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = (x+1)(x+1)(x+2)$$
$$x^3 + x^2 - x - 1 = (x+1)^2(x+2)$$

ECUACIONES LINEALES, ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO, SISTEMA DE ECUACIONES, INECUACIONES LINEALES, SISTEMAS DE INECUACIONES, INECUACIONES CON CALOR ABSOLUTO

ECUACIÓN: Una ecuación es una igualdad que se verifica para ciertos valores de las incógnitas que en ella intervienen. Las ecuaciones se conforman de expresiones algebraicas separadas por un signo igual, la expresión ubicada a la izquierda de la igualdad se denomina primer miembro y la ubicada a la derecha, segundo miembro.

Cada miembro de la igualdad está conformado por términos y estos son todos los números o variables que están separados por los signos (+) o (-).

Los términos son las partes o cantidades sumadas o restadas en cada uno de los miembros y está compuesto de la siguiente manera: Ejemplo:

Sea el término: $-5x^2$

$$\begin{aligned} - &\rightarrow signo\ del\ término \\ -5 &\rightarrow coeficiente \\ x &\rightarrow variable\ o\ incógnita \\ 2 &\rightarrow exponente\ de\ la\ variable \end{aligned}$$

Cuando no existe coeficiente se sobreentiende que es "1". El exponente que presenta la variable, en este caso (3), indica el grado del término. En una ecuación o polinomio, el mayor exponente que tenga la variable es el que indica el grado de la ecuación o polinomio.

Ejemplo: $3x^4 + 2x^3 - x^2 + 5x - 10$ Es una ecuación o polinomio de 4to grado.

Los términos son semejantes cuando poseen la misma variable con el mismo exponente. Ejemplo:

$$(3x)\ \ y\ (-5x);\ \ (4xy^2)\ y\ (3xy^2);\ \ \ (-5a^3)\ y\ (9a^3)$$

Cuando se resuelve una ecuación y aparecen términos semejantes, se deben agrupar y para ello se suman algebraicamente los coeficientes de los términos semejantes. Ejemplo: $-2x + 5 - 3x - 7 = -5x - 2$

Resolución de ecuaciones:

Resolver una ecuación significa determinar él o los valores de la(s) incógnita(s) que la satisfacen. Las soluciones o raíces de una ecuación son los valores de las incógnitas que la verifican.

ECUACIONES LINEALES: La forma general de expresar una ecuación lineal o de primer grado es: $ax + b = 0$; en donde $a\, y\, b \in$ R; $ax \rightarrow primer\ término\ y\ b \rightarrow término\ independiente$.

Procedimiento para despejes simples:

1.- Se agrupan todos los términos semejantes en uno de los miembros y en el otro los términos independientes.

2.- Para hacer estas agrupaciones, se procede a trasladar los términos a cada lado según correspondan, al realizar estos cambios se deben cambiar también los signos que ellos posean, es decir si están positivos cambian a negativo y viceversa, de igual manera si están multiplicando pasan dividiendo y viceversa.

3.- Luego se reducen todos los términos que tengan la incógnita, se realizan los despejes respectivos y el valor obtenido es la solución de la ecuación.

4.- Para comprobar, se sustituye el valor de la incógnita den la ecuación original y debe cumplirse la igualdad o identidad de cada uno de los miembros.

Ejemplo: Sea la ecuación

$$6x - 7 = 35 \quad \rightarrow \quad 6x = 35 + 7 \quad \rightarrow \quad x = 42 \quad \rightarrow x = \frac{42}{6} \quad \rightarrow x = 7$$

Comprobando:

$$6(7) - 7 = 35 \rightarrow 42 - 7 = 35 \quad \rightarrow \quad 35 = 35$$

Cuando se presentan situaciones en la ecuación que planteen alguna operación matemática (distributiva, eliminación de paréntesis) o si se trata de fracciones; se deben resolver primero antes de la ecuación en sí.

Ejemplos:

1.- $5(x-2)+3(4x-20)=6 \;\rightarrow\; 5x-10+12x-60=6$

Se aplica propiedad distributiva, para eliminar paréntesis

$$5x+12x=6+60+10 \;\rightarrow\; 17x=76 \;\rightarrow x=\frac{76}{17}$$

Se agrupan términos semejantes y se despeja la incógnita.

2.- $7+(4x+2)=3x-(5-2x) \;\rightarrow\; 7+4x+2=3x-5+2x$

Se aplica propiedad distributiva solo de los signos para eliminar los paréntesis

$$4x—3x-2x=-5-7\;-2\rightarrow\; -x=-14 \;\rightarrow\; x=\frac{-14}{-1} \;\rightarrow x=14$$

Se agrupan términos semejantes y se despeja la incógnita.

3.- $\frac{5x}{3}+5=\frac{2x+3}{4}$

En este caso hay que eliminar primero los denominadores, para ello hay que buscar el m.c.d. de todos los términos, en este caso entre 3 y 4, m.c.d.= 12.

$$4(5x)+12(5)=3(2x+3) \;\rightarrow\; 20x+60=6x+9$$

$$20x-6x=9-60 \;\rightarrow 14x=-51 \;\rightarrow x=-\frac{51}{14}$$

Ejercicios:

1.- $\frac{x}{6}+5=\frac{1}{3}-\;x$

2.- $\frac{3x}{5}-\;\frac{2x}{3}+\;\frac{1}{5}=0$

3.- $x+3(x-1)=6-4(2x+3)$

4.- $5(x-1)+16(2x+3)=3(2x-7)-x$

5.- $4-\frac{(10x+1)}{4}=4x-\frac{(16x+3)}{4}$

6.- $\frac{(x+1)}{2}-\frac{(x-2)}{3}-\frac{(x-3)}{4}=-\frac{(x-5)}{5}$

7.- $14x-(3x-2)-[5x+2-(x-1)]=0$

8.- $x+3(x+1)=6-4(2x+3)$

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Llamamos **sistema de ecuaciones** a un conjunto cualquiera de ecuaciones. Por ejemplo, las ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x^2-2x+3y=y-1 \\ 2y-3y^2=3x+4 \end{cases}$$

forman un sistema de **dos ecuaciones con dos incógnitas.**

El conjunto de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+y+z=4 \\ 3x-2y-z=4 \\ x+3y-5z=1 \end{cases}$$

forman un sistema **de tres ecuaciones con tres incógnitas.**

Se llama **grado del sistema de ecuaciones** al mayor exponente al que se encuentre elevada alguna incógnita del sistema.

Por ejemplo:

$$\begin{cases} 3x^2-2x+3y=y-1 \\ 2y-3y^2=3x+4 \end{cases}$$

Es un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas de segundo grado, porque el mayor exponente es 2 (la **x** e **y** al cuadrado). Este sistema con ecuaciones de segundo grado se llaman también **sistema de ecuaciones cuadráticas**.

Para resolver un sistema de ecuaciones existen los siguientes métodos:

MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Lo que debemos hacer:

1.- Despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones.

2.- Sustituir la expresión obtenida en la otra ecuación.

3.- Resolver la ecuación resultante.

4.- Calcular la otra incógnita en la ecuación despejada.

Ejemplo:

Resolver

$$\begin{cases} 3x - 4y = -6 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

Se despeja **x** en la segunda ecuación:

$$x - 8 - 2y$$

Se sustituyen en la primera ecuación:

$$3(8 - 2y) - 4y = -6 \ \to 24 - 6y - 4y = -6 \ \to -6y - 4y = -6 - 24$$

$$-10y = -30 \ \to y = \frac{-30}{-10} \ \to y = 3$$

Se sustituye este valor en la segunda:

$$x + 2(3) = 8 \ \to \ x + 6 = 8 \ \to x = 8 - 6 \ \to x = 2$$

Solución del sistema:

$$x = 2\,; y = 3$$

MÉTODO DE REDUCCIÓN

Lo que debemos hacer:

1.- Se igualan los coeficientes de una incógnita, salvo el signo, eligiendo un múltiplo común de ambos.

2.- Puede ser el producto de los coeficientes de esa incógnita.

3.- Se suman o restan, según convenga, las ecuaciones.

4.- Se resuelve la ecuación de primer grado resultante.

5.- Se calcula la otra incógnita sustituyendo el valor obtenido en una de las ecuaciones del sistema.

Ejemplo:

Resolver

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x + 6y = 4 \end{cases}$$

Primero se deben igualar el 2 y el 5 de la incógnita **x**. Para hacerlo, amplificamos la primera ecuación por 5 y amplificamos la segunda ecuación por –2. Esto porque al multiplicar 2x por 5 queda 10x; y al multiplicar 5x por –2 queda –10x, y se anulan entre sí; o sea, hemos eliminado una incógnita para trabajar solo con la otra (la **y**).

$$\begin{matrix} 5 \\ -2 \end{matrix} \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x \ + 6y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ \ 10x + 15y = 25 \\ -10x - 12y = -8 \end{cases}$$

$$0x + 3y = 17 \ \rightarrow y = \frac{17}{3}$$

Ahora en cualquiera de las dos ecuaciones se sustituye el valor encontrado de “y” para obtener el valor de la otra incógnita en este caso “x”

$$2x + 3\left(\frac{17}{3}\right) = 5 \ \rightarrow \ \ 2x + \frac{51}{3} = 5 \ \rightarrow 6x + 51 = 15$$

$$6x = 15 - 51 \ \ \rightarrow \ 6x = -36 \ \rightarrow \ x = -\frac{36}{6} \ \rightarrow x = \ -6$$

Luego para verificar si esos son los resultados exactos se sustituyen en cualquiera de las ecuaciones y se debe cumplir la igualdad.

$$2(-6) + 3\,\frac{17}{3} = 5 \;\rightarrow\; -12 + \frac{51}{3} = 5 \;\rightarrow\; -36 + 51 = 15 \;\rightarrow\; -36 = 15 - 51$$

$$-36 = -36$$

Se cumple la igualdad, por lo tanto los resultados de las incógnitas "x" e "y" son los correctos.

MÉTODO DE IGUALACIÓN:

Lo que debemos hacer:

1.- Se despeja la misma incógnita en cada una de las ecuaciones.

2.- Se igualan las dos ecuaciones resultantes y se despeja la otra incógnita.

3.- Se sustituye el valor de la incógnita obtenida en cualquiera de las ecuaciones para obtener la otra incógnita

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + y = 22 \\ 4x - 3y = -1 \end{cases}$$

Se despeja la variable "y" en cada una de las ecuaciones,

$$\begin{cases} y = 22 - 3x \\ y = \dfrac{1 + 4x}{3} \end{cases}$$

Como se puede observar, ambas ecuaciones comparten la misma parte izquierda, por lo que podemos afirmar que las partes derechas también son iguales entre sí.

$$22 - 3x = \frac{1 + 4x}{3} \;\rightarrow 3(22 - 3x) = 1 + 4x \;\rightarrow\; 66 - 9x = 1 + 4x$$

$$66 - 1 = 4x + 9x \;\rightarrow 13x = 65 \;\rightarrow\; x = \frac{65}{13} \;\rightarrow\; x = 5$$

Luego se sustituye el valor de "x" en cualquiera de las ecuaciones para obtener el valor de la otra incógnita, o sea, de "y":

$$3(5) + \; y = 22 \;\; \rightarrow \;\; 15 + y = 22 \;\; \rightarrow \;\; y = 22 - 15 \;\; \rightarrow \;\; y = 7$$

Para verificar si los resultados son los correctos se sustituyen ambos resultados en cualquiera de las ecuaciones y se debe cumplir la igualdad:

$$4(5) - \; 3\,(7) = \; -1 \;\; \rightarrow 20 - 21 = \; -1$$

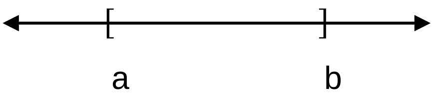
$$-1 = \; -1$$

INECUACIONES LINEALES O DE PRIMER GRADO:

INTERVALOS: Un intervalo es una forma de agrupar números, formar un conjunto de números. Los intervalos se denotan con los signos de agrupación: paréntesis (   ) y corchetes [   ].

Tipos de intervalos:

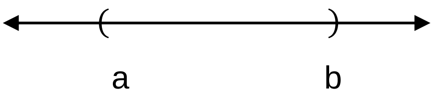
a.- Intervalo cerrado:



a y b son los extremos; está formado por todos los números reales que son mayores o iguales que (a) y menores o iguales que (b), incluyendo a (a) y (b), se denota:

$$(a, b) \rightarrow (x \in R/a \leq x \leq b)$$

b.- Intervalo abierto:



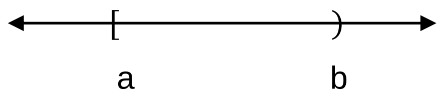
a y b son los extremos, está formado por todos los números reales que son mayores que (a) y menores que (b) pero sin incluir a (a) y (b), se denota:

$$(a, b) \rightarrow (x \in R/a < x < b)$$

c.- Intervalos semi-abiertos:

Está formado por todos los números reales mayores que (a) y menores o igulaes que (b), incluyendo a (b) pero excluyendo a (a) y se denota:

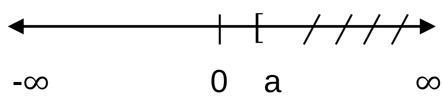
$$(a, b) \rightarrow (x \in R/a < x \leq b)$$



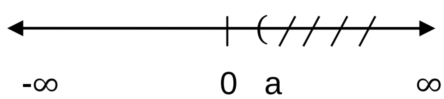
Está formado por todos los números reales mayores o iguales que (a) y menores que (b), incluyendo a (a) pero excluyendo a (b) y se denota:

$$(a, b) \rightarrow (x \in R/a \leq x < b)$$

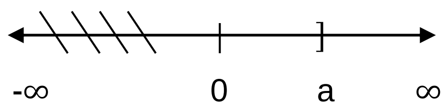
d.- Intervalos infinitos:



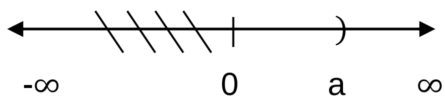
$[a, \infty) = \{x \in R/a \leq x\}$



$(a, \infty) = \{x \in R/a < x\}$



$[a, \infty) = \{x \in R/a \geq x\}$



$[a, \infty) = \{x \in R/a > x\}$

Nota:

1.- El extremo $(-\infty\ ó \infty)$ siempre será abierto.

2.- Uno de los extremos será abierto cuando el símbolo de la desigualdad sea $<$ ó $>$, en este caso el extremo no se incluye en el intervalo y será cerrado, cuando el símbolo de la desigualdad sea $\leq$ ó $\geq$, en este caso el extremo si se incluye en el intervalo.

3.- Será al ∞, cuando (x) sea $>$ ó $\geq$, que el otro extremo, ejemplo $x > 5$ ó $x \geq 5$, será al $-\infty$, cuando (x) sea $<$ ó $\leq$ que el otro extremo, ejemplo $x < 5$ ó $x \leq 5$.

DESIGUALDAD: Es una expresión que una cantidad es mayor o menor que otra, para denotarlo se usan los símbolos de desigualdad:

$$> \rightarrow \text{"}mayor\ que\text{"} \qquad \geq \rightarrow \text{"}mayor\ o\ igual\ que\text{"}$$

$$> \rightarrow \text{"}menor\ que\text{"} \qquad \leq \rightarrow \text{"}menor\ o\ igual\ que\text{"}$$

Una desilgualdad tiene dos miembros que están separados por un signo de desigualdad; el de la izquierda es el primer miembro y el de la derecha es el segundo miembro.

Propiedades de la desigualdad:

1..- Si a los dos miembros de una desilgualdad se le suma o resta una misma cantidad, el signo de la desigualdad no varía. Ejemplo:

$$8 > 3 \ \rightarrow \ 8 + 2 > 3 + 2 \ \rightarrow \ 10 > 5$$

$$7 > 4 \ \rightarrow \ 7 - 2 > 4 - 2 \ \rightarrow \ 5 > 2$$

2.- Si a los dos miembros de una desigualdad se les multiplica por un mismo número positivo, el signo de la desigualdad no varía. Ejemplo:

$$6 > 2 \ \rightarrow \ 6 \cdot 5 > 2 \cdot 5 \ \rightarrow \ 30 > 10$$

3.- Si a los dos miembros de una desilgualdad se les multiplica por un mismo número negativo, el signo de la desigualdad varía, cambia de sentido. Ejemplo:

$$9 > 5 \ \rightarrow \ 9 \cdot (-3) > 5 \cdot (-3) \ \rightarrow \ -27 < -15$$

$$12 > 3 \ \rightarrow \ 12 \cdot (-1) > 3 \cdot (-1) \ \rightarrow \ -12 < -3$$

INECUACIONES: Una inecuación con una incógnita es una igualdad que se satisface para un determinado sub-conjunto de “R”.

Su procedimiento de resolución es similar al de una ecuación de primer grado, pero se debe presentar la solución en forma de un intervalo y graficarlo, ya que se trata de una desigualdad y por lo tanto no tiene una solución precisa sino un sub.conjunto de “R”.

Ejemplos:

1.- $x - 8 > 4 \;\rightarrow\; x > 4 + 8 \;\rightarrow\; x > 12 \;\rightarrow\; S = \;(12, \infty)$

La solución (S) es un intervalo, luego se grafica

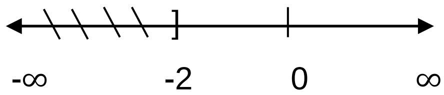
2.- $3(x - 1) + 2(x + 6) \leq -1$

Antes de resolver la desiguladad hay que eliminar los signos de agrupación, en este caso hay que aplicar la propiedad distributiva, posteriormente se agrupa los terminos semejantes, para luego despejar la incógnita.

$$3(x - 1) + 2(x + 6) \leq -1 \;\rightarrow\; 3x - 3 + 2x + 12 \leq -1$$

$$3x + 2x \leq -1 + 3 - 12 \;\rightarrow\; 5x \;\leq -10 \;\rightarrow x \leq \; -\frac{10}{5} \;\rightarrow\; x \leq \; -2$$

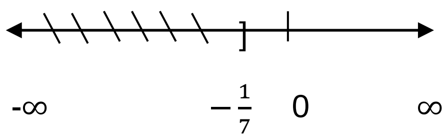
S= (-∞, -2] $\longrightarrow$



3.- $3x - 6(2x) \geq 12x + 3 \;\rightarrow\; 3x - 12x \geq 12x + 3 \;\rightarrow\; -9x \geq 12x + 3$

$$-9x - 12x \geq 3 \;\rightarrow\; -21x \;\geq 3(-1) \;\rightarrow\; x \leq \; -\frac{3}{21} \;\rightarrow x \leq -\frac{1}{7}$$

S= (-∞,- $\frac{1}{7}$] $\longrightarrow$



Ejercicios propuestos:

1.- $\frac{x-1}{4} - 2x \leq \frac{x-2}{3}$

2.- $6x - 2 > \frac{2}{3} + x$

3.- $3x + \frac{x}{x+3} \leq 1 + \frac{x}{x+3}$

4.- $\frac{2(x+1)}{3} \geq \frac{1}{9} - (x+2)$

5.- $(x-1)^2 > x^2$

6.- $\frac{3x-2}{4} + 2x - \frac{1}{2} < 0$

SISTEMAS DE INECUACIONES:

Procedimiento para resolverlo:

1.- se resuelve cada inecuación por separado determinando sus soluciones.

2.- Se construyen los intervalos soluciones.

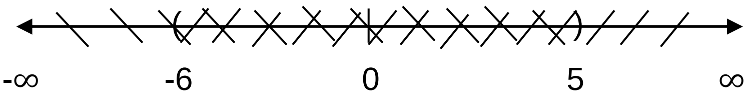
3.- Se grafican ambos en una misma recta real, destacando la solución total.

4.- Se indica la solución total en forma de intervalo.

Cuando se resuelve un sistema de este tipo, se presentan solamente tres casos de soluciones: dos intersecciones (∩) y una unión (∪).

Primer caso: Intersección: Ejemplo:

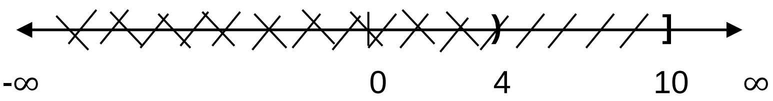
$$\begin{cases} x+6 > 0 \rightarrow x > -6 \rightarrow S_1 = (-6, \infty) \\ x-5 < 0 \rightarrow x < 5 \rightarrow S_2 = (-\infty, 5) \end{cases}$$



$$S_t = S_1 \cap S_2 = (-6,5)$$

Segundo caso: Intersección: Ejemplo:

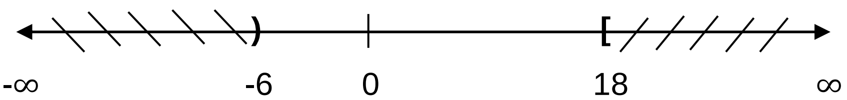
$$\begin{cases} x-7 \leq 3 \rightarrow x \leq 3+7 \rightarrow x \leq 10 \rightarrow S_1 = (-\infty, 10] \\ x+1 < 5 \rightarrow x < 5-1 \rightarrow x < 4 \rightarrow S_2 = (-\infty, 4) \end{cases}$$



$$S_t = S_1 \cap S_2 = (-\infty, 4)$$

Tercer caso: Unión: Ejemplo:

$$\begin{cases} x-10 \geq 8 \rightarrow x \geq 8+10 \rightarrow x \geq 18 \rightarrow S_1 = [18, \infty) \\ x+9 < 3 \rightarrow x < 3-9 \rightarrow x < -6 \rightarrow S_2 = (-\infty, -6) \end{cases}$$



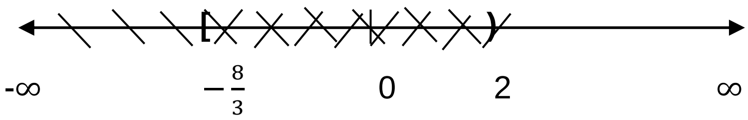
$$S_t = S_1 \cup S_2 = (-\infty, -6) \cup [18, \infty)$$

La solución total será la unión de las soluciones parciales.

Ejercicios:

1.-

$$\begin{cases} 3x+6 \geq -2 \ \rightarrow \ 3x \geq -2-6 \ \rightarrow \ 3x \geq -8 \ \rightarrow \ x \ \geq \ -\frac{8}{3} \rightarrow S_1 = \left[-\frac{8}{3}, \infty\right) \\ 4x-5 \ < 3 \ \rightarrow \ 4x < 3+5 \ \rightarrow \ 4x < 8 \ \rightarrow x = \frac{8}{4} \ \rightarrow x = 2 \rightarrow S_2 = \ (-\infty, 2) \end{cases}$$

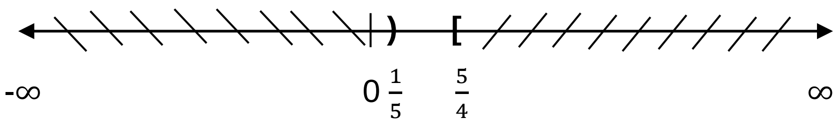


$$S_t = \ S_1 \cap S_2 = \ \left[-\frac{8}{3}, 2\right)$$

2.-

$$\begin{cases} \ 4x-2 \geq 3 \ \rightarrow \ 4x \geq 3+2 \ \rightarrow \ 4x \geq 5 \ \rightarrow \ x \ \geq \ \frac{5}{4} \\ -3x-3 \ > 2x-4 \ \rightarrow \ -3x-2x > -4+3 \ \rightarrow \ (-5x > -1\,)(-1) \ \rightarrow x < \frac{1}{5} \end{cases}$$

$$\rightarrow S_1 = \left[\frac{5}{4}, \infty\right) \qquad S_2 = \ \left(-\infty, \frac{1}{5}\right)$$



$$S_t = \ S_1 \cup S_2 = \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \ \cup \left[\frac{5}{4}, \infty\right)$$

3.- $7x-2 \ > 5x-3 \geq 3x-1$

Este tipo de sistema se puede resolver simultáneamente, sin embargo se realizará por separado, primero se toma el primer miembro y el del medio:

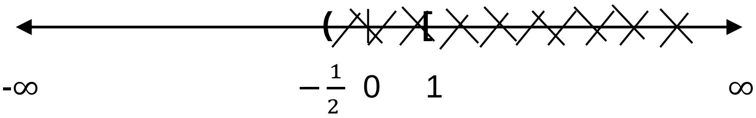
$$7x-2 \ > 5x-3 \ \rightarrow 7x-5x > -3+2 \ \rightarrow 2x > -1 \ \rightarrow x > \ -\frac{1}{2} \ \rightarrow$$

$$S_1 = \ \left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$$

Ahora se toma el término del medio y el segundo término:

$$5x - 3 \geq 3x - 1 \;\rightarrow 5x - 3x \geq -1 + 3 \;\rightarrow 2x \geq 2 \;\rightarrow x \geq \frac{2}{2} \;\rightarrow x \geq 1$$

$$S_2 = [1, \infty)$$



$$S_t = S_1 \cap S_2 = \left(-\frac{1}{2}, 1\right]$$

Ejercicios Propuestos:

1.- $\begin{cases} 5(x-1) \leq 2x + 1 \\ 2x - 6 \geq 10 \end{cases}$

2.- $3(x-4) \geq \frac{5}{3}x + 1 < \frac{1}{4}x + 3$

3.- $\begin{cases} \frac{2-x}{6} - \frac{x-1}{4} \leq 3 \\ 4(x-3) \geq -8(2x) \end{cases}$

4.- $\begin{cases} 4 - (2x-3) \leq 6x - \frac{2}{3} \\ 5x - 8x \geq -\frac{x}{3} \end{cases}$

5.- $4x + 2 < 0 \geq 8 - 7x$

6.- $\frac{5}{4} - 9x > 2x - 1 \leq \frac{4}{3} + 10x$

INECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO:

Son de la forma:

$$|AX + B| \geq C \quad \text{ó} \quad |AX + B| \leq C$$

Para resolverlos se eliminan los módulos y se forman dos inecuaciones de la siguiente manera:

$$|AX + B| \ \geq C \ \ \rightarrow \ \begin{cases} AX + B \geq C \\ AX + B \leq -C \end{cases}$$

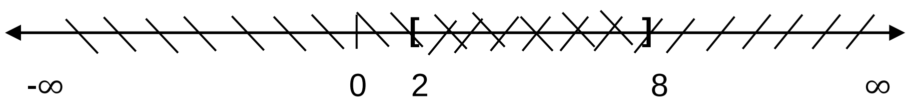
$$|AX + B| \ \leq C \ \ \rightarrow \ \begin{cases} AX + B \leq C \\ AX + B \geq -C \end{cases}$$

Se forma un sistema de ecuaciones y se resuelve igual que el punto anterior.

Ejemplo:

1.-

$$|x - 5| \ \leq 3 \ \ \rightarrow \ \begin{cases} x - 5 \leq 3 \ \rightarrow x \leq 3 + 5 \ \rightarrow x \leq 8 \ \ \rightarrow S_1 = \ (-\infty, 8] \\ x - 5 \geq -3 \ \rightarrow x \geq -3 + 5 \ \rightarrow x \geq 2 \ \ \rightarrow S_1 = \ [2, \infty) \end{cases}$$

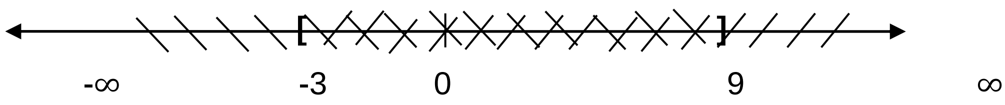


$$S_t = \ S_1 \cap S_2 = [2{,}8]$$

2.- $|\frac{x}{3} - 1| \ \leq 2$

Cuando hay fracciones, se puede eliminar primero la fracción para luego resolver la inecuación, quedando de la siguiente manera:

$$|x - 3| \ \leq 6 \ \rightarrow \ \begin{cases} x - 3 \leq 6 \ \rightarrow x \leq 6 + 3 \ \rightarrow x \leq 9 \ \ \rightarrow S_1 = \ (-\infty, 9] \\ x - 3 \geq -6 \ \rightarrow x \geq -6 + 3 \ \rightarrow x \geq -3 \ \ \rightarrow S_1 = \ [-3, \infty) \end{cases}$$



$$S_t = S_1 \cap S_2 = [-3,9]$$

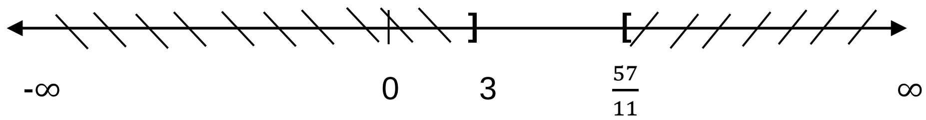
3.- $\left|\frac{2}{3}x + 3(x-5)\right| > 4$ se simplifica sin eliminar el módulo

$$\left|\frac{2}{3}x + 3(x-5)\right| > 4 \rightarrow \left|\frac{2}{3}x + 3x - 15\right| > 4 \rightarrow |2x + 9x - 45| > 12$$

$|11x - 45| > 12$

$$\begin{cases} 11x - 45 > 12 \rightarrow 11x > 12 + 45 \rightarrow 11x > 57 \rightarrow x > \dfrac{57}{11} \\ 11x - 45 < -11 \rightarrow 11x < -12 + 45 \rightarrow 11x < 33 \rightarrow x < \dfrac{33}{11} \rightarrow x < 3 \end{cases}$$

$$S_1 = \left(\frac{57}{11}, \infty\right) \qquad S_2 = (-\infty, 3)$$



$$S_t = S_1 \cup S_2 = (-\infty, 3) \cup \left(\frac{57}{11}, \infty\right)$$

MATRICES

Una **matriz** es un arreglo bidimensional de números (llamados **entradas** de la matriz) ordenados en **filas** (o **renglones**) y **columnas**, donde una fila es cada una de las líneas horizontales de la matriz y una columna es cada una de las líneas verticales. A una matriz con *n* filas y *m* columnas se le denomina matriz *n* x *m*.

Ejemplo:

$$\begin{array}{ll} & \text{columnas} \\ A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} & \longleftarrow \text{filas} \end{array}$$

Este caso es una matríz 3 x 2 (3 filas x 2 columnas)

B = $\begin{vmatrix} 4 & 8 & 7 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

Esta es una matríz 1 x 5 (1 fila x 5 columnas)

Clases de Matrices

Las matrices pueden clasificarse en:

Matrices Cuadradas

Cuando las matrices tienen el mismo número de filas y el mismo número de columnas se les llama Matrices Cuadradas. Ejemplos;

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \; Es\ una\ matríz\ 2\ x\ 2$$

Diagonal Secundaria

$$B = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 5 \\ 6 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \; Es\ una\ matríz\ 3\ x$$

Diagonal principal

Matrices Triangulares:

Una matríz cuadrada A = ($a_{i,j}$) es una matriz triangular superior o simplemente una matriz triangular, si todas las entradas bajo la diagonal principal son iguales a cero.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1 & 8 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Traspuesta de una Matríz

La traspuesta de una matriz A consiste en intercambiar las filas por las columnas y se denota A^t , así la traspuesta de

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 4 & 0 & 9 \end{bmatrix} \quad es \quad A^t = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & 9 \end{bmatrix}$$

Operaciones con matrices

Suma de Matrices

Dadas las matrices *m* x *n* ,*A* y *B*, su **suma** *A* + *B* es la matriz *m* x *n* calculada sumando los elementos correspondientes ((*A* + *B*)[*i, j*] = *A*[*i, j*] + *B*[*i, j*]). Es decir, sumar cada uno de los elementos homólogos de las matrices a sumar.

Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Propiedades

- Asociativa

Dadas las matrices *m*×*n* *A*, *B* y *C*

A + (B + C) = (A + B) + C

- Conmutativa

Dadas las matrices *m*×*n A* y *B*

A + B = B + A

- Existencia de matriz cero o matriz nula

A + 0 = 0 + A = A

- Existencia de matriz opuesta

A + (-A) = 0

Resta de Matrices:

Sean las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 3-(-1) & 1-2 & 2-4 \\ 0-2 & 5-5 & -3-8 \\ 7-0 & 0-1 & 4-(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Producto por un escalar

Dada una matriz *A* y un escalar *c*, su **producto** *cA* se calcula multiplicando el escalar por cada elemento de *A*.

Ejemplo

$$2\begin{bmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x1 & 2x8 & 2x(-3) \\ 2x4 & 2x(-2) & 2x6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 16 & -6 \\ 8 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

Producto de Matrices

El **producto** de dos matrices se puede definir sólo si el número de columnas de la matriz izquierda es el mismo que el número de filas de la matriz derecha. Si *A* es una matriz *m*×*n* y *B* es una matriz *n*×*p*, entonces su **producto matricial** *AB* es la matriz *m*×*p* (*m* filas, *p* columnas) dada por:

$$(AB)[i,j] = A[i,1]B[1,j] + A[i,2]B[2;j] + \ldots + A[i,n]B[n;j]$$

para cada par *i* y *j*.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{2} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \begin{bmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{1x3+0x2+2x1}) & (\mathbf{1x1+0x1+2x0}) \\ (\mathbf{-1x3+3x2+1x1}) & (\mathbf{-1x1+3x1+1x0}) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{bmatrix}$$

Propiedades

- *Asociativa*: (**AB**)**C** = **A**(**BC**).
- *Distributiva por la derecha*: (**A** + **B**)**C** = **AC** + **BC**.
- *Distributiva por la izquierda*: **C**(**A** + **B**) = **CA** + **CB**.
- *Generalmente el producto de matrices tiene divisores de cero*: **Si A.B = 0** , *No necesariamente* **A** *ó* **B** *son matrices nulas*
- *El producto de matrices no verifica la propiedad de simplificación*: **Si A.B = A.C**, *No necesariamente* **B=C**

MATRICES Y SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

La matriz ampliada *M* de un sistema de *m* ecuaciones con *n* incógnitas es la siguiente:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & \vdots & b_m \end{pmatrix}$$

Cada fila de M corresponde a una ecuación del sistema y cada columna a los coeficientes de una incógnita, excepto la última, que corresponde a las constantes del sistema.

Un sistema de ecuaciones lineales puede resolverse trabajando con su matriz ampliada, específicamente, reduciéndola a forma escalonada mediante el proceso de Gauss.

<u>Método de Gauss</u>

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales, se aplica el método de Gauss. Este proceso se ilustra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo:

Sea el sistema,

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ 2x & + & 5y & - & z & = & -4 \\ 3x & - & 2y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

su matriz ampliada asociada es

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \end{array}.$$

Ahora resolvemos por el método de Gauss sabiendo que la primera columna corresponde a los coeficientes de la x, la segunda a los de la y, la tercera a los de la z y la cuarta a los términos independientes:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 5 & -1 & -4 \\ 3 & -2 & -1 & 2 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & -8 & -4 & -4 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rrr:r} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 0 & -28 & -84 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots & 3 \\ 0 & 1 & -3 & \vdots & -10 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 3 \end{pmatrix} \end{array}.$$

De este modo, el sistema tiene la solución única

$x = 2$, $y = -1$, $z = 3$.

La resolución de sistemas de ecuaciones lineales por matrices, aplicando el método de Gauss u otros, es una de las múltiples aplicaciones que tienen éstas.

Ejercicio:

Hallar el valor de *x, y, z, t* en los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando matrices:

$$a)\ \left.\begin{aligned} x + y - 2z + 4t &= 5 \\ 2x + 2y - 3z + t &= 3 \\ 3x + 3y - 4z - 2t &= 1 \end{aligned}\right\}$$

$$b)\ \left.\begin{aligned} x + y - 2z + 3t &= 4 \\ 2x + 3y - 3z + t &= 3 \\ 5x + 7y + 4z + t &= 5 \end{aligned}\right\}$$

a) La matriz *M* asociada al sistema de ecuaciones es:

$$M = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & \vdots & 5 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & \vdots & 3 \\ 3 & 3 & -4 & -2 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & \vdots & -14 \end{pmatrix} \end{array}.$$

La tercera fila se suprime, puesto que es múltiplo de la segunda y resultaría una fila nula. Así, el sistema queda formado por dos ecuaciones con cuatro incógnitas:

$$\sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & t & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 4 & \vdots & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & \vdots & -7 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & \vdots & -14 \end{pmatrix} \end{array}.$$

La solución del sistema es compatible e indeterminado, esto es, tiene infinitas soluciones.

x = -9 - *y* + 10*t*
z = 7*t* - 7   ó   (- 9 - *y* + 10*t*, *y*, 7*t* - 7, *t*).

Dependiendo de qué valores se escojan para *y* y *t*, salen distintos resultados. Así, para *y* = *t* = 0 tendremos la solución del sistema
x = -9, *y* = 0, *z* = -7, *t* = 0.

b) La matriz *M* asociada al sistema de ecuaciones es:

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & t & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 2 & 3 & 3 & -1 & \vdots & 3 \\ 5 & 7 & 4 & 1 & \vdots & 5 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & t & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & \vdots & -5 \\ 0 & 2 & 14 & -14 & \vdots & -15 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & t & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & -2 & 3 & \vdots & 4 \\ 0 & 1 & 7 & -7 & \vdots & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & -5 \end{array}\right) \end{array}$$

No hay necesidad de continuar calculando nada más, puesto que la matriz escalonada ya nos indica que el sistema es incompatible (SI), es decir, que no tiene solución. Específicamente, la tercera fila de la matriz escalonada corresponde a la ecuación

0*x* + 0*y* + 0*z* + 0*t* = -5

obteniendo como resultado 0 = -5, que es absurdo. Por lo tanto, decimos que no tiene solución.

EJERCICIOS

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 5 & 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Calcular:

1.- – A – B + C

2.- A + B – C

3.- 3 A + 2 B

DETERMINANTES DE UNA MATRÍZ

Si es una matriz 2 x 2 se define el determinante de la matriz A, y se expresa como det(A) o bien |*A*|, como el *número:*

det(*A*) = |*A*| = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Ejemplos: El cálculo de los determinantes de orden 2 es bien sencillo, por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{4} \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-1) \cdot 3 = 4 + 3 = 7.$$

$$\begin{vmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{2} & \mathbf{5} \end{vmatrix} = (-2) \cdot 5 - 2 \cdot (-3) = -10 + 6 = -4$$

Cuando la matriz es de orden 3 se resuelve siguiendo la siguiente regla:

$$\det(A) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{23} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}$$

Ejemplo

Calcular el valor del determinante:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= (3)(2)(4) + (0)(1)(1) + (2)(-5)(-2) - (-2)(2)(1) - (0)(2)(4) - (-5)(1)(3)$$

$$= 24 + 0 + 20 - (-4) - 0 - (-15) = 44 + 4 + 15 = 63$$

EJERCICIOS

Calcular los siguientes determinantes

a.- $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}$ Resp.: 11

b.- $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}$ Resp.: -10

c.- $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ Resp.: 0

d.- $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix}$ Resp.: -36

REGLA DE CRAMER

La regla de Cramer es un teorema en álgebra lineal, que da la solución de un sistema lineal de ecuaciones en términos de determinantes

Sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

Para la resolución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, de la forma. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

Lo representamos en forma de matrices:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

Entonces, “x” e “y” pueden ser encontradas con la regla de Cramer, con una división de determinantes, de la siguiente manera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{ed - bf}{ad - bc}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} = \frac{af - ec}{ad - bc}$$

Ejemplo

Ejemplo de la resolución de un sistema simple de 2x2:

Dado

$$3x + 1y = 9$$

$$2x + 3y = 13$$

que matricialmente es:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 13 \end{bmatrix}$$

x e y pueden ser resueltos usando la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 13 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9 * 3 - 1 * 13}{3 * 3 - 1 * 2} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 13 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{3 * 13 - 9 * 2}{3 * 3 - 1 * 2} = 3$$

Sistema de 3x3

La regla para un sistema de 3x3, con una división de determinantes:

Que representadas en forma de matriz es:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} j \\ k \\ l \end{bmatrix}$$

x, y, z pueden ser encontradas como sigue:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} j & b & c \\ k & e & f \\ l & h & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & j & c \\ d & k & f \\ g & l & i \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} a & b & j \\ d & e & k \\ g & h & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}}$$

Ejemplo

Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$3x + 2y + 1z = 1$$
$$2x + 0y + 1z = 2$$
$$-1x + 1y + 2z = 4$$

expresado en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Los valores de “x”, “y” y “z” serían:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}}$$

UNIDAD II

FUNCIONES

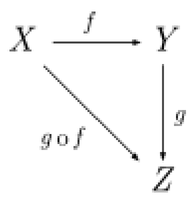
FUNCIÓN COMPUESTA

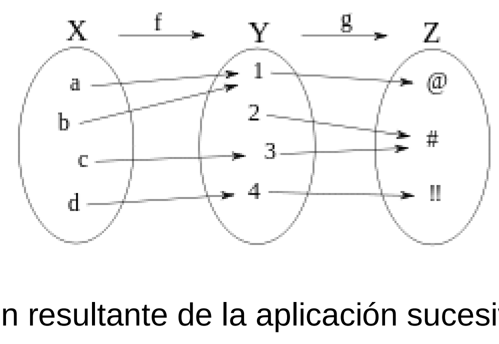
Es una función formada por la composición o aplicación sucesiva de otras dos funciones. Para ello, se aplica sobre el argumento la función más próxima al mismo, y al resultado del cálculo anterior se le aplica finalmente la función restante.

De manera formal, dadas dos funciones *f: X* → *Y* y *g: Y* → *Z*, donde la imagen de *f* está contenida en el dominio de *g*, se define la función composición **(*g* ∘ *f*): *X* → *Z*** como **(*g* ∘ *f*)(*x*) = *g* (*f*(*x*))**, para todos los elementos *x* de *X*.

$$\begin{array}{ccccc} X & \to & Y & \to & Z \\ x & \mapsto & f(x) & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

También se puede representar de manera gráfica usando la categoría de conjuntos, mediante un diagrama conmutativo:





g ∘ *f*, es la aplicación resultante de la aplicación sucesiva de *f* y de *g*. En el ejemplo, (*g* ∘ *f*)(a)=@.

Propiedades

- La composición de funciones es asociativa, es decir:

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

- La composición de funciones en general no es conmutativa, es decir:

$$(g \circ f) \neq (f \circ g)$$

Por ejemplo, dadas las funciones numéricas f(x)=x+1 y g(x)=x^2, entonces f(g(x))=x^2+1, en tanto que g(f(x))=$(x+1)^2$.

- La inversa de la composición de dos funciones es:

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Ejemplo

1.- Sean las funciones:

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = \sin(x)$$

La **función compuesta** de *g* y de *f* que expresamos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sin(x))^2 = \sin^2(x)$$

La interpretación de (*f* ∘ *g*) aplicada a la variable *x* significa que primero tenemos que aplicar *g* a *x*, con lo que obtendríamos un valor de paso

$$z = g(x) = \sin(x)$$

y después aplicamos *f* a *z* para obtener

$$y = f(z) = z^2 = \sin^2(x)$$

2.- Sean las funciones

La función g compuesta con la función f, la que expresamos $f \circ g_{(x)}$ está dada como:

$$f_{(x)} = x^2$$

$$g_{(x)} = x + 2$$

$$f \circ g_{(x)} = f\left(g_{(x)}\right) = (x+2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

La función f compuesta con la función g, la que expresamos $g \circ f_{(x)}$ está dada como:

$$g \circ f_{(x)} = g\left(f_{(x)}\right) = x^2 + 2$$

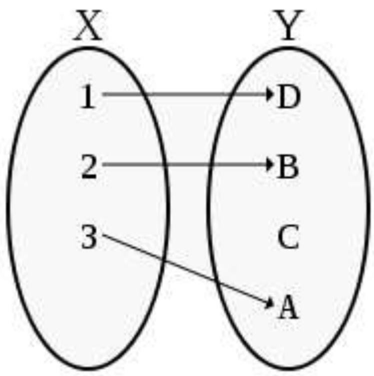
Función bien definida

La función compuesta está bien definida porque cumple con las dos condiciones de existencia y unicidad, propias de toda función: d x f

1. **Condición de existencia:** dado *x*, conocemos (*x*, *f*(*x*)), puesto que conocemos la función *f*, y dado cualquier elemento *y* de *B* conocemos también (*y*, *g*(*y*)), puesto que conocemos la función *g*. Por tanto, (*x*, *g*(*f*(*x*))) está definido para todo *x*, y así (*g* ∘ *f*) cumple la condición de existencia.
2. **Condición de unicidad:** como *f* y *g* son funciones bien definidas, para cada *x* el valor de *f*(*x*) es único, y para cada *f*(*x*) también lo es el de *g*(*f*(*x*)).

FUNCIÓN INYECTIVA

Una función es inyectiva si a cada valor del conjunto (dominio) le corresponde un valor distinto en el conjunto (imagen). Es decir, a cada elemento del conjunto A le corresponde un solo valor tal que, en el conjunto A no puede haber dos o más elementos que tengan la misma imagen.

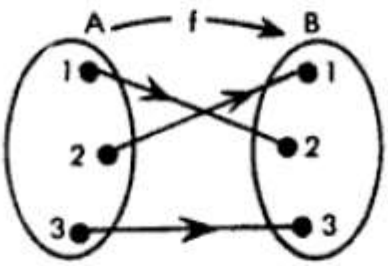


Ejemplos

1.- Sea A = {1, 2, 3} B = {1, 2, 3}; f: A.B:

f = {(1,2), (2,1), (3,3)}

Es decir, gráficamente queda:

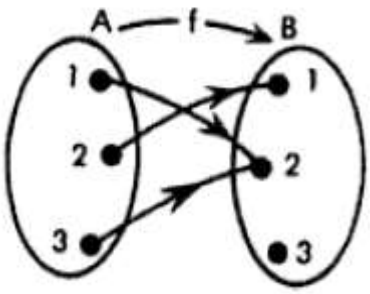


Nótese que cada elemento del conjunto B recibe solamente una línea. **ENTONCES ES INYECTIVA**

2.- Sea A = {1, 2, 3} B = {1, 2, 3}; f: A.B:

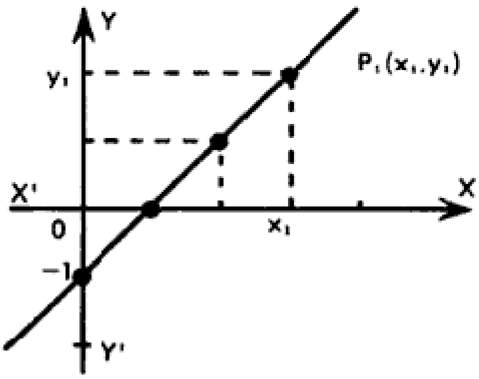
f = {(1,2), (2,1), (3,2)}

(Solo se cambio el número indicado en rojo) Gráficamente:



Hay un elemento de B (el número 2) que recibe dos flechas o líneas, por lo tanto
NO ES INYECTIVA.

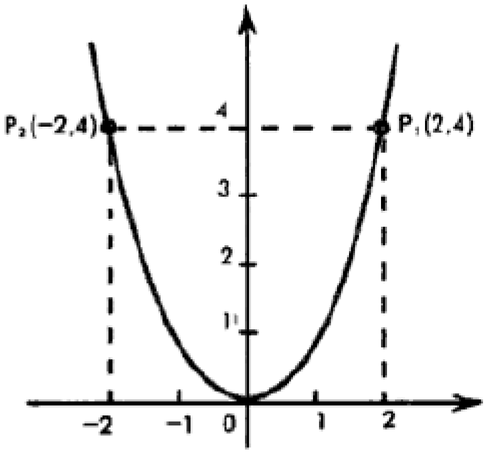
3.- Para la siguiente función: f(x) = y = x-1. A cada elemento del domino se le relaciona en la función con **UN** elemento de la imagen,



Por lo tanto **ES INYECTIVA.**

NOTA: El domino y la imagen son todos los reales:

4.- Si la función fuera parábola, **$f(x)=x^2$** como la que se muestra a continuación:



Hay elementos en el domino que se le asigna el mismo valor de la imagen; por ejemplo la pareja de valores P_1 (2,4) tiene el mismo valor de la imagen 4; que el punto P_2 (-2,4). Por lo tanto la función **NO ES INYECTIVA.**

NOTA: Ahora el domino y la imagen son diferentes.

Ejercicios

Determinar si las siguientes funciones son o no inyectivas.

1) $f(x) = 4x – 2$

2) $f(x) = x^3 – x$

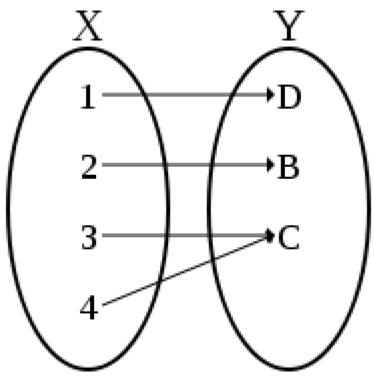
3) $f(x) = \sqrt{x}$

4) $f(x) = 2$

5) $f(x) = 1 – x^2 – x$

FUNCIÓN SOBREYECTIVA

Una función es sobreyectiva (epiyectiva, suprayectiva, suryectiva o exhaustiva), si está aplicada sobre todo el codominio, es decir, cuando la imagen , o en palabras más sencillas, cuando cada elemento de "Y" es la imagen de como mínimo un elemento de "X".

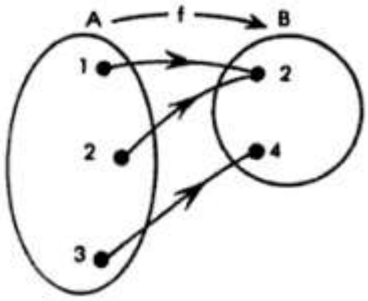


Ejemplos

1.- Sean los conjuntos:

A = {1,2,3} y B = {2,4} y la función f = {(1,2), (2,2), (3,4)}

Gráficamente queda:

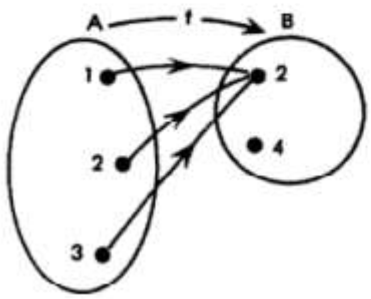


Al conjunto B = {2,4} se le llama codominio. El rango de la función también es I = {2,4}, .Como el codominio y el rango son iguales la función es **SOBREYECTIVA.**

2.- Sean los mismos conjuntos anteriores PERO con la función:

f = {(1,2), (2,2), (3,2)}.

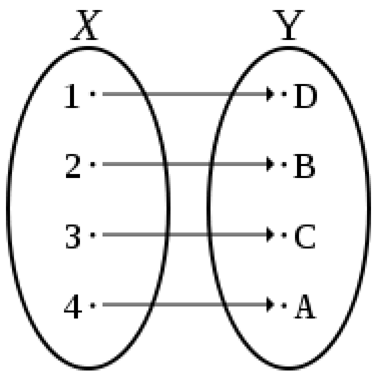
Gráficamente



El codomino B = {2, 4} El rango o imagen es: I = {2} Como el codominio y el rango **NO** son iguales la función es **NO ES SUPRAYECTIVA.**

FUNCIÓN BIYECTIVA

Una función es **biyectiva** si es al mismo tiempo inyectiva y sobreyectiva; es decir, si todos los elementos del conjunto de salida tienen una imagen distinta en el conjunto de llegada, y a cada elemento del conjunto de llegada le corresponde un elemento del conjunto de salida.



FUNCIÓN FRACCIONARIA

Una función es fraccionaria cuando puede ser escrita como un cociente de polinomios.

f(x) = p(x)/q(x)

Siendo q(x) distinto del polinomio nulo.

El dominio de una función fraccionaria es

$$dom\, f = \mathbb{R} - \{x \in \mathbb{R}/Q_x = 0\}$$

Ejemplos:

$$\boldsymbol{f}_{(x)} = \frac{\boldsymbol{2x^2 - 3}}{\boldsymbol{x + 2}}$$

1.- Igualando con cero la expresión del denominador: x + 2 = 0

2.- Resolviendo la ecuación resultante: x = - 2

3.- El dominio de la función $\boldsymbol{f}_{(x)} = \frac{\boldsymbol{2x^2 - 3}}{\boldsymbol{x+2}}$ son todos los valores de $x \in \mathbb{R}\, excepto\; x = -2$, en intervalos el dominio es: $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$

Ejercicios:

Hallar el dominio de las siguientes funciones fraccionarias.

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^2 + 1}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^2 + 2x + 1}$$

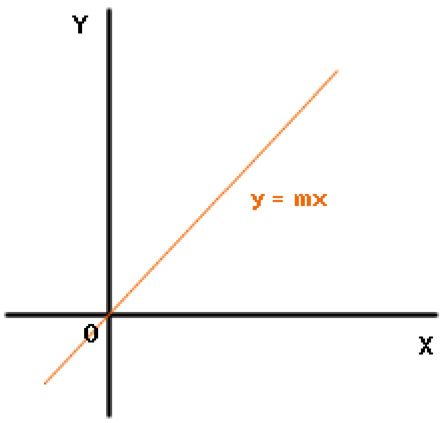
$$f(x) = \frac{2x^2 - 3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$$

FUNCIÓN LINEAL

Una **función lineal** es una función polinómica de primer grado; es decir, una función cuya representación en el plano cartesiano es una línea recta. Esta función se puede escribir como:

$$f(x) = mx + b$$

donde *m* y *b* son constantes reales y *x* es una variable real. La constante *m* es la pendiente de la recta, y *b* es el punto de corte de la recta con el eje *y*. Si se modifica *m* entonces se modifica la inclinación de la recta, y si se modifica *b*, entonces la línea se desplazará hacia arriba o hacia abajo.



Ejemplos

1.- f(x) = 2x+7

2.-f(x) = - 4x+3

3.-f(x) = 2x + 5 + 7x - 3

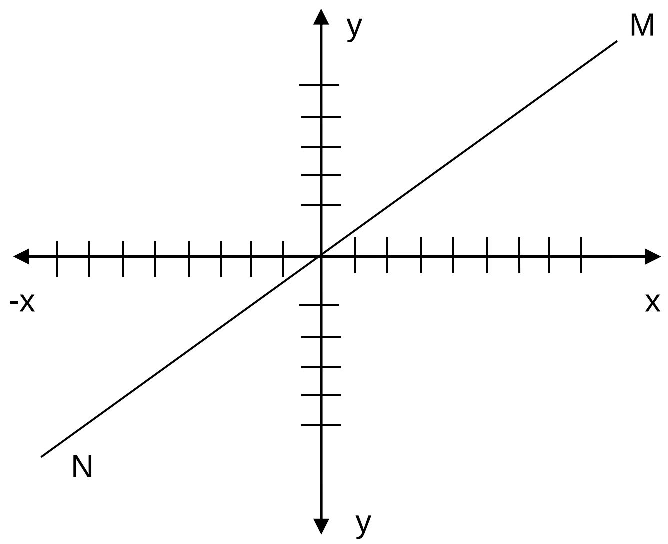
Ejercicios:

1.- Representar gráficamente la función y = 2x

Dando valores a "x" se obtienen una serie de valores correspondientes a "y"

Para x = 0	y = 2(0)	y = 0, el origen es un punto del gráfico
Para x = 1	y = 2(1)	y = 2
Para x = 2	y = 2(2)	y = 4
Para x = 3	y = 2(3)	y = 6
Para x = -1	y = 2(-1)	y = -2
Para x = -2	y = 2(-2)	y = 4
Para x = -3	y = 2(-3)	y = -6

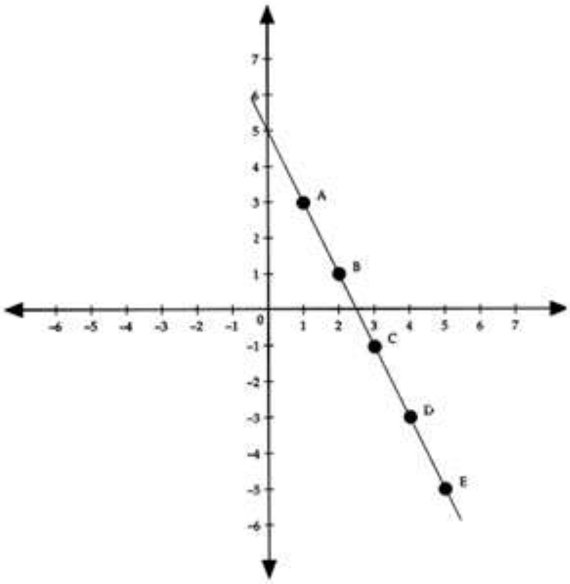
Representando los valores de "x" como abscisas y los valores correspondientes de "y" como ordenadas, se obtiene la serie de puntos que aparecen en el gráfico. La línea recta MN que pasa por el origen es el gráfico de y = 2x



2.- Representar gráficamente la función y = -2x + 5

Para x = 0	y = -2(0) + 5	y = 5
Para x = 1	y = -2(1) + 5	y = 3
Para x = 2	y = -2(2) + 5	y = 1
Para x = 3	y = -2(3) + 5	y = -1
Para x = 4	y = -2(4) + 5	y = -3
Para x = 5	y = -2(5) + 5	y = -5

Una vez que los valores se han tabulado, se procede a representarlos gráficamente.



Ejercicios

1.- y = 3x-2

2.- y = -2x+4

3.- y = -1/2 x +3

4.- y = 5x - 3/4

5.- y = -2X – 4

6.- y = $\frac{5x}{4}$

7.- y = $\frac{x+6}{2}$

8.- y = $\frac{5x-4}{2}$

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Una **función cuadrática** es aquella que puede escribirse como una ecuación de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde **a**, **b** y **c** (llamados **términos**) son números reales cualesquiera y **a** es distinto de **cero** (puede ser mayor o menor que cero, pero no igual que cero). El valor de **b** y de **c** sí puede ser **cero**.

En la ecuación cuadrática cada uno de sus términos tiene un nombre.

Así,

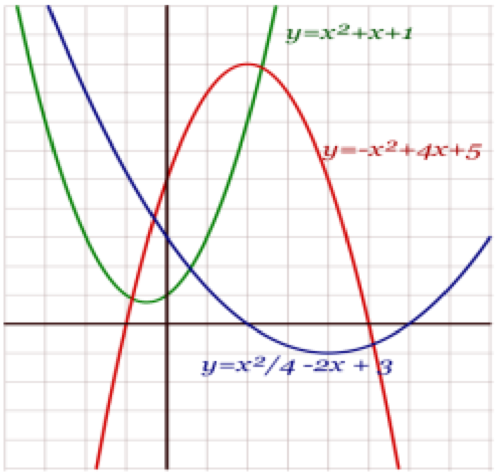
ax^2 es el término **cuadrático**

bx es el término **lineal**

c es el término **independiente**

En la **ecuación de segundo grado o cuadrática** si tiene todos los términos se dice que es un **ecuación completa**, si a la ecuación le falta el término lineal o el independiente se dice que la ecuación es **incompleta**.

Si representamos "todos" los puntos (x,f(x)) de una función cuadrática, obtenemos siempre una curva llamada parábola.

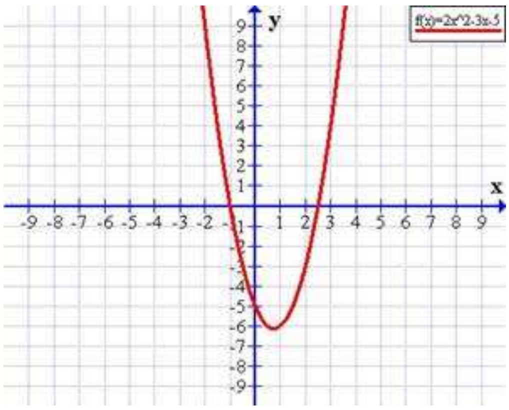


Orientación o concavidad

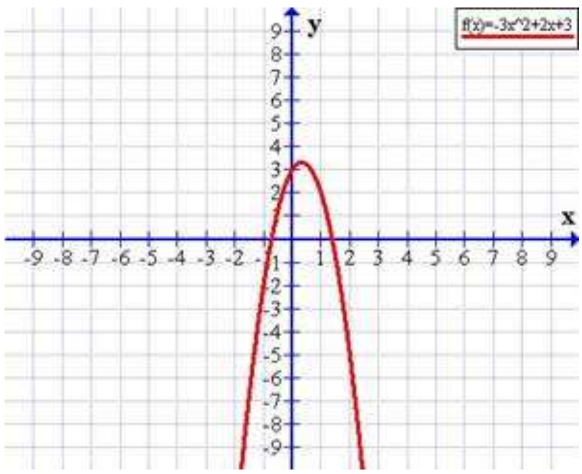
Una primera característica es la **orientación** o **concavidad** de la parábola. Hablamos de **parábola cóncava** si sus ramas o brazos se orientan hacia arriba y hablamos de **parábola convexa** si sus ramas o brazos se orientan hacia abajo.

Esta distinta orientación está definida por el valor (el signo) que tenga el término cuadrático **(la ax^2)**:

Si $a > 0$ (positivo) la parábola es cóncava o con puntas hacia arriba, como en $f(x) = 2x^2 - 3x - 5$



Si $a < 0$ (negativo) la parábola es convexa o con puntas hacia abajo, como en $f(x) = -3x^2 + 2x + 3$



Además, cuanto mayor sea |a| (el valor absoluto de a), más cerrada es la parábola.

Puntos de corte en el eje de las abscisas (Raíces o soluciones) (eje de las X)

Otra característica o elemento fundamental para graficar una función cuadrática la da el valor o los valores que adquiera **x**, los cuales deben calcularse.

Ahora, para calcular las raíces (soluciones) de cualquier función cuadrática calculamos

$$\mathbf{f\ (x) = 0}.$$

Esto significa que las raíces (soluciones) de una función cuadrática son aquellos **valores de x** para los cuales la expresión vale 0; es decir, los **valores de x tales que y = 0**; que es lo mismo que **f(x) = 0**.

Entonces hacemos

$$\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$$

Como la ecuación $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$ posee un término de segundo grado, otro de primer grado y un término constante, no podemos aplicar las propiedades de las ecuaciones, entonces, para resolverla usamos la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Entonces, las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática nos indican los puntos de intersección de la parábola con el **eje de las X (abscisas)**.

Respecto a esta intersección, se pueden dar tres casos:

Que corte al eje X en dos puntos distintos

Que corte al eje X en un solo punto (es tangente al eje x)

Que no corte al eje X

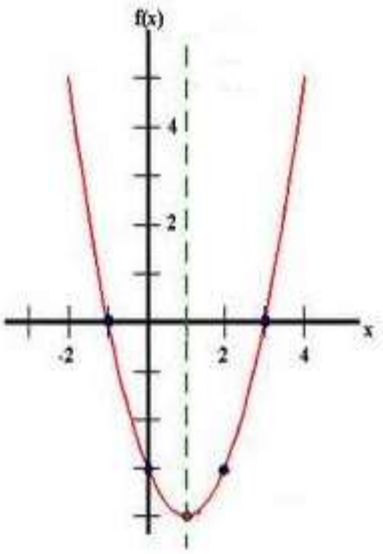
Ejemplo

Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:

$$y = x^2 - 2x - 3$$

x	$y = x^2 - 2x - 3$
-2	5
-1	0
0	-3
1	-4
2	-3
3	0

Gráfica



Ejercicios

Hallar el gráfico de las siguientes funciones

1.- $y = \frac{x^2}{2}$

2.- $y - x^2 = 2$

3.- $y = x^2 - 3x$

4.- $y = x + \frac{x^2}{2}$

5.- $y = x^2 + 2x$

6.- $y = -x^2 + 2x + 8$

7.- $y = x^2$ + 4x + 2

8.- $y = -x^2 - 4x + 5$

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Sea “a” un número real positivo. La función que a cada número real “*x”* le hace corresponder la potencia a^x se llama **función exponencial de base *a* y exponente *x*.**

Como $a^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, la función exponencial es una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$.

En el siguiente teorema, se presentan las propiedades más importantes de la función exponencial.

2.1.1 Teorema (Leyes de los Exponentes)

Sean *a* y *b* reales positivos y *x,y*□□ ,entonces:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.

2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$.

3. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$.

4. $(a \cdot b)^x = a^x \cdot b^x$.

5. $\left[\dfrac{a}{b}\right]^x = \dfrac{a^x}{b^x}$.

6 . $\left[\dfrac{a}{b}\right]^{-x} = \left[\dfrac{b}{a}\right]^x$

Cuando $a > 1$, si $x < y$, entonces, $a^x < a^y$ .Es decir, cuando la base *a* es mayor que 1, la función exponencial de base *a* es estrictamente creciente en su dominio.

Cuando $0 < a < 1$, si $x < y$, entonces, $a^y < a^x$.

Esto significa que la función exponencial de base *a* < 1 es estrictamente decreciente en su dominio.

$a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$.

10. Si 0< *a* < *b*, se tiene:

$x > 0 \Rightarrow a^x < b^x$

$x < 0 \Rightarrow a^x > b^x$.

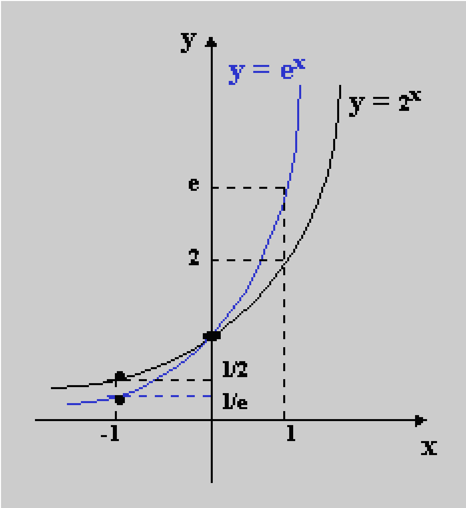
Esta propiedad permite comparar funciones exponenciales de diferentes bases.

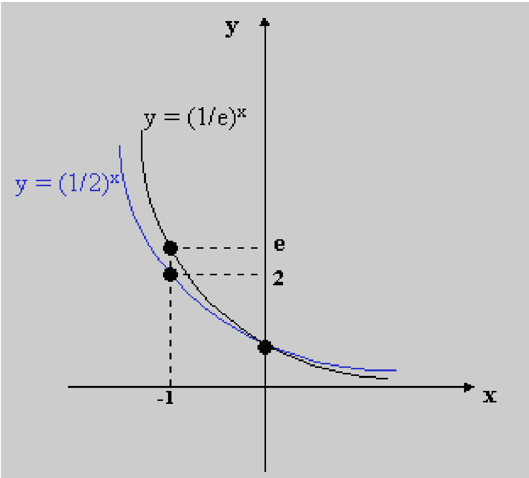
11. Cualquiera que sea el número real positivo y^0 , existe un único número real x^0 tal que $a^{x_0} = y_0$ .. Esta propiedad indica que la función exponencial es sobreyectiva.

Cuando "*x*" e "*y*" son enteros, los propiedades enunciadas anteriormente pueden demostrarse usando las definiciones y el teorema 1. Para el caso en el cual *x* e *y* son racionales, la demostración utiliza la definición y el teorema 2. Para el caso general, es decir, cuando *x* e *y* son reales, la demostración utiliza elementos del análisis real.

Gráfica de la Función Exponencial

En primer lugar, en las figuras 1 y 2, aparecen las gráficas de algunas funciones exponenciales de base *a* > 1 (fig. 1) y de base *a* < 1 (fig. 2).





Note que cuando la base *a* es mayor que 1, la función exponencial $y = a^x$ (fig.1) no está acotada superiormente. Es decir, a^x crece sin límite al aumentar la variable *x*. Además, ésta función tiene al cero como extremo inferior. Esto es, a^x tiende a cero (0), cuando *x* toma valores grandes pero negativos.

Igualmente, cuando la base *a* < 1, la función exponencial $y = a^x$ (fig.2) no está acotada superiormente, pero su comportamiento para valores grandes de *x*, en valor absoluto, es diferente. Así, a^x crece sin límite, al tomar *x* valores grandes, pero negativos y a^x tiende a cero, cuando la variable *x* toma valores grandes positivos.

El hecho de ser la función exponencial a^x con *a* > 1, estrictamente creciente (estrictamente decreciente cuando 0 < *a* < 1), significa que la función exponencial es inyectiva en su dominio. Este hecho y la continuidad de la función son las condiciones que se exigen para garantizar la existencia de la función inversa (función logarítmica).

Observación.

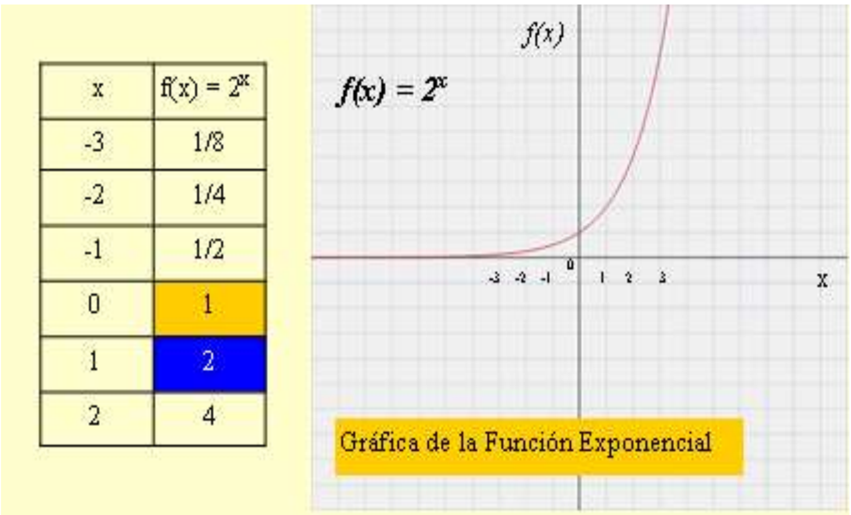
Cuando *a* = *e* ,donde *e* es el número irracional cuya representación decimal con sus primeras cifras decimales, es *e* = 2.7182818284….,la función exponencial e^x ,se llama: **función exponencial de base *e*** y, frecuentemente, se denota por **Exp(*x*) =** e^x **.**

EJEMPLO

1.- Graficar y = 2^x

Para realizar el gráfico de la función exponencial, se elabora un cuadro que permita tabular o calcular ***f(x)*** a partir de **x.**

Por ejemplo para graficar la función del ejemplo anterior:



x	$f(x) = 2^x$
-3	1/8
-2	1/4
-1	1/2
0	1
1	2
2	4

Ejercicios:

Graficar las siguientes funciones:

1.- $y = 2^x + 3$

2.- $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 2$

3.- $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x + 3$

4.- $y = 2^x + 1$

5.- $y = 2^x + 2$

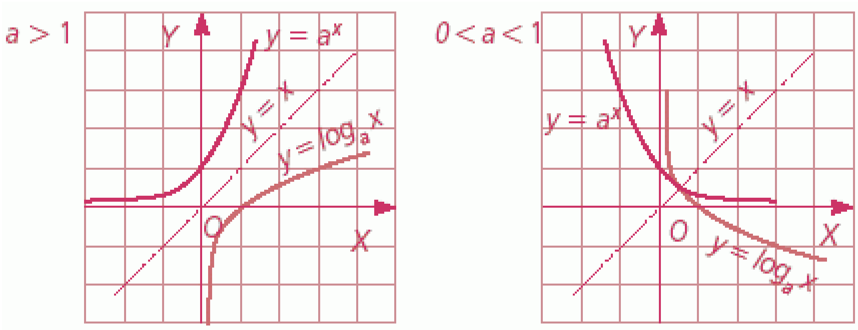
FUNCIÓN LOGARÍTMICA:

Una **función logarítmica** es aquella que genéricamente se expresa como f (x) == $\log_a x$, siendo a la **base** de esta función, que ha de ser positiva y distinta de 1.

La función logarítmica es la inversa de la **función exponencial** dado que:

$\log_a x = b \rightarrow a^b = x$.

La notación **$\log_a x = b$** se lee **"el logaritmo de x en la base a es b"**.



Representación gráfica de funciones logarítmicas y de sus inversas (exponenciales).

El **dominio** de una función logaritmo es el conjunto de todos los números reales positivos y el **recorrido** el conjunto de todos los números reales.

Propiedades de la función logarítmica

Las propiedades generales de la función logarítmica se deducen a partir de las de su inversa, la función exponencial. Así, se tiene que:

- La función logarítmica sólo existe para valores de x positivos, sin incluir el cero. Por tanto, su dominio es el intervalo (0,+□).
- Las imágenes obtenidas de la aplicación de una función logarítmica corresponden a cualquier elemento del conjunto de los números reales, luego el recorrido de esta función es R.

- En el punto x = 1, la función logarítmica se anula, ya que $\log_a 1 = 0$, en cualquier base.
- La función logarítmica de la base es siempre igual a 1.
- Finalmente, la función logarítmica es continua, y es creciente para a > 1 y decreciente para a < 1.

Los logaritmos mantienen ciertas identidades aritméticas muy útiles a la hora de realizar cálculos:

- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_b(xy) = \log_b(x) + \log_b(y)$$

- El logaritmo de un cociente es igual al logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador.

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(x) - \log_b(y)$$

- El logaritmo de una potencia es igual al producto entre el exponente y el logaritmo de la base de la potencia.

$$\log_b(x^y) = y\log_b(x)$$

- El logaritmo de una raíz es igual al producto entre la inversa del índice y el logaritmo del radicando.

$$\log_b(\sqrt[y]{x}) = \frac{\log_b(x)}{y}$$

En realidad la tercera y cuarta identidad son equivalentes, sin más que hacer:

$$\sqrt[y]{x} = x^{\frac{1}{y}}$$

Ejemplo

1.- ¿A qué exponente hay que elevar la base 5 para obtener 25? Al exponente 2, ya que $5^2 = 25$. Se dice que **"el logaritmo de 25 en la base 5 es 2"**. Simbólicamente se expresa de la forma $\log_5 25 = 2$. De manera que, $\mathbf{\log_5 25 = 2}$ es <u>equivalente</u> a $\mathbf{5^2 = 25}$.

También podemos decir que $\mathbf{2^3 = 8}$ es <u>equivalente</u> a $\mathbf{\log_2 8 = 3}$.

2.- Despejar las incógnitas:

a.- $log_2 8 = y$ esto es equivalente a $2^y = 8 \rightarrow y = 3$

b.- $log_b 25 = 2$ esto es equivalente a $b^2 = 25 \rightarrow b = 5$

3.- Aplicar las leyes de los logaritmos para evaluar

$log_2 80 - \log 25$

Usando la ley $log_a \frac{x}{y} = log_a x - log_a y$, tenemos que

$$log_2 80 - \log 25 = log_2 80 - log_2 5 = log_2 \frac{80}{5} = log_2 16 = 4$$

porque $2^4 = 16$

EJERCICIOS

1.-Expresa los siguientes logaritmos en forma exponencial:

$1)\log_3 27 = 3$

$2)\log_{36} 6 = \frac{1}{2}$

$3)\log_3\left(\frac{1}{9}\right) = -2$

2.-Expresa de la forma exponencial a la forma logarítmica:

$1)81 = 9^2$

$2)\frac{1}{3} = 3^{-1}$

$3)100^{\frac{1}{2}} = 10$

3.- Expresa de la forma exponencial a la forma logarítmica:

$1)64 = 4^3$

$2)2 = \sqrt[3]{8}$

$3)\frac{1}{16} = 4^{-2}$

4.- Halla el valor de x si $\log_3 9 = x$.

Halla el valor de b si $\log_b 8 = 3$.

Halla el valor de y si $\log_2 y = 7$.

5.- Usa las propiedades para escribir cada expresión como un solo logaritmo:

$\log_3 (x) + \log_3 (6) =$

$\log_3 (24) - \log_3 (4) =$

$\log_{10} (x - 1) + \log_{10} (3) - 3 \log_{10} (x) =$

BIBLIOGRAFÍA

BALDOR, A. Algebra. Publicación Cultural, S.A. de C.V. 1983. Primera Edición Patria Cultural. México.

DUEÑEZ R, Glenda A. 1999. Matemática Pre-Universitaria para Ingeniería. Universidad de Carabobo. Facultad de Ingeniería.

NAVARRO, E. 1980. Matemática de 7mo Grado. Libros Educativos. Edulibros. Caracas.

NAVARRO, E. 1980. Matemática de 8vo Grado. Libros Educativos. Edulibros. Caracas.

NAVARRO, E. 1980. Matemática de 9no Grado. Libros Educativos. Edulibros. Caracas.

NAVARRO, E. 1980. Matemática de 4to Año. Libros Educativos. Edulibros. Caracas.

NAVARRO, E. 1980. Matemática de 5to Año. Libros Educativos. Edulibros. Caracas.