

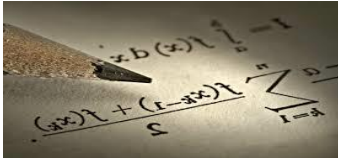
Prefacio

El presente documento forma parte del programa de estudios de la materia Análisis Numérico ofrecida a sus estudiantes en el Instituto Universitario de Tecnología para la informática – IUTEPI Sirve de apoyo complementario bajo la modalidad de autoaprendizaje publicado en su campus virtual, a todos los alumnos que cursan la materia.

El análisis numérico o cálculo numérico es la rama de las matemáticas encargada de diseñar algoritmos para, a través de números y reglas matemáticas simples, simular procesos matemáticos más complejos aplicados a procesos del mundo real.

Análisis Numérico, es definido por Henrici como la disciplina que se ocupa de la descripción y análisis de los algoritmos numéricos para la obtención de la solución de un problema matemático, en el que intervienen números, ya sea de manera exacta o aproximada.

El análisis numérico es una alternativa muy eficiente para la resolución de ecuaciones, tanto algebraicas (polinomios) como trascendentes teniendo una ventaja muy importante respecto a otro tipo de métodos: la repetición de instrucciones lógicas (iteraciones), proceso que permite mejorar los valores inicialmente considerados como solución. Dado que se trata siempre de la misma operación lógica, resulta muy pertinente el uso de recursos de cómputo para realizar esta tarea.



El desarrollo y el auge del uso de análisis numérico corre en forma paralela al desarrollo tecnológico de la computación. Las computadoras (en consecuencia también las calculadoras) están facultadas para realizar una multitud prácticamente infinita de operaciones algebraicas en intervalos de tiempos muy pequeños; esto lo convierte en la herramienta ideal para la aplicación de los métodos numéricos. De hecho, el análisis numérico resulta ser la manera natural de resolver modelos matemáticos, a través de la computadora.

Por otra parte, como consecuencia directa de la aplicación de soluciones numéricas y del crecimiento de recursos computacionales, se ha logrado también la incorporación de la simulación matemática como una forma de estudio de diversos sistemas.

Sin embargo debe haber claridad en el sentido de que el análisis numérico no es la panacea en la solución de problemas matemáticos.

Introducción

Es importante destacar, la relación de las matemáticas con las Ciencias y las Tecnologías, a esto podemos añadir que una de las disciplinas más relevantes es la de Análisis Numérico, siendo uno de los legados más importantes de las matemáticas del siglo xx en el que la irrupción y posterior desarrollo de las computadoras hizo necesario traducir las matemáticas a un lenguaje comprensible para la máquina.

Análisis Numérico es una disciplina surgida hace medio siglo, cuando los grandes científicos de la época desarrollaban el programa de Newton y establecían los principios y herramientas fundamentales de Análisis y del Cálculo Diferencial, estaban ya establecidos los cimientos del Análisis Numérico, esto fue primero con el objeto de construir el complejo edificio del cálculo diferencial, a partir de la más simple aritmética, para después, ya en el siglo xx, deshacer ese camino traduciendo las Matemáticas al lenguaje del ordenador.

Lo cual busca dar soluciones exactas a un determinado problema, mediante la aplicación de métodos numéricos, dando con ellos una aproximación pero con una precisión requerida, o sea, con un error lo suficientemente pequeño y próximo a cero. De ahí que, se considera importante el tiempo empleado en obtener la solución y en esto ha jugado un papel importante el enorme desarrollo de la tecnología computarizada.

Contenido del programa de estudios

- Sistema de Ecuaciones Lineales: Método de Gauss, Gauss – Jordan, Gauss – Seidel
- Valores y Vectores Característicos: Método directo, obtención de la ecuación característica
- Programación y Diagrama de Flujo: Ecuación de segundo grado, cálculo del ángulo entre dos vectores, cálculo del factorial de un número, gráfica de una función.

Generalidades sobre análisis numérico

Definición de Análisis Numérico

El análisis numérico es una rama de las matemáticas que, mediante el uso de algoritmos interactivos, obtiene soluciones numéricas a problemas en las cuales la matemática simbólica (o analítica) resulta poco eficiente y en consecuencia no puede ofrecer una solución. En particular, a estos algoritmos se les denomina métodos numéricos.

Por lo general los métodos numéricos, se componen de un número de pasos finitos que se ejecutan de manera lógica, mejorando aproximaciones iniciales a cierta cantidad, tal como la raíz de una ecuación, hasta que se cumple con cierta cota de error. A esta operación cíclica de mejora del valor se le conoce como iteración.

Problema Numérico:

Descripción precisa de la relación funcional entre un conjunto finito de datos de entrada y un conjunto finito de datos de salida.

Algoritmo:

Secuencia ordenada y finita de pasos, exenta de ambigüedades, que seguidas en su orden lógico nos conduce a la solución de un problema específico.

Método Numérico:

Procedimiento para transformar un problema matemático en numérico y resolver éste último. El análisis numérico se utiliza generalmente cuando no se puede resolver el problema matemático, es decir hallar una relación funcional entre el conjunto de entrada y el de salida. Los pasos a seguir son:

1. **Estudio teórico del problema:** existencia y unicidad de la solución.
2. **Aproximación:** crear una solución para un número finito de valores, tales como existencia y unicidad, estabilidad y convergencia.
3. **Resolución:** elección de un algoritmo numérico, elección del algoritmo en cuanto al costo y estabilidad, codificación del algoritmo y ejecución del programa.

Sistemas de Ecuaciones Lineales

Una ecuación es una igualdad que se verifica para ciertos valores de las incógnitas que en ella intervienen. Las ecuaciones se componen de expresiones algebraicas separadas por un signo igual. En matemáticas y álgebra lineal, un sistema de ecuaciones lineales, también conocido como sistema lineal de ecuaciones o simplemente sistema lineal, es un conjunto de ecuaciones lineales (es decir, un sistema de ecuaciones en donde cada ecuación es de primer grado), definidas sobre un cuerpo o un anillo conmutativo.

El problema de los sistemas lineales de ecuaciones es uno de los más antiguos de la matemática y tiene una infinidad de aplicaciones, como en procesamiento digital de señales, análisis estructural, estimación, predicción y más generalmente en programación lineal así como en la aproximación de problemas no lineales de análisis numérico.

Sistema de ecuaciones lineales son aquellas que se agrupan una serie de ecuaciones (m) con un grupo de incógnitas (n) de la siguiente forma:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2in}x_n = b_2$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$$

El conjunto de sistema lineal viene dado por: $Ax = C$, donde A representa la matriz de coeficientes, C el vector dado y X representa el vector a ser determinado, para resolver un sistema de ecuaciones se puede aplicar uno de los siguientes métodos:

- 1) Eliminación Gaussiana
- 2) Método de Gauss Jordan
- 3) Método Gauss Seidel

Método de Eliminación Gaussiana

Es el algoritmo más utilizado e implica el reemplazo de ecuaciones por combinación de ecuaciones es decir se obtiene un sistema rectangular. Después se halla los componentes x_1, x_2, \dots, x_n del vector x una tras otra ecuación por un proceso llamado sustitución regresiva. El teorema garantiza una solución única de un sistema $Ax = C$, cuando existe el sistema homogéneo correspondiente a $Ax = 0$, tiene solamente solución $X = 0$, ambos sistemas al igual que la matriz A se le llama singulares.

El método consiste en reducir la matriz de coeficientes a la izquierda de una forma triangular en la cual la diagonal principal consiste en unos y con todos los coeficientes bajo la diagonal principal en ceros.

Ejemplo: Resolver el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{1}{3} X + \frac{1}{4} Y + \frac{1}{5} Z = 0 \\ \frac{1}{2} X + \frac{1}{3} Y + \frac{1}{4} Z = 0 \\ X + \frac{1}{2} Y + \frac{1}{3} Z = 1 \end{cases}$$

Pasos para resolver el sistema de ecuaciones

- 1) Se describe la matriz de coeficientes y se localiza el mayor coeficiente en valor absoluto y se trae a la esquina superior izquierda por intercambio de filas y columna.

Elemento pivote \rightarrow

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 \end{array}$$

- 2) Se divide todas las ecuaciones por el elemento pivote (1), para reducir a 1 la entrada de la diagonal principal, (para l ejemplo va quedar igual).
- 3) Se reduce a 0 los coeficientes de la columna debajo del elemento pivote (mediante operaciones por filas)

$$F_2 = F_2 - \frac{1}{2} F_1 \begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ \rightarrow & & & \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{2} \end{array}$$

$$0 \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{12} \quad -\frac{1}{2}$$

$$F_3 = F_3 - \frac{1}{3} F_1 \begin{array}{cccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & 0 \\ \rightarrow & & & \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{9} & -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$0 \frac{1}{12} \frac{4}{45} - \frac{1}{3}$$

Transformando en una nueva matriz:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{4}{45} & -\frac{1}{3} \end{array} \right|$$

De nuevo se repite el paso anterior

$$F_3 = F_3 - F_2 \cdot 0 \quad \frac{1}{12} \frac{4}{45} - \frac{1}{3}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & -\frac{1}{12} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{180} & \frac{1}{6} \end{array}$$

$$F_2 = 12 \cdot F_2 \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & -6 \end{array}$$

Nueva matriz:

$$\left| \begin{array}{ccc|c} 1X & \frac{1}{2}Y & \frac{1}{3}Z & 1 \\ 1Y & & 1Z & -6 \\ \frac{1}{180}Z & & & \frac{1}{6} \end{array} \right|$$

Reducir las ecuaciones hacia atrás:

3^{ra} Ecuación $\frac{1}{180}Z = \frac{1}{6}$ Despejando Z $Z = 30 \rightarrow$

2^{da} Ecuación $1Y + Z = -6$ $1Y + 30 = -6$ Despejando Y $Y = -36 \rightarrow$

1^{ra} Ecuación $X + \frac{1}{2}Y + \frac{1}{3}Z = 1$ $X + \frac{1}{2}(-36) + \frac{1}{3}(30) = 1$ Despejando X $X = 9 \rightarrow$

Por lo tanto el vector solución es el siguiente: $(x,y,z) = (9, -36, 30)$

Método Gauss Jordan

En matemáticas, la **eliminación de Gauss Jordan**, llamada así en honor de Carl Friedrich Gauss y Wilhelm Jordan es un algoritmo del álgebra lineal que se usa para determinar las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales, para encontrar matrices e inversas. Un sistema de ecuaciones se resuelve por el método de Gauss cuando se obtienen sus soluciones mediante la reducción del sistema dado a otro equivalente en el que cada ecuación tiene una incógnita

menos que la anterior. El método de Gauss transforma la matriz de coeficientes en una matriz triangular superior. El método de Gauss-Jordan continúa el proceso de transformación hasta obtener una matriz diagonal.

Consiste en reducir por renglones la matriz de coeficientes a la forma escalonada reducida por renglones, llevando la matriz A del sistema lineal a una matriz identidad.

Matiz Identidad: es una matriz cuyos elementos de la diagonal principal son iguales a uno(1), y todos los demás elementos son ceros(0).

$$\begin{matrix}
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 1
 \end{matrix}
 \left(\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right)$$

Matriz identidad de orden 3*3

$$I_n = a(i,j) \quad \text{Donde} \quad a(i,j) = 1, \quad \text{Si} \quad i = j \quad \text{o} \quad i \neq j$$

Ejemplo: Continuando con el ejercicio anterior

$$\left| \begin{array}{ccc|c}
 1X & \frac{1}{2}Y & \frac{1}{3}Z & 1 \\
 & 1Y & 1Z & -6 \\
 & & \frac{1}{180}Z & \frac{1}{6}
 \end{array} \right|$$

Pasos

- 1) Multiplicar una ecuación por un escalar no nulo, para el ejercicio sería $F_3 * 180 = 180 * (\frac{1}{180} \frac{1}{6}) = (1 \quad 30)$
- 2) Trabajar ecuación por ecuación realizando operaciones matemáticas
- 3) Sumar o restar ecuaciones en múltiplo de otra

$$\begin{aligned}
 & (1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad 1) = 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad 1 \\
 & \mathbf{F_{1N}} = \mathbf{F_1} \xrightarrow{+ \frac{1}{2} * (0 \quad 1 \quad -6)} = 0 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad -3 \\
 & \mathbf{F_{1N}} = 1 \quad 0 \quad -\frac{1}{6} \quad 4 \\
 & \mathbf{F_2} = 0 \quad 1 \quad -6 \\
 & \mathbf{F_{2N}} = \mathbf{F_2} \xrightarrow{-F_3} = 0 \quad 1 \quad 30 \\
 & \mathbf{F_{2N}} = 0 \quad 1 \quad 0 \quad -36 \\
 & \mathbf{F_1} = 1 \quad 0 \quad -\frac{1}{6} \quad 4 \\
 & \mathbf{F_{1N}} = \mathbf{F_1} + \frac{1}{6} \mathbf{F_3} \xrightarrow{+ \frac{1}{6} * (0 \quad 0 \quad \frac{1}{6} \quad 5)} \\
 & \mathbf{F_{1N}} = 1 \quad 0 \quad 0 \quad 9
 \end{aligned}$$

Método Gauss Seidel

En análisis numérico el **método de Gauss-Seidel** es un método iterativo utilizado para resolver sistemas de ecuaciones lineales. El método se llama así en honor a los matemáticos alemanes Carl Friedrich Gauss y Philipp Ludwig von Seidel y es similar al método de Jacobi.

Aunque este método puede aplicarse a cualquier sistema de ecuaciones lineales que produzca una matriz (cuadrada, naturalmente pues para que exista solución única, el sistema debe tener tantas ecuaciones como incógnitas) de coeficientes con los elementos de su diagonal no-nulos, la convergencia del método solo se garantiza si la matriz es diagonalmente dominante o si es simétrica y, a la vez, definida positiva.

Auto-evaluación:

- 1) Dado los siguientes sistemas de ecuaciones encontrar la solución por el método Gauss:

$$\begin{cases} 2X - 3Y + 2Z = 14 \\ 4X + 4Y - 3Z = 6 \\ 3X + 2Y - 3Z = -2 \end{cases}$$

- 2) Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por el método Gauss Jordan.

$$\begin{cases} 2X + Y - Z = 8 \\ -3X - Y + 2Z = -11 \\ -2X + Y + 2Z = -3 \end{cases}$$

- 3) Encontrar la inversa de la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Valores y vectores característicos

Definición de Vectores: Es un segmento de recta orientada, en el plano, es decir es un par ordenado de números reales (X, Y) , donde X e Y son los componentes del vector, por ejemplo $\vec{V}(X, Y) = 4_i + 3_j$

Elementos de un vector: punto de aplicación, dirección (vertical, horizontal o inclinada, sentido (dirección de la flecha) y magnitud o módulo.

Magnitud: Corresponde a la longitud de cualquiera de sus representaciones; es decir el número que representa la cantidad, y se representa de la siguiente manera

$$\|A\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

Método directo para calcular los valores y vectores característicos:

Teorema 1:

Sea A una matriz cuadrada n.n con componentes reales. El # λ se llama valor propio de A si existe un vector diferente de cero tal que:

$$A.X = \lambda.X$$

X: Representa el vector propio ($X \neq 0$) de A, asociado a λ

λ : Representa el valor propio de A

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \lambda = 1$$

Demostrar: $A.X = \lambda.X$

$$\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10 \cdot 2 + (-18) \cdot 1 \\ 6 \cdot 2 + (-11) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 20 - 18 \\ 12 - 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Teorema 2: Sea A una matriz de nxn, entonces λ es un Valor Propio de A

Polinomio característico: conocida también como la Ecuación característica de A.

$$P(\lambda) = \text{Det}(A - \lambda.I) = 0$$

$P(\lambda)$: Representa el Polinomio Característico de A

Det: Determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

I: Matriz Identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Los valores propios de A son las raíces del polinomio característico

$$\lambda \text{ valor propio} \Leftrightarrow P(\lambda) = 0$$

Ejemplo: Dada la siguiente matriz, determine los valores propios, $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

$$1) \lambda \cdot I = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad (A - \lambda \cdot I) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2-0 \\ -5-0 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$2) \text{Det}(A - \lambda \cdot I) = \text{Det} \begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -5 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (-2-\lambda) \cdot (1-\lambda) - (-5) \cdot (-2) = -2 + 2\lambda - \lambda + \lambda^2 - 10 = \lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

Polinomio característico

$$P(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 12 = 0$$

Valores Propios

$$\lambda^2 + \lambda - 12 = 0 \quad a = 1, b = 1, c = -12$$

Aplicando la ecuación $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-12)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2}$

$$\lambda_1 = \frac{-1 + 7}{2} = 3 \quad \lambda_2 = \frac{-1 - 7}{2} = -4$$

3) **Calculando los vectores propios** X con $(A - \lambda \cdot I) \cdot X = 0$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -5 & 1-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0$$

Para $\lambda = -4$: $\begin{pmatrix} 2 - (-4) & -2 \\ -5 & 1 - (-4) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = 0 \quad \begin{matrix} 6X - 2Y = 0 & \rightarrow & 3X = Y & \rightarrow & X = Y/3 \\ -5X + 5Y = 0 & \rightarrow & -5X = -5Y & \rightarrow & X = Y \end{matrix}$$

Por lo tanto: para el valor propio $\lambda = -4$, el $P(1,1)$ es un Vector Propio.

De igual forma se sustituye para $\lambda = 3$; dando como resultado: $X = -2Y/5$

Si $Y = 5$; $X = -2$ Por lo tanto para el valor propio $\lambda = 3$; el vector propio es $P(-2,5)$

Auto-evaluación:

1) Para las siguientes matrices determine el polinomio característico, $P(\lambda)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} -3 \end{pmatrix}$$

Programación y Diagramas de Flujo

Programación: La programación es un proceso que se utiliza para idear y ordenar las acciones que se realizarán en el marco de un proyecto; al anuncio de las partes que componen un acto o espectáculo; a la preparación de máquinas para que cumplan con una cierta tarea en un momento determinado; a la elaboración de programas para la resolución de problemas mediante ordenadores; y a la preparación de los datos necesarios para obtener una solución de un problema.

En la actualidad, la noción de programación se encuentra muy asociada a la creación de aplicaciones informáticas y videojuegos; es el proceso por el cual una persona desarrolla un programa valiéndose de una herramienta que le permita escribir el código (el cual puede estar en uno o varios lenguajes, tales como C++, Java, Python entre otros) y de otra que sea capaz de “traducirlo” a lo que se conoce como lenguaje de máquina, el cual puede ser entendido por un microprocesador.

Diagrama de Flujo: El diagrama de flujo o flujograma o diagrama de actividades es la representación gráfica de un algoritmo o proceso. Se utiliza en disciplinas como programación, economía, procesos industriales y psicología cognitiva.

Estos diagramas utilizan símbolos con significados definidos que representan los pasos del algoritmo, y representan el flujo de ejecución mediante flechas que conectan los puntos de inicio y de fin del proceso.

El **diagrama de flujo** describe las distintas acciones, tareas o actividades asociadas a un proceso y representa la secuencia entre cada una de ellas y su relación, así como la información complementaria, los recursos y materiales que se precisan para su ejecución.

El desarrollo del **diagrama de flujo** de un proceso facilita su comprensión y dimensiona su magnitud, permitiendo que los implicados en su implantación (departamentos e individuos) tengan una perspectiva amplia y una visión de conjunto del proceso.

Del mismo modo permite identificar los puntos críticos del proceso y los posibles errores que pudieran cometerse, asignando las responsabilidades oportunas si fuera preciso. También permite establecer las pautas asociadas de control y seguimiento de los costes y los tiempos, lo que redundará además en productividad y eficiencia.

El uso de estos diagramas permite la implantación del **pensamiento analítico** en la **gestión del proceso**, lo que sumado a lo anteriormente expuesto hace del diagrama de flujo una herramienta indispensable en la gestión y optimización de los procesos.

Representación gráfica de un algoritmo: Al representar un algoritmo se debe utilizar un método que permita independizar el algoritmo del lenguaje de programación.

Método para representar el algoritmo: Diagrama de flujo, se aplicará para los siguientes puntos

- ✓ Ecuación de segundo grado
- ✓ Cálculo del factorial de un número
- ✓ Ángulo entre dos vectores
- ✓ Cálculo de la gráfica de una función

Para desarrollar un diagrama de flujo es necesario:

▪ Identificar y determinar el proceso

Hemos de identificar cuál es el proceso, qué implica y de qué tipo de proceso se trata (estratégico, operativo o de soporte). Así seremos capaces de determinar si es un proceso clave o subordinado.

▪ Establecer y clasificar las etapas

Es imprescindible establecer todas las etapas del proceso, clasificándolas en función de su importancia y de la dirección del flujo.

▪ Determinar la profundidad y alcance del proceso

También es importante determinar el grado de detalle que necesitamos, así como la profundidad del proceso, pues esto afectará a su desarrollo. Es recomendable plasmar todos los detalles, aunque no siempre es necesario.

▪ Secuenciar el proceso

Cada etapa está asociada a una acción o tarea que estará supeditada a la anterior y que, a su vez, condicionará a la posterior. Por ello habrá que determinar el flujo que permita garantizar el correcto desarrollo del proceso.














▪ Crear el diagrama

Es el momento de abordar el desarrollo gráfico del diagrama de flujo, para lo que habrá que contar con una herramienta informática específica.

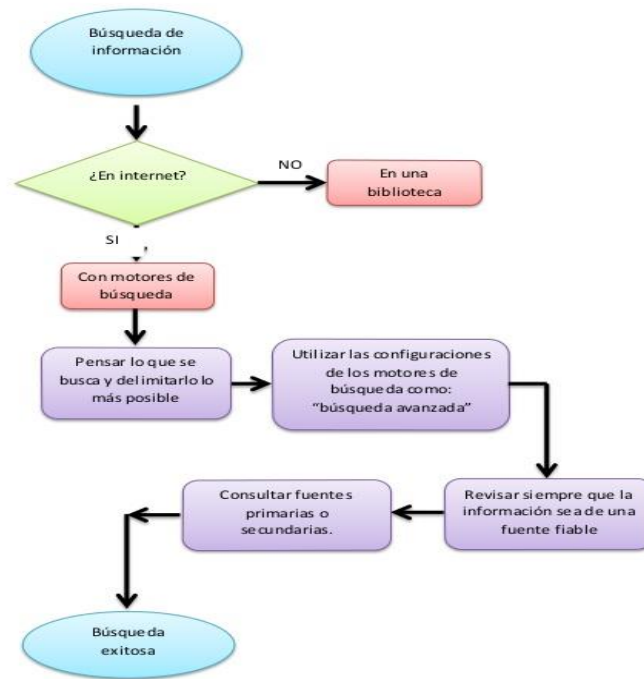
▪ Revisar el diagrama

Una vez desarrollado es el momento de revisarlo detenidamente y verificar si está correcto.

Símbolos del diagrama de flujo:

símbolo	denominación	descripción
	inicio y final	abre y cierra el diagrama
	actividad	representa la ejecución de uno o varios procedimientos
	inspección medición	representa la etapa donde se verifica la calidad y cantidad de los insumos y/o producto
	decisión	formula una pregunta o una cuestión a resolver
	conector	representa el enlace de actividades con otras relacionadas en un procedimiento
	archivo o almacén definitivo	guardar un documento o material permanentemente
	archivo o almacén temporal	guardar un documento o material temporalmente, por un tiempo indicado
	terminador	contenedor de datos con información del comienzo o final del proceso
	datos	contenedor de datos necesarios para el desarrollo de una actividad
	documentos	informa sobre la consulta a un documento específico de la etapa del proceso
	retraso	informa sobre el retraso en el desarrollo del proceso
	transporte	indica el movimiento de personas, material o equipos necesarios para el desarrollo del proceso
	línea de flujo	indica la línea de flujo del proceso

Ejemplo:



Ecuación de segundo grado:

Las ecuaciones de segundo grado y su solución de las ecuaciones se conocen desde la antigüedad. En Babilonia se conocieron algoritmos para resolverla. Fue encontrado independientemente en otros lugares del mundo. En Grecia, el matemático Diofanto de Alejandría aportó un procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones (aunque su método sólo proporcionaba una de las soluciones, incluso en el caso de que las dos soluciones sean positivas). La primera solución completa la desarrolló el matemático Al-Juarismi (o Al-Khwarizmi según otras grafías), en el siglo IX en su trabajo *Compendio de cálculo por reintegración y comparación*, cerrando con ello un problema que se había perseguido durante siglos. Basándose en el trabajo de Al-Juarismi, el matemático judeoespañol Abraham bar Hiyya, en su *Liberembadorum*, discute la solución de estas ecuaciones.^[cita requerida] Hay que esperar a Évariste Galois para conseguir resolver en general las ecuaciones polinómicas, o saber cuándo son irresolubles por radicales, que viene a ser una generalización de los métodos de resolución de las ecuaciones de segundo grado.

Una **ecuación de segundo grado** o **ecuación cuadrática de una variable** es una ecuación que tiene la expresión general:

$$A.X^2 + B.X + C = 0$$

Donde x es la variable, y , a , b y c constantes; a es el coeficiente cuadrático (distinto de 0), b el coeficiente lineal y c es el término independiente. Este polinomio se puede interpretar mediante la gráfica de una función cuadrática, es decir, por una parábola. Esta representación gráfica es útil, porque las abscisas de las intersecciones o punto de tangencia de esta gráfica, en el caso de existir, con el eje X son las raíces reales de la ecuación. Si la parábola no corta el eje X las raíces son números complejos, corresponden a un discriminante negativo.

$$X = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4.a.c}}{2.a} \quad \begin{cases} X_1 = (-b + \sqrt{b^2 - 4.a.c}) / 2.a \\ X_2 = (-b - \sqrt{b^2 - 4.a.c}) / 2.a \end{cases}$$

Se calcula $b^2 - 4.a.c$ para ello se obtienen 3 soluciones posibles:

1. Si $b^2 - 4.a.c = 0 \Rightarrow$ Tiene 2 soluciones iguales $X_1 = X_2$
2. Si $b^2 - 4.a.c < 0 \Rightarrow$ No tiene solución, son raíces imaginarias
3. Si $b^2 - 4.a.c > 0 \Rightarrow$ Tiene 2 soluciones Diferentes $\rightarrow X_1 \neq X_2$

Ejemplos:

1) Si $a = 1$ $b = 2$ $c = 2$ Calculando $b^2 - 4.a.c = (2)^2 - 4.1.2 = 4 - 8 = -4$ " Raíces imaginarias"

$X = (-2 \pm \sqrt{-4}) / 2$ Raíz de un número negativo no existe.

2) Si $a = 2$ $b = 4$ $c = 2$ Calculando $b^2 - 4.a.c = 4^2 - 4.2.2 = 16 - 16 = 0$ "2 Raíces iguales"

$$X = (-4 \pm \sqrt{0}) / 2.2 = (-4 \pm 0) / 4 \quad X_1 = X_2 = -1$$

3) Si $a = 1$ $b = 4$ $c = 3$ Calculando $b^2 - 4.a.c = 4^2 - 4.1.3 = 16 - 12 = 4$ "2 Raíces diferentes"

$$\begin{aligned} X &= (-4 \pm \sqrt{4}) / 2.1 = (-4 \pm 2) / 2 \quad X_1 = (-4 + 2) / 2 = (-2) / 2 \quad X_1 = -1 \quad \rightarrow \\ X_2 &= (-4 - 2) / 2 = (-6) / 2 \quad X_2 = -3 \quad \rightarrow \end{aligned}$$

Factorial de un número:

El factorial de un número es el producto de todos los términos de un numero, se obtiene mediante la descomposición sucesiva y decreciente, es decir multiplicando todos sus términos.

Formulas $N! = n.(n - 1).(n - 2).(n - 3).....(n - n)!$ $(1)_n C_x = n! / x!(n - x)!$ (2)

Propiedades:

- a. El factorial de un número negativo no existe
- b. El factorial de 0 es igual a 1 ($0! = 1$)
- c. El factorial existe para cualquier número entero positivo.

La **función factorial** (símbolo:!) sólo quiere decir que se multiplican una serie de números que descienden. Ejemplos:

- $4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
- $7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$
- $1! = 1$

Ejercicios:

Calcular el factorial de 4

Usando la 1^{ra} formula $4! = 4 \cdot (4 - 1) \cdot (4 - 2) \cdot (4 - 3) \cdot (4 - 4)! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 24$

La 2^{da} formula si $X = 0$ y $n = 4$ ${}_n C_x = \frac{n!}{x! \cdot (n - x)!} = \frac{4!}{0! \cdot (4 - 0)!} = \frac{24}{24} = 1$

Angulo entre dos vectores:

Vector: es un par ordenado de números reales (X,Y)

En el plano: $\vec{V}(X,Y) = X_i + Y_j$ Ejemplo $V(3,4) = 3_i + 4_j$

En el espacio: $\vec{V}(X,Y,Z) = X_i + Y_j + Z_k$

Magnitud de un Vector: Corresponde a la longitud de cualquiera de sus representaciones, es decir $\|A\|$

$\|A\| = \sqrt{a^2 + b^2}$ donde A(a,b) es el vector

Sean los vectores: $u = u_x i + u_y j + u_z k$ $v = v_x i + v_y j + v_z k$ entonces el ángulo θ entre u y v es:

$$\theta = \arccos \left(\frac{u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z}{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} \cdot \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \right)$$

Ejercicio práctico:

El siguiente enlace se le dará a conocer como calcular el ángulo entre dos vectores <https://www.youtube.com/watch?v=jBoNgb6auhQ>

Gráfica de una función:

En matemática la **gráfica de una función** es un tipo de representación gráfica que permite conocer intuitivamente el comportamiento de dicha función.

El gráfico es el conjunto de todos los pares ordenados $(x, f(x))$ de la función f , es decir, como un subconjunto del producto cartesiano $X \times Y$. Se representa gráficamente mediante una correspondencia entre los elementos del conjuntodominio y los del conjunto imagen.

Las únicas funciones que se pueden trazar de forma no ambigua mediante líneas, son las de una sola variable, con un sistema de coordenadas cartesianas, donde cada abscisa representa un valor de la variable del dominio y cada ordenada representa el valor correspondiente del conjunto imagen. Si la función es continua, entonces la gráfica formará una línea recta o curva. En el caso de funciones de dos variables es posible visualizarlas de forma unívoca mediante una proyección geométrica, pero a partir de tres variables tan solo es posible visualizar cortes (con un plano) de la función para los que los valores de todas las variables, excepto dos, permanezcan constantes. Algunos software de representación usan además colores, o curvas de nivel lo cual se puede lograr una representación satisfactoria.

El concepto de gráfica de una función se generaliza a la gráfica de una relación. Notar que si bien cada función tiene una única representación gráfica, pueden existir varias funciones que tengan la misma, pero con dominios y codominios diferentes. En el siguiente enlace se le ilustra un ejercicio de cómo obtener una gráfica:

<https://www.sangakoo.com/es/temas/grafica-de-una-funcion>

Auto-evaluación:

- 1) Realizar el diagrama de flujo para obtener las raíces de una ecuación cuadrática.
- 2) Elaborar el diagrama de flujo para obtener el factorial de un número real.

Bibliografía:

- ✓ Sullivan, J. (2006). *"Polinomios y funciones racionales"*. Álgebra y Trigonometría (7ª edición). Pearson Educación.
- ✓ Charles Lehman. *"Álgebra superior"*
- ✓ Allen Smith, W. Análisis Numérico, Editorial Prentice-Hall, México, 1988.
- ✓ <http://es.wikipedia.org/>