Instituto Universitario de Tecnologia para la Informática

INVESTIGACION DE OPERACIONES

Lic. Enza Azzarelli

CONTENIDO PROGRAMÁTICO INTRODUCCIÓN A LA INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES

Unidad I Introducción a la Investigación de Operaciones

- Definiciones
- Reseña Histórica
- Modelos
- Tipos
- Características

Unidad II Programación Lineal

- Definición
- Modelos de Programación Lineal
- MétodosGráficos (Problemas de Maximización)
- Tipos de Solución
  Alterna
  Infactibles
  Infinitas
- Método Simplex
  Algebra del Método Simplex para una problema de maximización
  Forma Tabulada
  Problemas de Maximización
- Método Dual Simplex
- Modelo de Inventario
- Modelo de Transporte
- Utilización de software para Programación Lineal

Unidad III Programación Lineal

- Teoría de Colas
- Modelo de Teoría de Colas
- Proyecto de Teoría de Colas
- Software Power Simversión 2.0 for Window

Lic. Enza Azzarelli

UNIDAD I

Investigación de Operaciones

- Definición
- Reseña Histórica
- Modelos
- Tipos
- Características

Introducción

Los cambios revolucionarios originaron gran aumento en la división de trabajo y la separación de las responsabilidades administrativas en las organizaciones. Sin embargo, esta revolución creo nuevos problemas que ocurren hasta la fecha en muchas empresas. Uno de estos problemas es la tendencia de muchos de los componentes a convertirse en imperios relativamente autónomos, con sus propias metas y sistemas de valores. Este tipo de problemas, y la necesidad de encontrar la mejor forma de resolverlos, proporcionaron el surgimiento de la Investigación de Operaciones.

La Investigación de Operaciones aspira determinar la mejor solución (optima) para un problema de decisión con la restricción de recursos limitados.

En la Investigación de Operaciones utilizaremos herramientas que nos permiten tomar una decisión a la hora de resolver un problema tal es el caso de los modelos e Investigación de Operaciones que se emplean según sea la necesidad.

Para llevar a cabo el estudio de Investigación de Operaciones es necesario cumplir con una serie de etapas o fases. Las principales etapas o fases de las que hablamos son las siguientes:

? Definición del problema.

? Construcción del modelo.

? Solución del modelo.

? Validación del modelo.

? Implantación de los resultados finales.

Orígenes de la Investigación de Operaciones

El inicio de la Investigación de Operaciones se remonta a la época de la Segunda Guerra Mundial en donde surgió la necesidad urgente de asignar recursos escasos a las diferentes operaciones militares y a las actividades dentro de cada operación, en la forma más efectiva, es por esto, que las administraciones militares americana e inglesa hicieron un llamado a un gran número de científicos para que aplicaran el método científico a los problemas estratégicos y tácticos, a dichos científicos se les pidió que hicieran investigaciones sobre las operaciones militares. Todo el esfuerzo de este equipo de científicos (que fueron el primer equipo de Investigación de Operaciones) logró el triunfo de muchas batallas.

Luego de terminar la guerra, el éxito de la Investigación de Operaciones en las actividades bélicas generó un gran interés en sus aplicaciones fuera del campo militar.

Desde la década de 1950, se había introducido el uso de la Investigación de Operaciones en la industria, los negocios y el gobierno, desde entonces, esta disciplina se ha desarrollado con rapidez.

Un factor importante de la implantación de la Investigación de Operaciones en este periodo es el mejoramiento de las técnicas disponibles en esta área. Muchos de los científicos que participaron en la guerra, se encontraron a buscar resultados sustanciales en este campo; un ejemplo sobresaliente es el método Simplex para resolución de problemas de Programación Lineal, desarrollado en 1947 por George Dantzing. Muchas de las herramientas utilizadas en la Investigación de Operaciones como la Programación Lineal, la Programación Dinámica, Líneas de Espera y Teoría de Inventarios fueron desarrollados al final de los años 50.

Un segundo factor importante para el desarrollo de este campo fue el advenimiento de la revolución de las computadoras. Para manejar los complejos problemas relacionados con esta disciplina, generalmente se requiere un gran número de cálculos que llevarlos a cabo a mano es casi imposible. Por lo tanto el desarrollo de la computadora digital, fue una gran ayuda para la Investigación de Operaciones.

En la década de los 80 con la invención de computadoras personales cada vez más rápidas y acompañadas de buenos paquetes de Software para resolver problemas de Investigación de Operaciones esto puso la técnica al alcance de muchas personas. Hoy en día se usa toda una gama de computadoras, desde las computadoras de grandes escalas como las computadoras personales para la Investigación de Operaciones.

Definición y Significado de Investigación de Operaciones

La Investigación de Operaciones aspira a determinar el mejor curso de acción, o curso óptimo, de un problema de decisión con la restricción de recursos limitados.

Como técnica para la resolución de problemas, investigación de operaciones debe visualizarse como una ciencia y como un arte.

Como Ciencia radica en ofrecer técnicas y algoritmos matemáticos para resolver problemas de decisión adecuada.

Como Arte debido al éxito que se alcanza en todas las fases anteriores y posteriores a la solución de un modelo matemático, depende de la forma apreciable de la creatividad y la habilidad personal de los analistas encargados de tomar las decisiones.

En un equipo de Investigación de Operaciones es importante la habilidad adecuada en los aspectos científicos y artísticos de Investigación de Operaciones. Si se destaca un aspecto y no el otro probablemente se impedirá la utilización efectiva de la Investigación de Operaciones en la práctica.

- La Investigación de Operaciones en la Ingeniería de Sistemas se emplea principalmente en los aspectos de coordinación de operaciones y actividades de la organización o sistema que se analice, mediante el empleo de modelos que describan las interacciones entre los componentes del sistema y de éste con este con su medio ambiente
- En la Investigación de Operaciones la parte de "Investigación" se refiere a que aquí se usa un enfoque similar a la manera en la que se lleva a cabo la investigación en los campos científicos establecidos. La parte de "Operaciones" es porque en ella se resuelven problemas que se refieren a la conducción de operaciones dentro de una organización.

Características de la Investigación de Operaciones

- La Investigación de Operaciones usa el método científico para investigar el problema en cuestión. En particular, el proceso comienza por laobservación cuidadosa y la formulación del problema incluyendo la recolección de datos pertinentes.
- La Investigación de Operaciones adopta un punto de vista organizacional. De esta manera intenta resolver los conflictos de interés entre los componentes de la organización de forma que el resultado sea el mejor para la organización completa.
- La Investigación de Operaciones intenta encontrar una mejor solución (llamada solución optima), para el problema bajo consideración. En lugar de contentarse con mejorar el estado de las cosas, la meta es identificar el mejor curso de acción posible.
- En la Investigación de Operaciones es necesario emplear el enfoque de equipo. Este equipo debe incluir personal con antecedentes firmes en matemáticas, estadísticas y teoría de probabilidades, economía, administración de empresas ciencias de la computación, ingeniería, etc. El equipo también necesita tener la experiencia y las habilidades para permitir la consideración adecuada de todas las ramificaciones del problema.
- La Investigación de Operaciones ha desarrollado una serie de técnicas y modelos muy útiles a la Ingeniería de Sistemas. Entre ellos tenemos: laProgramación No Lineal, Teoría de Colas, Programación Entera, Programación Dinámica, entre otras.
- La Investigación de Operaciones tiende a representar el problema cuantitativamente para poder analizarlo y evaluar un criterio común.

Definición de Modelos

- Un modelo de decisión debe considerarse como un vehículo para resumir un problema de decisión en forma tal que haga posible la identificación yevaluación sistemática de todas las alternativas de decisión del problema. Después se llega a una decisión seleccionando la alternativa que se juzgue sea la mejor entre todas las opciones disponibles.
- Un modelo es una abstracción selectiva de la realidad.
- El modelo se define como una función objetivo y restricciones que se expresan en términos de las variables (alternativas) de decisión del problema.
- Una solución a un modelo, no obstante, de ser exacta, no será útil a menos que el modelo mismo ofrezca una representación adecuada de la situación de decisión verdadera.
- El modelo de decisión debe contener tres elementos:
    - ✓ Alternativas de decisión, de las cuales se hace una selección.
    - ✓ Restricciones, para excluir alternativas infactibles.
    - ✓ Criterios para evaluar y clasificar alternativas factibles.

Tipos de Modelos de Investigación de Operaciones.

(a) Modelo Matemático: Se emplea cuando la función objetivo y las restricciones del modelo se pueden expresar en forma cuantitativa o matemática como funciones de las variables de decisión.

(b) Modelo de Simulación: Los modelos de simulación difieren de los matemáticos en que las relaciones entre la entrada y la salida no se indican en forma explícita. En cambio, un modelo de simulación divide el sistema representado en módulos básicos o elementales que después se enlazan entre si vía relaciones lógicas bien definidas. Por lo tanto, las operaciones de cálculos pasaran de un módulo a otro hasta que se obtenga un resultado de salida.

Los modelos de simulación cuando se comparan con modelos matemáticos; ofrecen mayor flexibilidad al representar sistemas complejos, pero esta flexibilidad no está libre de inconvenientes. La elaboración de este modelo suele ser costoso en tiempo y recursos. Por otra parte, los modelos matemáticos óptimos suelen poder manejarse en términos de cálculos.

(c) Modelos de Investigación de Operaciones de la ciencia de la administración: Los científicos de la administración trabajan con modelos cuantitativos de decisiones.

(d)Modelos Formales: Se usan para resolver problemas cuantitativos de decisión en el mundo real. Algunos modelos en la ciencia de la administración son llamados modelos determinísticos. Esto significa que todos los datos relevantes (es decir, los datos que los modelos utilizarán o evaluarán) se dan por conocidos. En los modelos probabilísticos (o estocásticos), alguno de los datos importantes se consideran inciertos, aunque debe especificarse la probabilidad de tales datos.

? **Modelo de Hoja de Cálculo Electrónica:** La hoja de cálculo electrónica facilita hacer y contestar preguntas de "que si" en un problema real. Hasta ese grado la hoja de cálculo electrónica tiene una representación selectiva del problema y desde este punto de vista la hoja de cálculo electrónica es un modelo.

En realidad es una herramienta más que un procedimiento de solución.

Etapas de la Investigación de Operaciones.

Las etapas de un estudio de Investigación de Operaciones son las siguientes:

? Definición del problema de interés y recolección de los datos relevantes.

? Formulación de un modelo matemático que represente el problema.

? Desarrollo de un procedimiento basado en computadora para derivar una solución al problema a partir del modelo.

? Prueba del modelo y mejoramiento según sea necesario.

? Preparación para la aplicación del modelo prescrito por la administración.

? Puesta en marcha.

Definición del problema y recolección de datos

La primera actividad que se debe realizar es el estudio del sistema relevante y el desarrollo de un resumen bien definido del problema que se va a analizar. Esto incluye determinar los objetivos apropiados, las restricciones sobre lo que se puede hacer, las interrelaciones del área bajo estudio con otras áreas de la organización, los diferentes cursos de acción posibles, los límites de tiempo para tomar una decisión, etc. Este proceso de definir el problema es crucial ya que afectará en forma significativa la relevancia de las conclusiones del estudio.

Determinar los objetivos apropiados viene a ser un aspecto muy importante en la formulación del problema. Para hacerlo, es necesario primero identificar a la persona o personas de la administración que de hecho tomarán las decisiones concernientes al sistema bajo estudio, y después escudriñar los pensamientos de estos individuos respecto a los objetivos pertinentes. (Incluir al tomador de decisiones desde el principio es esencial para obtener su apoyo al realizar el estudio.)

Es común que los equipos de Investigación de Operaciones pasen mucho tiempo recolectando los datos relevantes sobre el problema. Se necesitan muchos datos como para lograr un entendimiento exacto del problema como para proporcionar el insumo adecuado para el modelo matemático que se formulará en la siguiente etapa del estudio.

Tomará un tiempo considerable al equipo de Investigación de Operaciones recabar la ayuda de otros de otros individuos clave de la organización para recolectar todos los datos importantes. Muchas veces, el equipo de Investigación de Operaciones pasará mucho tiempo intentando mejorar la precisión de los datos y al final tendrá que trabajar con lo que pudo obtener.

Aplicación: El Departamento de Salud de New Haven, Connecticut utilizó un equipo de Investigación de Operaciones para diseñar un programaefectivo de intercambio de agujas para combatir el contagio del virus que causa el SIDA (HIV), y tuvo éxito en la reducción del 33% de la tasa de infección entre los clientes del programa. La parte central de este estudio fue un innovador programa de recolección de datos para obtener los insumos necesarios para los modelos matemáticos de transmisión del SIDA. Este programa barco un rastreo completo de cada aguja (y cada jeringa), con la identificación, localización y fecha de cada persona que recibía una aguja y cada persona que la regresaba durante un intercambio, junto con la prueba de si la condición de la aguja era HIV - positivo o HIV - negativo.

Formulación de un modelo matemático

Una vez definido el problema del tomador de decisiones, la siguiente etapa consiste en reformularlo de manera conveniente para su análisis. La forma convencional en que la investigación de operaciones realiza esto es construyendo un modelo matemático que represente la esencia del problema. El modelo matemático puede expresarse entonces como el problema de elegir los valores de las variables de decisión de manera que se maximice la función objetivo, sujeta a las restricciones dadas. Un modelo de este tipo, y algunas variaciones menores sobre él, tipifican los modelos analizados en investigación de operaciones.

Un paso crucial en la formulación de un modelo de Investigación de Operaciones es la construcción de la función objetivo. Esto requiere desarrollar una medida cuantitativa de la efectividad relativa a cada objetivo del tomador de decisiones identificado cuando se estaba definiendo el problema. Si en el estudio se contemplan más de un objetivo, es necesario transformar y combinar las medidas respectivas en una medida compuesta de efectividad llamada **medida global de efectividad.** A veces esta medida compuesta puede ser algo tangible (por ejemplo, ganancias) y corresponder a una meta más alta de la organización, o puede ser abstracta (como "utilidad"). En este último caso la tarea para desarrollar esta medida puede ser compleja y requerir una comparación cuidadosa de los objetivos y su importancia relativa.

Aplicación: La Oficina responsable del control del agua y los servicios públicos del Gobierno de Holanda, el Rijkswaterstatt, concesionó un importante estudio de Investigación de Operaciones para guiarlo en el desarrollo de una importante política de administración del agua. La nueva política ahorrocientos de millones de dólares en gastos de inversión y redujo el daño agrícola en alrededor de 15 millones de dólares anuales, al mismo tiempo que disminuyo la contaminación térmica y debida a las algas. En lugar de formular un modelo matemático, este estudio de Investigación de Operaciones desarrolló un sistema integrado y comprensible de ¡50 modelos! Más aún, para alguno de los modelos, se desarrollan versiones sencillas y complejas. La versión sencilla se usó para adquirir una visión básica incluyendo el análisis de trueques. La versión compleja se usó después en las corridas finales del análisis o cuando se deseaba mayor exactitud o más detalles en los resultados. El estudio completo de Investigación de Operaciones involucró directamente a mas de 125 personas - año de esfuerzo (más de un tercio de ellas en la recolección de datos), creó varias docenas de programas de computación y estructuró una enorme cantidad de datos.

Obtención de una solución a partir del modelo

Una vez formulado el modelo matemático para el problema bajo estudio, la siguiente etapa para un estudio de Investigación de Operaciones consiste en desarrollar un procedimiento (por lo general basado en computadora) para derivar una solución al problema a partir de este modelo. Esta es una etapa relativamente sencilla, en la que se aplican uno de los algoritmos de investigación de operaciones en una computadora.

Lic. Enza Azzarelli

Un tema común en Investigación de Operaciones es la búsqueda de una solución óptima, es decir, la mejor. Se han desarrollado muchos procedimientospara encontrarla en cierto tipo de problemas, pero es necesario reconocer que estas soluciones son óptimas sólo respecto al modelo que se está utilizando.

La meta de un estudio de Investigación de Operaciones debe ser llevada a cabo el estudio de manera óptima, independientemente de si implica o no encontrar una solución óptima para el modelo. Al reconocer este concepto, los equipos de Investigación de Operaciones en ocasiones utilizan sólo procedimientos heurísticos (es decir, procedimientos de diseño intuitivo que no garantizan una solución óptima) para encontrar una buena solución subóptima. Esto ocurre con más frecuencia en los casos en que el tiempo o el costo que se requiere para encontrar una solución óptima para un modelo adecuado del problema son muy grandes.

Si la solución se implanta sobre la marcha, cualquier cambio en el valor de un parámetro sensible advierte de inmediato la necesidad de cambiar la solución.

El análisis posóptimo también incluye la obtención de un conjunto de soluciones que comprende una serie de aproximaciones, cada vez mejores, al curso de acción ideal. Así, las debilidades aparentes de la solución inicial se usan para sugerir mejoras al modelo, a sus datos de entrada y quizá al procedimiento de solución. Se obtiene entonces una nueva solución, y el ciclo se repite. Este proceso sigue hasta que las mejoras a soluciones sucesivas sean demasiado pequeñas para justificar su solución.

Aplicación: Considere el nuevo estudio de Investigación de Operaciones para el Rijkswaterstatt sobre la política de administración de agua en Holanda, que se introdujo en el concepto anterior. Este estudio no concluyó con la recomendación de una sola solución. Mas bien, se identificaron, analizaron y compararon varias alternativas atractivas. La elección final se dejo al proceso político de gobierno de Holanda que culmino con la aprobación del Parlamento. El análisis de sensibilidad jugó un papel importante en este estudio. Por ejemplo, ciertos parámetros de los modelos representaron estándares ecológicos. El análisis de sensibilidad incluyó la evaluación del impacto en los problemas de agua si los valores de estos parámetros se cambiaran de los estándares ecológicos a otros valores razonables. Se usó también para evaluar el impacto de cambios en las suposiciones de los modelos, por ejemplo, la suposición sobre el efecto de tratados internacionales futuros sobre la contaminación que pudiera llegar. También se analizaron varios escenarios (como años secos o húmedos extremosos), asignando las probabilidades adecuadas.

Prueba del modelo

El desarrollo de un modelo matemático grande es análogo en algunos aspectos al desarrollo de un programa de computadora grande. Cuando se completa la primera versión, es inevitable que contenga muchas fallas. El programa debe probarse de manera exhaustiva para tratar de encontrar y corregir tantos problemas como sea posible.

Este proceso de prueba y mejoramiento de un modelo para incrementar su validez se conoce como validación del modelo.

Un enfoque más sistemático para la prueba del modelo es emplear una prueba retrospectiva. Cuando es apacible, esta prueba utiliza datos históricos y reconstruye el pasado para determinar si el modelo y la solución resultante hubieran tenido un buen desempeño, de haberse usado. Al emplear alternativas de solución y estimar sus desempeños históricos hipotéticos, se pueden reunir evidencias en cuanto a lo bien que el modelo predice los efectos relativos de los diferentes cursos de acción.

Aplicación: En un estudio de Investigación de Operaciones para IBM se realizo con el fin de integrar su red nacional de inventarios de refacciones para mejorar el servicio a los clientes, al mismo tiempo que reducir el valor de los inventarios de IBM en mas de 250 millones de dólares y ahorrar otros 20 millones de dólares anuales a través del mejoramiento de la eficiencia operacional.

Un aspecto en particular interesante de la etapa de validación del modelo en este estudio fue la manera en que se incorporaron el proceso de prueba los usuarios futuros del sistema de inventarios. Debido a que estos usuarios futuros (los administradores de IBM en las áreas funcionales responsables de la implantación del sistema de inventarios) dudaban del sistema que se estaba desarrollando, se asignaron representantes a un equipo de usuarios que tendría la función de asesorar al equipo de Investigación de Operaciones. Una vez desarrollada la versión preliminar del nuevo sistema (basada en el sistema de inventarios de multiniveles) se lleva a cabo una prueba preliminar de implantación. La extensa retroalimentación por parte del equipo de usuarios llevo a mejoras importantes en el sistema propuesto.

Preparación para la aplicación del modelo

El siguiente paso es instalar un sistema bien documentado para aplicar el modelo según lo establecido por la administración.

Este sistema casi siempre está diseñado para computadora. De hecho, con frecuencia se necesita un número considerable de programas integrados. La base de datos y los sistemas de información administrativos pueden proporcionar entrada actualizada para el modelo cada vez que se use, en cuyo caso se necesitan programas de interfaz (de interacción con el usuario). Después de aplicar un procedimiento de solución (otro programa) al modelo, puede ser que los programas adicionales maneje la implantación de los resultados de manera automática. En otros casos se instala un sistema interactivo de computadora llamado sistema de soporte de decisiones, para ayudar a la gerencia a usar datos y modelos para apoyar (no para sustituir) su toma de decisiones cuando lo necesiten. Otro programa puede generar informes gerenciales (en el lenguaje administrativo) que interpretan la salida del modelo y sus implicaciones en la práctica.

Aplicación: Un sistema de computo grande para aplicar un modelo a las operaciones de control de una red nacional. Este sistema, llamado SYSNET, fue desarrollado como resultado de un estudio de Investigación de Operaciones realizado para la YellowFreightSystem, Inc. Esta compañía maneja anualmente mas 15 millones de envíos de mensajería a través de una red de 630 terminales en todo estados Unidos. SYSNET se usa tanto para optimizar tanto para optimizar las rutas de los envíos como el diseño de la red. Debido al que sistema requiere mucha información sobre los flujos y pronósticos de carga, los costos de transporte y manejo, etc.; una parte importante del estudio de Investigación de Operaciones está dedicada a la integración de SYSNET al sistema de información administrativo de la corporación. Esta integración permitió la integración periódica de la entrada al modelo. La implantación de SYSNET dio como resultado el ahorro anual de alrededor de 17.3 millones de dólares además de un mejor servicio a los clientes.

Implantación

Una vez desarrollado un sistema para aplicar un modelo, la última etapa de un estudio de Investigación de Operaciones es implementarlo siguiendo lo establecido por la administración.

La etapa de implantación incluye varios pasos. Primero, el equipo de Investigación de Operaciones da una cuidadosa explicación a la gerencia operativa sobre el nuevo sistema que se va a adoptar y su relación con la realidad operativa. Enseguida, estos dos grupos comparten la responsabilidad de desarrollar los procedimientos requeridos para poner este sistema en operación. La gerencia operativa se encarga después de dar una capacitación detallada al personal que participa, y se inicia entonces el nuevo curso de acción. Si tiene éxito, el nuevo sistema se podrá emplear durante algunos años. Con esto en mente, el equipo de Investigación de Operaciones supervisa la experiencia inicial con la acción tomada para identificar cualquier modificación que tenga que hacerse en el futuro.

Aplicación: Este último punto sobre la documentación de un estudio Investigación de Operaciones se ilustra con el caso de la política nacional de administración del agua de Rijkswaterstatt en Holanda. La administración deseaba documentación más extensa que lo normal, tanto para apoyar la nueva política como para utilizarla en la capacitación de nuevos analistas o al realizar nuevos estudios. Completar esta documentación requirió varios años y ¡quedo contenida en 4000 páginas a espacio sencillo encuadernadas en 21 volúmenes!

Definición de Sistemas de Producción

La producción es el acto intencional de producir algo útil. La definición de producción se modifica para incluir el concepto de sistema, diciendo que u sistema de producción es el proceso especifico por medio del cual los elementos se transforman en productos útiles. Un proceso es un procedimiento organizado para lograr la conversión de insumos en resultados.

Cualquier sistema es una colección de componentes interactuantes. Cada componente podría ser un sistema en sí mismo en un orden descendente de sencillez. Los sistemas se distinguen por sus objetivos; el objetivo de un sistema podría ser producir un componente que se va a ensamblar con otros componentes para alcanzar el objetivo que es un sistema mayor. Se requieren técnicas más elaboradas para tratar con sistemas más complejos. Es una carrera de relevos entre el desarrollo de sistemas cada vez más complejos y el desarrollo de métodos más eficientes de dirección para controlarlos.

Tipos de Modelos de los Sistemas de Producción

El modelo físico: Los modelos, por semejanza, derivan su utilidad de un cambio en la escala. Los patrones microscópicos pueden amplificarse para su investigación, y las enormes estructuras pueden hacerse a una escala más pequeña, hasta una magnitud que sea manipulable. Necesariamente, algunos detalles se pierden en los modelos. En las replicas físicas, esta pérdida puede ser una ventaja, cuando la consideración clave, es un factor, tal como la distancia, pero puede ser inútil un estudio si la influencia predominante se desvirtúa en la construcción del modelo.

El modelo esquemático: Los modelos de dos dimensiones son la delicia de quienes disfrutan de las gráficas. Los aspectos gráficos son útiles para propósitos de demostración. Algunos ejemplos que se encuentran comúnmente incluyen los diagramas de la organización, diagramas de flujo del proceso y gráficas de barras. Los símbolos sobre tales diagramas pueden arreglarse fácilmente para investigar el efecto de la reorganización.

El modelo matemático: Las expresiones cuantitativas, es decir, los modelos más abstractos, generalmente son los más útiles. Cuando un modelo matemático puede construirse para representar en forma exacta la situación de un problema, suministra una poderosa arma para el estudio; es fácil de manipular, el efecto de las variables interactuantes se aprecia claramente y, sobre todo, es un modelo preciso. Por lo general, cualquier definición debida al empleo de los modelos matemáticos se origina por algún error cometido en las suposiciones básicas y en las premisas sobre las cuales están basados.

Fuente: Monografias.com

UNIDAD II

Programación Lineal

- Definición
- Modelos de Programación Lineal
- Métodos Gráficos (Problemas de Maximización)
- Tipos de Solución
  Alterna
  Infactibles
  Infinitas
- Método Simplex
  Algebra del Método Simplex para una problema de maximización
  Forma Tabulada
  Problemas de Maximización
- Método Dual Simplex
- Modelo de Inventario
- Modelo de Transporte
- Utilización de software para Programación Lineal

La Programación Lineal es un procedimiento o algoritmo matemático mediante el cual se resuelve un problema indeterminado, formulado a través de ecuaciones lineales, optimizando la función objetivo, también lineal.

Consiste en optimizar (minimizar o maximizar) una función lineal, denominada función objetivo, de tal forma que las variables de dicha función estén sujetas a una serie de restricciones que expresamos mediante un sistema de inecuaciones lineales.

Historia de la programación lineal

Cronología [1]

Año	**Acontecimiento**
1826	Joseph Fourier anticipa la programación lineal. Carl Friedrich Gauss resuelve ecuaciones lineales por eliminación "*gaussiana*".
1902	Gyula Farkas concibe un método para resolver sistemas de desigualdades.
1947	George Dantzig publica el algoritmo simplex y John von Neumann desarrolló la teoría de la dualidad. Se sabe que Leonid Kantoróvich también formuló la teoría en forma independiente.
1984	Narendra Karmarkar introduce el método del *punto interior* para resolver problemas de programación lineal.

El problema de la resolución de un sistema lineal de inecuaciones se remonta, al menos, a Joseph Fourier, después de quien nace el método de eliminación de Fourier-Motzkin. La programación lineal se plantea como un modelo matemático desarrollado durante la Segunda Guerra Mundial para planificar los gastos y los retornos, a fin de reducir los costos al ejército y aumentar las pérdidas del enemigo. Se mantuvo en secreto hasta 1947. En la posguerra, muchas industrias lo usaron en su planificación diaria.

Los fundadores de la técnica son George Dantzig, quien publicó el algoritmo simplex, en 1947, John von Neumann, que desarrolló la teoría de la dualidad en el mismo año, y LeonidKantoróvich, un matemático ruso, que utiliza técnicas similares en la economía antes de Dantzig y ganó el premio Nobel en economía en 1975. En 1979, otro matemático ruso, LeonidKhachiyan, diseñó el llamado Algoritmo del elipsoide, a través del cual demostró que el problema de la programación lineal es resoluble de manera eficiente, es decir, en tiempo polinomial.2 Más tarde, en 1984, NarendraKarmarkar introduce un nuevo método del punto interior para resolver problemas de programación lineal, lo que constituiría un enorme avance en los principios teóricos y prácticos en el área.

El ejemplo original de Dantzig de la búsqueda de la mejor asignación de 70 personas a 70 puestos de trabajo es un ejemplo de la utilidad de la programación lineal. La potencia de computación necesaria para examinar todas las permutaciones a fin de seleccionar la mejor asignación es inmensa (factorial de 70, 70!) ; el número de posibles configuraciones excede al número de partículas en el universo. Sin embargo, toma sólo un momento encontrar la solución óptima mediante el planteamiento del problema como una programación lineal y la aplicación del algoritmo simplex. La teoría de la programación lineal reduce drásticamente el número de posibles soluciones óptimas que deben ser revisadas.

Variables

Las variables son números reales mayores o iguales a cero.

$$X_i >= 0$$

En caso que se requiera que el valor resultante de las variables sea un número entero, el procedimiento de resolución se denomina Programación entera.

Restricciones

Las restricciones pueden ser de la forma:

Tipo 1:

$$A_j = \sum_{i=1}^{N} a_{i,j} \times X_i$$

Tipo 2:

$$B_j \leq \sum_{i=1}^{N} b_{i,j} \times X_i$$

Tipo 3:

$$C_j \geq \sum_{i=1}^{N} c_{i,j} \times X_i$$

Donde:

- **A** = valor conocido a ser respetado estrictamente;
- **B** = valor conocido que debe ser respetado o puede ser superado;
- **C** = valor conocido que no debe ser superado;
- j = número de la ecuación, variable de 1 a M (número total de restricciones);
- **a**; **b**; y, **c** = coeficientes técnicos conocidos;
- **X** = Incógnitas, de 1 a N;
- i = número de la incógnita, variable de 1 a N.

En general no hay restricciones en cuanto a los valores de **N** y **M**. Puede ser **N = M**; **N > M**; ó, **N < M**.

Sin embargo si las restricciones del **Tipo 1** son **N**, el problema puede ser determinado, y puede no tener sentido una optimización.

Los tres tipos de restricciones pueden darse simultáneamente en el mismo problema.

Función Objetivo

La función objetivo puede ser:

$$Max! = \sum_{i=1}^{N} f_i \times X_i$$

ó

$$Min! = \sum_{i=1}^{N} f_i \times X_i$$

Donde:

- f_i = coeficientes son relativamente iguales a cero.

Programación entera

En algunos casos se requiere que la solución óptima se componga de valores enteros para algunas de las variables. La resolución de este problema se obtiene analizando las posibles alternativas de valores enteros de esas variables en un entorno alrededor de la solución obtenida considerando las variables reales. Muchas veces la solución del programa lineal truncado está lejos de ser el óptimo entero, por lo que se hace necesario usar algún algoritmo para hallar esta solución de forma exacta. El más famoso es el método de 'Ramificar y Acotar' o Branch and Bound por su nombre en inglés. El método de Ramificar y Acotar parte de la adición de nuevas restricciones para cada variable de decisión (acotar) que al ser evaluado independientemente (ramificar) lleva al óptimo entero.

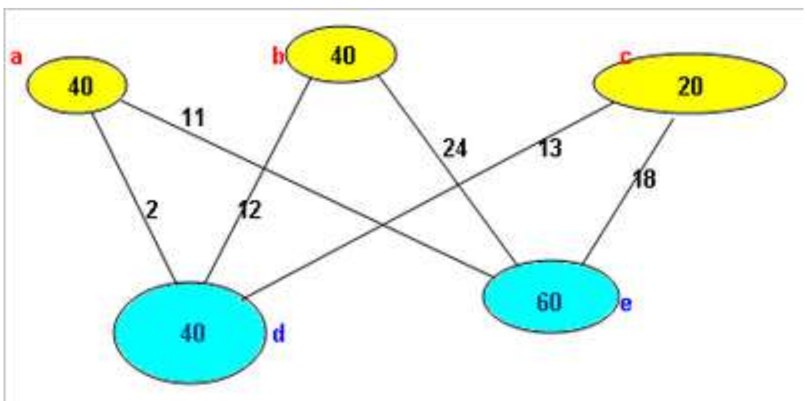
Aplicaciones

La programación lineal constituye un importante campo de la optimización por varias razones, muchos problemas prácticos de la investigación deoperaciones pueden plantearse como problemas de programación lineal. Algunos casos especiales de programación lineal, tales como los problemas de flujo de redes y problemas de flujo de mercancías se consideraron en el desarrollo de las matemáticas lo suficientemente importantes como para generar por si mismos mucha investigación sobre algoritmos especializados en su solución. Una serie de algoritmos diseñados para resolver otros tipos de problemas de optimización constituyen casos particulares de la más amplia técnica de la programación lineal. Históricamente, las ideas de programación lineal han inspirado muchos de los conceptos centrales de la teoría de optimización tales como la dualidad, la descomposición y la importancia de la convexidad y sus generalizaciones. Del mismo modo, la programación lineal es muy usada en la microeconomía y la administración de empresas, ya sea para aumentar al máximo los ingresos o reducir al mínimo los costos de un sistema de producción. Algunos ejemplos son la mezcla de alimentos, la gestión de inventarios, la cartera y la gestión de las finanzas, la asignación de recursos humanos y recursos de máquinas, la planificación de campañas de publicidad, etc.

Otros son:

- Optimización de la combinación de cifras comerciales en una red lineal de distribución de agua.
- Aprovechamiento óptimo de los recursos de una cuenca hidrográfica, para un año con afluencias caracterizadas por corresponder a una determinada frecuencia.
- Soporte para toma de decisión en tiempo real, para operación de un sistema de obras hidráulicas;
- Solución de problemas de transporte.

Ejemplo



Éste es un caso curioso, con solo 6 variables (un caso real de problema de transporte puede tener fácilmente más de 1.000 variables) en el cual se aprecia la utilidad de este procedimiento de cálculo.

Existen tres minas de carbón cuya producción diaria es:

- La mina "a" produce 40 toneladas de carbón por día;
- La mina "b" otras 40 t/día; y,
- La Mina "c" produce 20 t/día.

En la zona hay dos centrales termoeléctricas que consumen:

- La central "d" consume 40 t/día de carbón; y,
- La central "e" consume 60 t/día

Los costos de mercado, de transporte por tonelada son:

- De "a" a "d" = 2 monedas

- De "a" a "e" = 11 monedas
- De "b" a "d" = 12 monedas
- De "b" a "e" = 24 monedas
- De "c" a "d" = 13 monedas
- De "c" a "e" = 18 monedas

Si se preguntase a los pobladores de la zona cómo organizar el transporte, tal vez la mayoría opinaría que debe aprovecharse el precio ofrecido por el transportista que va de "a" a "d", porque es más conveniente que los otros, debido a que es el de más bajo precio.

En este caso, el costo total del transporte es:

- Transporte de 40 t de "a" a "d" = 80 monedas
- Transporte de 20 t de "c" a "e" = 360 monedas
- Transporte de 40 t de "b" a "e" = 960 monedas
- Total 1.400 monedas.

Sin embargo, formulando el problema para ser resuelto por la programación lineal se tienen las siguientes ecuaciones:

- Restricciones de la producción:

$X_{a\to d} + X_{a\to e} \leq 40$	$[\mathrm{T/dia}]$
$X_{b\to d} + X_{b\to e} \leq 40$	$[\mathrm{T/dia}]$
$X_{c\to d} + X_{c\to e} \leq 20$	$[\mathrm{T/dia}]$

- Restricciones del consumo:

$X_{a\to d} + X_{b\to d} + X_{c\to d} \geq 40$	$[\mathrm{T/dia}]$
$X_{a\to e} + X_{b\to e} + X_{c\to e} \geq 60$	$[\mathrm{T/dia}]$

- La función objetivo será:

$$2X_{a\to d} + 11X_{a\to e} + 12X_{b\to d} + 24X_{b\to e} + 13X_{c\to d} + 18X_{c\to e} = Min!$$

La solución de costo mínimo de transporte diario resulta ser:

- $X_{b\text{-}d}$ = 40 resultando un costo de 12 x 40 = 480 monedas
- $X_{a\text{-}e}$ = 40 resultando un costo de 11 x 40 = 440 monedas
- $X_{c\text{-}e}$ = 20 resultando un costo de 18 x 20 = 360 monedas
- Total **1.280 monedas**.

120 monedas menos que antes.

El *método* Simplex básico

El método Simplex, introducido en su forma original por Spendley; Hext y Himsworth, en 1962, no se basa en planeamientos factoriales y por eso requiere pocos experimentos para moverse, desplazándose en la dirección del óptimo. La aplicación del método Simplex en Química Analítica fue efectuada por la primera vez en 1969. El método Simplex original, a lo largo de estos años, ha sufrido modificaciones que obligaron a la distinción del mismo dentro de las estrategias de optimización, así el método Simplex original pasó a ser llamado de Método Simplex Básico (MSB).

El procedimiento de optimización, en el método Simplex, comienza por la elección de la n+1 puntos donde será hecha la evaluación de la respuesta. Este resultado será evaluado contra las demás respuestas para que el proceso pueda continuar, siendo que este tipo de desarrollo convierte al simplex en un método del tipo secuencial.

El procedimiento es repetido sucesivamente, descartándose la peor respuesta. Por lo tanto, como vemos, el objetivo del método Simplex secuencial es forzar al simplex a moverse para la región de respuesta óptima.

Las decisiones requeridas para que eso sea posible constituyen las llamadas "reglas" del procedimiento simplex.REGLAS PARA EL MOVIMIENTODEL SIMPLEX BÁSICO

Regla nº 1: Después de determinar las respuestas de los n+1 experimentos necesarios para iniciar el proceso, con base en el conocimiento ya adquirido sobre el sistema, se debe clasificarlas en mejor [B (theBest)], peor [W (theWorst)] y resultados intermediarios [N (Nexttoworst)], según el objetivo de la optimización.

Regla nº 2: El simplex es movido para un simplex adyacente, el cuál es determinado descartando la respuesta menos deseada. El vértice correspondiente a esta respuesta es sustituido por un nuevo vértice, generado por su reflexión a través del centroide de la hiperfase de los vértices restantes.

Matematicamente, sí los vértices de un simplex k-dimensional son representados por coordenadas vectoriales P1, P2, ..., Pj, ...Pk, ... Pk+1, la eliminación de la respuesta no deseada Pj resulta en la hiperfase formada por P1, P2, ..., Pj-1, Pj+1, ...Pk, ... Pk+1 con el centroide definido por:

$Pc = 1/k\ (P1 + P2 + ... + Pj\text{-}1 + Pj\text{+}1 + ... + Pk + Pk\text{+}1)$

Pc = centroide de la hiperfase K = número de dimensiones del simplexPj = vértice correspondiente a la peor respuesta.

El nuevo simplex es definido por esta fase y un nuevo vértice, P, que corresponde a la reflexión del vértice rechazado Pj, a través de la fase por el centroide Pc.

$P = Pc + (Pc - Pj)$

Regla nº 3: Sí el punto reflejado, P, tuviera la peor respuesta en el nuevo simplex, probablemente el desplazamiento no está sucediendo en dirección al óptimo. En este caso, se debe rechazar la 2ª peor respuesta de este simplex y continuar con la optimización.

Esta regla es necesaria, pues el simplex puede estar encima de una cresta y la aplicación directa de la Regla no 2 puede hacer con que el punto P sea reflejado de vuelta al punto anterior. En este caso el simplex oscila y se vuelve sin recurso (decimos, que se mantiene parado).

Esta situación sucede con frecuencia en la región del óptimo. Sí un punto es obtenido cercano a él, todos los otros nuevos puntos tienden a pasar más allá del tope de la curva de respuesta. Entonces, un cambio en la dirección es indicado. En la región del óptimo, normalmente ocurre el simplex circular en vuelta de un óptimo temporáneo. Como se puede tratar de un resultado falso, el cual hace, con que el simplex se prenda a él, es necesario la siguiente excepción adicional a la Regla no 1.

Regla nº 4: Sí un vértice fuera mantenido en k+1 simplex, antes de aplicar la Regla no 2, haga una nueva observación del vértice persistente. Sí el vértice está realmente cercano al óptimo, es probable que la evaluación repetida de la respuesta sea consistente y de esta forma el punto será mantenido. Sí la respuesta en el vértice fuera alta por causa de un error de observación, es improbable que con la nueva evaluación eso ocurra y por lo tanto, el vértice será consecuentemente eliminado.

Regla nº **5**: Sí el nuevo vértice encontrarse fuera de los límites aceptables de las variables optimizadas, no se deben realizar observaciones experimentales con estos valores, al contrario se debe atribuir a este la respuesta más indeseable.

La aplicación posterior de las Reglas nos 2 e 3 obligará al simplex a regresar dentro de los límites permitidos y este continuará buscando por la respuesta óptima. Cuando un óptimo es localizado, las reglas del simplex lo fuerzan a circular.

Localización y tamaño del simplex inicial

En la etapa inicial de los experimentos, es recomendable construir un simplex grande para que por sí mismo se mueva rápidamente sobre la superficie de respuestas y pueda localizar la región del óptimo. Para definir más precisamente el óptimo, se construye un simplex menor y se continúa la optimización. En el caso que sea necesario, es posible repetir el proceso, dejando el simplex cada vez más pequeño. Está claro que existe una limitación para el tamaño del simplex, pues, sí este fuera muy pequeño, los errores experimentales pueden enmascarar los verdaderos efectos sobre la respuesta y hacer con que el simplex se traslade irregularmente dentro de un área cercana al óptimo.

Para definición del primer simplex se debe establecer las variables que estarán sujetas a la optimización. Después, se define el tamaño del paso () de cada variable del simplex.

Consideraciones Generales

El método Simplex no requiere el uso de test estadísticos de significancia por dos razones:

a) sí las diferencias en las respuestas son grandes al ser comparadas con el error experimental, el simplex se mueve en la dirección correcta.

b) sí las diferencias son bastante pequeñas para ser afectadas por el error experimental, el simplex se mueve en la dirección equivocada. Incluso, un movimiento en la dirección equivocada provocaría una respuesta indeseable, que rápidamente produciría una corrección en la dirección tomada, a través de las Reglas nos 2 e 3, y el simplex aunque momentáneamente fuera de curso, volvería nuevamente en dirección al óptimo.

Se debe llevar en cuenta que el método Simplex no puede ser utilizado en la determinación de variables cualitativas, del tipo presencia o no de un determinado factor. La aplicación de este método también no es aconsejable caso las condiciones experimentales sean de difícil control u obtención, además que sólo es posible optimizar un factor por vez.

En particular, en el uso del método simplex básico, tres limitaciones son evidentes:

Primero: El óptimo solamente es localizado con precisión por casualidad.

Segundo: Un óptimo falso puede ser localizado.

Tercero: El progreso del simplex en dirección al óptimo solamente puede ser efectuado en una proporción constante.

Estos inconvenientes motivaron la modificación del método simplex básico, convirtiéndolo más eficiente en la búsqueda del óptimo, originando el método simplex modificado (MSM).

MODELO SIMPLEX PASO A PASO Considerando el modelo lineal como se conoció en el paso anterior (forma original), el método simplex requiere que éste se convierta a la forma estándar, es decir, cada restricción se convertirá en una igualdad ademásde incorporar variables holgura que permiten expresar la cantidad de recurso no utilizado durante las actividades Se plantea el siguiente modelo en su forma original:

$MaxZ = 100X1 + 125X2$

$6X1 + 4X2 \leq 24$

$X1 + X2 \geq 800$

$X1, X2 \geq 0$

Paso 1. Cambiar el modelo a forma estándar Las desigualdades del tipo ≤ implican la cantidad no usada u holgura del recurso. Para convertirla en una igualdad y hacer uso de ella en el método simplex, se adiciona una variable holgura al lado izquierdo de la ecuación (Sn), de tal forma que:

$6X1 + 4X2 \leq 24$

Se convertirá en

$6X1 + 4X2 + S1 = 24$

Por su parte una restricción del tipo ≥ representará un límite inferior para las actividades a las que se encuentra sujeta la función objetivo; por lo tanto, la cantidad por la que el lado izquierdo de la ecuación es mayor al lado derecho o límite se considera un excedente y para convertirla en una igualdad será necesario restar la variable de excedencia

$X1 + X2 \geq 800$

Se convertirá en

$X1 + X2 - S2 = 800$

Deberán ponerse tantas variables holgura como restricciones existan.

Por su parte, la función objetivo deberá cambiar de signo (de positivo a negativo y viceversa), de tal modo que.

$MaxZ = 100X1 + 125X2$

Será:

$MaxZ = -100X1 - 125X2$

De tal forma que el modelo estándar completo se escribirá así:

$MaxZ = -100X1 - 125X2$

$6X1 + 4X2 + S1 = 24$

$X1 + X2 - S2 = 800$

$X1, X2, S1\ S2 \geq 0$

Note que las variables holgura también se consideraran positivas, mayor a cero.

Paso 2. Armar la tabla simplex

Los valores del modelo serán introducidos a la tabla simplex

Var. Holgura	$X1$	$X2$	$S1$	$S2$	Solución
$S1$	6	4	1	0	24
$S2$	1	1	0	-1	800
Z	-100	-125	0	0	0

Observe que en la primer columna se han colocado las variables holgura (Sn) y en las filas, de acuerdo a dicha variable, se coloca la restricción que corresponde y en la última fila (ó llamado también renglón objetivo) los valores de la función objetivo. Cuando las variables holgura no aparecen el valor que tomará será cero.

Paso 3. Elegir el valor de Z más negativo En la fila donde aparecen los datos de Z (la función objetivo) habrá que localizar el valor más negativo excluyendo la última columna. La columna en dónde se encuentre dicho valor se denominará columna de entrada o columna de trabajo.

Paso 4. Determine la variable de salida y el pivote Dividiendo cada número de la columna solución entre los valores de la columna entrada (a excepción del renglón objetivo). Entonces:

$\mathbf{24/\ 4 = 6}$

800 /1 = 800

Del resultado, se elige el valor positivo más pequeño sin tomar en cuenta los valores negativos y a la intersección se le denominará pivote.

Es muy importante que el pivote tome el valor 1; si no se tiene ese valor habrá que dividir el renglón objetivo entre el valor del pivote.

Paso 5. Hacer ceros los demás valores de la columna entrada Para el ejemplo los demás valores que deben hacerse cero son 1 y – 125 https://www.calameo.com/books/004603974df8c3983364d

https://www.programacionlineal.net/simplex.html

www.academia.edu/22751522/EL_METODO_SIMPLEX_EN_FORMA_TABULAR

cicia.uprrp.edu/publicaciones/docentes/metodosimplexdePL.pdf

MODELOS DE INVENTARIO

Los modelos de inventarios son métodos que ayudan a reducir o minimizar los niveles de inventario requeridos en la producción. Existen varios métodos que nos ayudan a conseguir dicho objetivo, a continuación se mencionan algunos de ellos

LA CLASIFICACIÓN ABC

Es un método para agrupar artículos en 3 clases respecto al valor total monetario, con el fin de identificar aquellos artículos que tienen el mayor impacto sobre los costos de inventarios. Resuelve, ¿Cuál artículo de un gran número de artículos diferentes necesita comprobarse más estrechamente?. En la realidad, es común pedir cientos y miles de artículos diferentes, como por ejemplo: Medicinas para una farmacia, útiles para una universidad, etc. En tales casos, el seguimiento de miles de artículos puede requerir con frecuencia recursos excesivos de tiempo y trabajo. La clasificación ABC es adecuado en tales situaciones ya que permite identificar cuáles de los diversos artículos son los más importantes; según los costos involucrados. Categorías: 1) Artículos Clase A.- Representan la mayor proporción del valor total global monetario. Necesita un inventario minucioso y cuidadoso. 2) Artículos Clase B.- Son la mayoría de los artículos; cuyo valor total monetario resulta pequeño comparado con los de la clase A. El inventario de estos artículos, no necesita mayor cuidado; su variación no tiene mayor efecto en los costos totales. 3) Artículos Clase C.- No son tan importantes como los de la clase A, pero son más significativos que los de la clase B

Modelo ¨JUST IN TIME¨ (JIT)

El objetivo, en este caso es reducir o eliminar en gran medida el inventario requerido en un proceso de producción. Es un sistema en el que se dispone de los inventarios sólo en los momentos en que se necesitan. Condiciones: 1) El proceso de producción es repetitivo. Se produce un mismo producto una y otra vez. No hay fluctuaciones significativas en la demanda(es estable) 2) Se puede controlar la escasez de insumos para la producción, con continuidad en el trabajo. Ello es debido al diseño de la producción; permite tener siempre disponible el requerimiento necesario. 3) El proveedor cumple a tiempo en la entrega 4) Se aplica una administración con calidad total, tal que las partes que llegan de los proveedores y que salen de una estación de trabajo a otra funcionan según lo especificado. La demanda del producto final terminado jala las demandas de las demás partes. En contraste, cuando las partes individuales se conforman como inventarios de trabajo en proceso, esos inventarios activan la producción y el paso posterior y se dice que empujan el proceso de producción.

https://www.emagister.com/uploads.../Comunidad_Emagister_6561_inventario.pdf

El método de transporte es un problema clásico dentro de la programación matemática; se analiza la manera de obtener el costo mínimo de transportar una serie de productos desde n fábricas, hasta m almacenes; cada envío tiene un costo particular que estará en función de la distancia, el tipo de carretera, la cantidad y otras variables.

https://youtu.be/u_5jQYoalsc

https://youtu.be/QWKVbVqkVko

https://youtu.be/DGHUW76xKy8

Utilización del Software para Programación Lineal

Software para la enseñanza de la programación lineal - Recursos

recursostic.educacion.es/.../1056-monografico-una-calculadora-grafica-para-la-ensena

https://youtu.be/XTX_5Kwg2DY

https://youtu.be/4_qbOfeVuZw

UNIDAD III

- Teoría de Colas
- Modelo de Teoría de Colas
- Proyecto de Teoría de Colas

INTRODUCCIÓN

Las "colas" son un aspecto de la vida moderna que nos encontramos continuamente en nuestras actividades diarias. En el contador de un supermercado, accediendo al Metro, en los Bancos, etc., el fenómeno de las colas surge cuando unos recursos compartidos necesitan ser accedidos para dar servicio a un elevado número de trabajos o clientes.

El estudio de las colas es importante porque proporciona tanto una base teórica del tipo de servicio que podemos esperar de un determinado recurso, como la forma en la cual dicho recurso puede ser diseñado para proporcionar un determinado grado de servicio a sus clientes.

Debido a lo comentado anteriormente, se plantea como algo muy útil el desarrollo de una herramienta que sea capaz de dar una respuesta sobre las características que tiene un determinado modelo de colas.

Definiciones iníciales

La teoría de colas es el estudio matemático del comportamiento de líneas de espera. Esta se presenta, cuando los "clientes" llegan a un "lugar" demandando un servicio a un "servidor", el cual tiene una cierta capacidad de atención. Si el servidor no está disponible inmediatamente y el clientedecide esperar, entonces se forma la línea de espera.

Una **cola** es una línea de espera y la teoría de colas es una colección de modelos matemáticos que describen sistemas de línea de espera particulares o sistemas de colas. Los modelos sirven para encontrar un buen compromiso entre costes del sistema y los tiempos promedio de la línea de espera para un sistema dado.

Los **sistemas de colas** son modelos de sistemas que proporcionan servicio. Como modelo, pueden representar cualquier sistema en donde los trabajos o clientes llegan buscando un servicio de algún tipo y salen después de que dicho servicio haya sido atendido. Podemos modelar los sistemas de este tipo tanto como colas sencillas o como un sistema de colas interconectadas formando una red de colas. En la siguiente figura podemos ver un ejemplo de modelo de colas sencillo. Este modelo puede usarse para representar una situación típica en la cual los clientes llegan, esperan si los servidores están ocupados, son servidos por un servidor disponible y se marchan cuando se obtiene el servicio requerido.

El problema es determinar qué capacidad o tasa de servicio proporciona el balance correcto. Esto no es sencillo, ya que un cliente no llega a un horario fijo, es decir, no se sabe con exactitud en que momento llegarán los clientes. También el tiempo de servicio no tiene un horario fijo.

Los problemas de "colas" se presentan permanentemente en la vida diaria: un estudio en EEUU concluyó que, por término medio, un ciudadano medio pasa cinco años de su vida esperando en distintas colas, y de ellos casi seis meses parado en los semáforos.

Introducción a la Teoría de Colas

En muchas ocasiones en la vida real, un fenómeno muy común es la formación de colas o líneas de espera. Esto suele ocurrir cuando la demanda real de un servicio es superior a la capacidad que existe para dar dicho servicio. Ejemplos reales de esa situación son: los cruces de dos vías de circulación, los semáforos, el peaje de una autopista, los cajeros automáticos, la atención a clientes en un establecimiento comercial, la avería de electrodomésticos u otro tipo de aparatos que deben ser reparados por un servicio técnico, etc.

Todavía más frecuentes, si cabe, son las situaciones de espera en el contexto de la informática, las telecomunicaciones y, en general, las nuevas tecnologías. Así, por ejemplo, los procesos enviados a un servidor para ejecución forman colas de espera mientras no son atendidos, la informaciónsolicitada, a través de Internet, a un servidor Web puede recibirse con demora debido a congestión en la red o en el servidor propiamente dicho, podemos recibir la señal de líneas ocupadas si la central de la que depende nuestro teléfono móvil está colapsada en ese momento, etc.

Origen:

El origen de la Teoría de Colas está en el esfuerzo de AgnerKraupErlang (Dinamarca, 1878 - 1929) en 1909 para analizar la congestión de tráfico telefónico con el objetivo de cumplir la demanda incierta de servicios en el sistema telefónico de Copenhague. Sus investigaciones acabaron en una nueva teoría denominada teoría de colas o de líneas de espera. Esta teoría es ahora una herramienta de valor en negocios debido a que un gran número de problemas pueden caracterizarse, como problemas de congestión llegada-salida.

Modelo de formación de colas.

En los problemas de formación de cola, a menudo se habla de clientes, tales como personas que esperan la desocupación de líneas telefónicas, la espera de máquinas para ser reparadas y los aviones que esperan aterrizar y estaciones de servicios, tales como mesas en un restaurante, operarios en un taller de reparación, pistas en un aeropuerto, etc. Los problemas de formación de colas a menudo contienen una velocidad variable de llegada de clientes que requieren cierto tipo de servicio, y una velocidad variable de prestación del servicio en la estación de servicio.

Cuando se habla de líneas de espera, se refieren a las creadas por clientes o por las estaciones de servicio. Los clientes pueden esperar en cola simplemente por que los medios existentes son inadecuados para satisfacer la demanda de servicio; en este caso, la cola tiende a ser explosiva, es decir, a ser cada vez más larga a medida que transcurre el tiempo. Las estaciones de servicio pueden estar esperando por que los medios existentes son excesivos en relación con la demanda de los clientes; en este caso, las estaciones de servicio podrían permanecer ociosas la mayor parte del tiempo. Los clientes puede que esperen temporalmente, aunque las instalaciones de servicio sean adecuadas, por que los clientes llegados anteriormente están siendo atendidos. Las estaciones de servicio pueden encontrar temporal cuando, aunque las instalaciones sean adecuadas a largo plazo, haya una escasez ocasional de demanda debido a un hecho temporal. Estos dos últimos casos tipifican una situación equilibrada que tiende constantemente hacia el equilibrio, o una situación estable.

En la teoría de la formación de colas, generalmente se llama sistema a un grupo de unidades físicas, integradas de tal modo que pueden operar al unísono con una serie de operaciones organizadas. La teoría de la formación de colas busca una solución al problema de la espera prediciendo primero el comportamiento del sistema. Pero una solución al problema de la espera consiste en no solo en minimizar el tiempo que los clientes pasan en el sistema, sino también en minimizar los costos totales de aquellos que solicitan el servicio y de quienes lo prestan.

La teoría de colas incluye el estudio matemático de las colas o líneas de espera y provee un gran número de modelos matemáticos para describirlas.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

Se debe lograr un balance económico entre el costo del servicio y el costo asociado a la espera por ese servicio

La teoría de colas en sí no resuelve este problema, sólo proporciona información para la toma de decisiones

Objetivos de la Teoría de Colas

Los objetivos de la teoría de colas consisten en:

- Identificar el nivel óptimo de capacidad del sistema que minimiza el coste global del mismo.
- Evaluar el impacto que las posibles alternativas de modificación de la capacidad del sistema tendrían en el coste total del mismo.
- Establecer un balance equilibrado ("óptimo") entre las consideraciones cuantitativas de costes y las cualitativas de servicio.

- Hay que prestar atención al tiempo de permanencia en el sistema o en la cola: la "paciencia" de los clientes depende del tipo de servicio específico considerado y eso puede hacer que un cliente "abandone" el sistema.

Elementos existentes en un modelo de colas

Fuente de entrada o población potencial: Es un conjunto de individuos (no necesariamente seres vivos) que pueden llegar a solicitar el servicio en cuestión. Podemos considerarla finita o infinita. Aunque el caso de infinitud no es realista, sí permite (por extraño que parezca) resolver de forma más sencilla muchas situaciones en las que, en realidad, la población es finita pero muy grande. Dicha suposición de infinitud no resulta restrictiva cuando, aún siendo finita la población potencial, su número de elementos es tan grande que el número de individuos que ya están solicitando el citado servicio prácticamente no afecta a la frecuencia con la que la población potencial genera nuevas peticiones de servicio.

Cliente: Es todo individuo de la población potencial que solicita servicio. Suponiendo que los tiempos de llegada de clientes consecutivos son $0<t1<t2<...$, será importante conocer el patrón de probabilidad según el cual la fuente de entrada genera clientes. Lo más habitual es tomar como referencia los tiempos entre las llegadas de dos clientes consecutivos: consecutivos: clientes consecutivos: $T\{k\} = tk - tk\text{-}1$, fijando su distribución de probabilidad. Normalmente, cuando la población potencial es infinita se supone que la distribución de probabilidad de los Tk (que será la llamada distribución de los tiempos entre llegadas) no depende del número de clientes que estén en espera de completar su servicio, mientras que en el caso de que la fuente de entrada sea finita, la distribución de los Tk variará según el número de clientes en proceso de ser atendidos.

Capacidad de la cola: Es el máximo número de clientes que pueden estar haciendo cola (antes de comenzar a ser servidos). De nuevo, puede suponerse finita o infinita. Lo más sencillo, a efectos de simplicidad en los cálculos, es suponerla infinita. Aunque es obvio que en la mayor parte de los casos reales la capacidad de la cola es finita, no es una gran restricción el suponerla infinita si es extremadamente improbable que no puedan entrar clientes a la cola por haberse llegado a ese número límite en la misma.

Disciplina de la cola: Es el modo en el que los clientes son seleccionados para ser servidos. Las disciplinas más habituales son:

La disciplina FIFO (first in firstout), también llamada FCFS (first come firstserved): según la cual se atiende primero al cliente que antes haya llegado.

La disciplina LIFO (last in firstout), también conocida como LCFS (last come firstserved) o pila: que consiste en atender primero al cliente que ha llegado el último.

La RSS (randomselection of service), o SIRO (service in randomorder), que selecciona a los clientes de forma aleatoria.

Mecanismo de servicio: Es el procedimiento por el cual se da servicio a los clientes que lo solicitan. Para determinar totalmente el mecanismo de servicio debemos conocer el número de servidores de dicho mecanismo (si dicho número fuese aleatorio, la distribución de probabilidad del mismo) y la distribución de probabilidad del tiempo que le lleva a cada servidor dar un servicio. En caso de que los servidores tengan distinta destreza para dar el servicio, se debe especificar la distribución del tiempo de servicio para cada uno.

Para ver el gráfico seleccione la opción "Descargar" del menú superior

La cola, propiamente dicha, es el conjunto de clientes que hacen espera, es decir los clientes que ya han solicitado el servicio pero que aún no han pasado al mecanismo de servicio.

El sistema de la cola: es el conjunto formado por la cola y el mecanismo de servicio, junto con la disciplina de la cola, que es lo que nos indica el criterio de qué cliente de la cola elegir para pasar al mecanismo de servicio. Un modelo de sistema de colas debe especificar la distribución de probabilidad de los tiempos de servicio para cada servidor.La distribución más usada para los tiempos de servicio es la *exponencia*l, aunque es común encontrar la distribución *degenerada o determinística* (tiempos de servicio constantes) o la distribución *Erlang* (Gamma).

Fuente: Monografia.com

MONKS, Joseph G. **ADMINISTARCION DE OPERACIONES.** McGraw-Hill Internacional México.

Ejercicio resuelto de Programación lineal

Una compañía fábrica y venden dos modelos de lámpara L_1 y L_2. Para su fabricación se necesita un trabajo manual de 20 minutos para el modelo L_1 y de 30 minutos para el L_2; y un trabajo de máquina de 20 minutos para el modelo L_1 y de 10 minutos para L_2. Se dispone para el trabajo manual de 100 horas al mes y para la máquina 80 horas al mes. Sabiendo que el beneficio por unidad es de 15 y 10 euros para L_1 y L_2, respectivamente, planificar la producción para obtener el máximo beneficio**.**

1 Elección de las incógnitas.

x = nº de lámparas L_1

y = nº de lámparas L_2

2 Función objetivo

f(x, y) = 15x + 10y

3 Restricciones

Pasamos los tiempos a horas

20 min = 1/3 h

30 min = 1/2 h

10 min = 1/6 h

Para escribir las restricciones vamos a ayudarnos de una tabla:

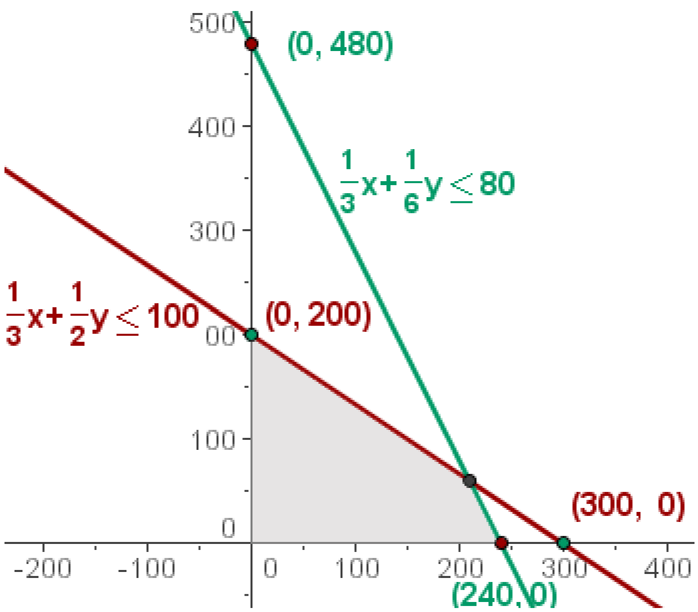
	L1	**L2**	**Tiempo**
Manual	**1/3**	**1/2**	**100**
Máquina	**1/3**	**1/6**	**80**

$1/3x + 1/2y \leq 100$

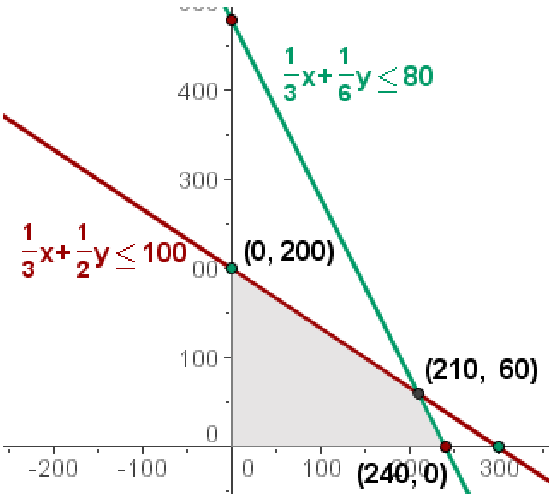
$1/3x + 1/6y \leq 80$

Como el número de lámparas son números naturales, tendremos dos restricciones más:
$x \geq 0$
$y \geq 0$

4 Hallar el conjunto de soluciones factibles
Tenemos que representar gráficamente las restricciones.
Al ser $x \geq 0$ e $y \geq 0$, trabajaremos en el primer cuadrante.
Representamos las rectas, a partir de sus puntos de corte con los ejes.
Resolvemos gráficamente la inecuación: $1/3\ x + 1/2\ y \leq 100$; para ello tomamos un punto del plano, por ejemplo el (0,0).
$1/3 \cdot 0 + 1/2 \cdot 0 \leq 100$
$1/3 \cdot 0 + 1/6 \cdot 0 \leq 80$
La zona de intersección de las soluciones de las inecuaciones sería la solución al sistema de inecuaciones, que constituye el conjunto de las soluciones factibles.



5 Calcular las coordenadas de los vértices del recinto de las soluciones factibles.
La solución óptima si es única se encuentra en un vértice del recinto. estos son las soluciones a los sistemas:
1/3x + 1/2y = 100; x = 0 (0, 200)
1/3x + 1/6y = 80; y = 0(240, 0)
1/3x + 1/2y = 100; 1/3x + 1/6y = 80(210, 60)



6 Calcular el valor de la función objetivo
En la función objetivo sustituimos cada uno de los vértices.
f(x, y) = 15x + 10y
f(0, 200) = 15·0 + 10·200 = 2 000 €
f(240, 0) = 15·240 + 10·0 = 3 600 €
f(210, 60) = 15·210 + 10·60 = 3 750 € Máximo

La solución óptima es fabricar 210 del modelo L_1 y 60 del modelo $\mathbf{L_1}$ para obtener un beneficio de 3 750 €**.**

Ejercicios propuestos de programación lineal

1.-Con el comienzo del curso se va a lanzar unas ofertas de material escolar. Unos almacenes quieren ofrecer 600 cuadernos, 500 carpetas y 400 bolígrafos para la oferta, empaquetándolo de dos formas distintas; en el primer bloque pondrá 2 cuadernos, 1 carpeta y 2 bolígrafos; en el segundo, pondrán 3 cuadernos, 1 carpeta y 1 bolígrafo. Los precios de cada paquete serán 6.5 y 7 €, respectivamente. ¿Cuántos paquetes le conviene poner de cada tipo para obtener el máximo beneficio?

2.-En una granja de pollos se da una dieta, para engordar, con una composición mínima de 15 unidades de una sustancia A y otras 15 de una sustancia B. En el mercado sólo se encuentra dos clases de compuestos: el tipo X con una composición de una unidad de A y 5 de B, y el otro tipo, Y, con una composición de cinco unidades de A y una de B. El precio del tipo X es de 10 euros y del tipo Y es de 30 €. ¿Qué cantidades se han de comprar de cada tipo para cubrir las necesidades con un coste mínimo?

3.-Se dispone de 600 g de un determinado fármaco para elaborar pastillas grandes y pequeñas. Las grandes pesan 40 g y las pequeñas 30 g. Se necesitan al menos tres pastillas grandes, y al menos el doble de pequeñas que de las grandes. Cada pastilla grande proporciona un beneficio de 2 € y la pequeña de 1 €. ¿Cuántas pastillas se han de elaborar de cada clase para que el beneficio sea máximo?

Ejercicios Método Simplex Maximización

(link de método simplex maximización, Jean Carlos MalagonCaez)

Un artesano fabrica trenes y camiones de juguetes utilizando tornillos, bloques y ruedas como componentes, en la semana próxima dispone de 8000 6000 y 6300 componentes respectivamente, los beneficios por tren y camión son 1.6 euros/unidad y 1.4 euros/unidad

PRODUCTOS	TORNILLOS	BLOQUES	RUEDAS	BENEFICIOS
TREN	10	15	18	1.6
CAMION	20	10	6	1.4
DISPONIBILIDAD	8000	6000	6300	

Primer paso: se pasa a forma estándar y se introducen las variables de holgura

Función objetivo

Max z =1.6 x1 +1.4x2

Restricciones

10x1+20x2 ≤8000

15x1 + 10x2 ≤ 6000

18x1 + 6x2 ≤ 6300

X1,x2 ≥ 0

Igualdades

z-1.6 x1 -1.4x2-0s1-0s2-0s3 = 0

10x1+20x2 + s1 = 8000

15x1 + 10x2 + s2 = 6000

18x1 + 6x2 + s3= 6300

X1,x2,s1,s2,s3 ≥0

Segundo paso: escribir el tablero inicial simplex

BASE	Z	X1	X2	S1	S2	S3	SOLUCIÓN	
Z	1	-1.6	-1.4	0	0	0	0	
S1	0	10	20	1	0	0	8000	800
S2	0	15	10	0	1	0	6000	400
S3	0	18	6	0	0	1	6300	350

Para escoger la variable de decisión que entra en la base, (observamos la primera fila la cual muestra los coeficientes de la función objetivo y escogemos la variable con el coeficiente más negativo en valor absoluto

Para encontrar la variable de holgura que tiene que salir de la base, se divide cada término de la última columna (valores solución) por el termino correspondiente de la columna pivote, siempre que estos últimos sean mayores que cero.

La fórmula para la fila nueva es: fila pivote/ intervalo de la columna pivote

La fórmula para resolver la tabla es: fy-(cp*fn)

BASE	Z	X1	X2	S1	S2	S3	SOLUCIÓN
Z	1	0	-0.867	0	0	0.089	560
S1	0	0	16.7	1	0	-0.56	4500
S2	0	0	5	0	1	-0.84	750
X3	0	1	0.33	0	0	0.056	350

Como en los elementos de la primera fila hay un numero negativo significa que no hemos llegado todavía a la solución optima por lo tanto repetimos nuevamente el ejercicio con la nueva tabla

BASE	Z	X1	X2	S1	S2	S3	SOLUCIÓN
Z	1	0	0	0	0.1734	-0.05	690.05
S1	0	0	0	1	-3.34	2.246	1995
X2	0	0	1	0	0.2	-0.168	150
X3	0	1	0	0	-0.66	0.111	300

Seguimos resolviendo el ejercicio

BASE	Z	X1	X2	S1	S2	S3	SOLUCIÓN
Z	0	0	0	0.025	0.09	0	740
X1	0	0	0	0.45	-1.5	1	900
X2	0	0	1	0.075	-0.05	0	300
X3	0	1	0	-0.05	0.1	0	200

Interpretación de resultados

- La solución óptima es fabricar 200 trenes y 300 camiones
- Se utilizan todas las existencias de tornillos(800)
- Se utilizan todas las existencias de bloques (6000)
- Se utilizan 5400 ruedas sobrando 900 de las existencias
- El beneficio resultante es de 740 euro

Ejercicio Método Simple Minimización

El problema

Paso 1: Modelación mediante programación lineal
Paso 2: Convertir las inecuaciones en ecuaciones
Paso 3: Definir la tabla simplex inicial
Paso 4: Realizar las iteraciones necesarias

Dos empresas mineras extraen dos tipos diferentes de minerales los cuales son sometidos a un proceso de trituración con tres grados (alto, medio, bajo).

Las compañías han firmado un contrato para proveer mineral a una plata de fundición cada semana, 12 toneladas de mineral de grado alto, 8 de grado medio y 24 de grado bajo, cada una de las empresas tiene diferentes procesos de fabricación.
¿Cuantos días a la semana deberían de operar cada empresa para cumplir el contrato con la planta de fundición?

Minas	Costo / día	Producción (toneladas / día)		
		alto	medio	bajo
X1	180	6	3	4
X2	160	1	1	6

Función objetivo
Minz= 180x1+160x2

Restricciones
6x1+x2≥12
3x1+x2≥8
4x1+6x2≥24
X1; x2≥0

Minz= 180x1+160x2-0S1-0S2-0S3+MA1+MA2+MA3
6x1+x2-S1+A1=12
3x1+x2-S2+A2=8
4x1+6x2-S3+A3=24
Z-180x1-160x2+0S1+0S2+0S3-MA1-MA2-MA3=0

ITERACCION INICIAL

V/BLE	Z	X1	X2	S1	S2	S3	A1	A2	A3	SOLUCION
Z	1	-180	-160	0	0	0	-M	-M	-M	0
A1	0	6	1	-1	0	0	1	0	0	12
A2	0	3	1	0	-1	0	0	1	0	8
A3	0	4	6	0	0	-1	0	0	1	24

A1=0 6M M –M 0 0 M 0 012M
A2=0 3M M0–M 0 0 M 0 8M
A3=0 4M 6M 0 0–M0 0 M24M
0 13M 8M –M –M –M MMM44M
1-180-160 0 0 0-M-M-M
1-180+13M 160-8M-M-M-M 00044M FILA NUEVA
COLUMNA PIVOTE (AMARRILLO)

V/BLE	Z	X1	X2	S1	S2	S3	A1	A2	A3	SOLUCION
Z	1	**-180+13M**	**-160+8M**	-M	-M	-M	0	0	0	44M
A1	0	6	1	-1	0	0	1	0	0	12

A2	0	3	1	0	-1	0	0	1	0	8
A3	0	4	6	0	0	-1	0	0	1	24

FILA PIVOTE (AMARRILLO)

0/6, 6/6, 1/6, -1/6, 0/6, 0/6, 1/6, 0/6, 0/6 12/6
FILA NUEVA X1= 0 1 0.16 -0.16 0 0 0.16 0 0 2

COLUMNA PIVOTE (NARANJA)

V/BLE	Z	X1	X2	S1	S2	S3	A1	A2	A3	SOLUCION
Z	1	6	**-130+5.83M**	**-30+1.16M**	-M	-M	**-30-2.16M**	0	0	360-18M
X1	0	1	**6.16666667**	**-0.16666667**	0	0	**-0.16666667**	0	0	2
A2	0	0	0.5	0.5	-1	0	-0.5	1	0	2
A3	0	0	**5.33333333**	**0.66666668**	0	-1	**-0.66666668**	0	1	16

FILA PIVOTE (NARANJA)

FV- (CP*FN) FILA VIEJA- (COEFICIENTE PIVOTE*FILA NUEVA)

Z= 1 -180+13M -160+8M –M –M –M 0 0 0 44M **FILA VIEJA**
-180+13M **COEFICIENTE PIVOTE**
0 1 0.16 -0.16 0 0 0.16 0 0 2**FILA NUEVA**
1 0 -130+5.83M -30+1.16M –M –M 30-2.16M 0 0 360-18M

A2= 0 3 - 1 0 -1 0 0 1 0 8 **FILA VIEJA**
3**COEFICIENTE PIVOTE**
0 1 0.16 -0.16 0 0 0.16 0 0 2 **FILA NUEVA**
A2= 0 0 0.5 0.5 -1 0 -0.5 1 0 2

A3= 0 4 6 0 0 –1 0 0 1 24 **FILA VIEJA**
4**COEFICIENTE PIVOTE**
0 1 0.16 -0.16 0 0 0.16 0 0 2 **FILA NUEVA**
A3= 0 0 5.33 0.66 0 -1 -0.66 0 1 16

INICIO DE LA SEGUNDA ITERACCION

F.N:

X2 = 0 0 5.33 0.66 0 -1 0.66 0 1 16
5.33

X2 = 0 0 1 0.12 0 -0.13 -0.12 0 0.18 3

COLUMNA PIVOTE (VERDE)

V/BLE	Z	X1	X2	S1	S2	S3	A1	A2	A3	SOLUCION
Z	1	0	0	**- 14.4+0.43M**	-M	**-23.4**	**14.4+1.43M**	0	**23.4- 1.09M**	**750-35.49M**
X1	0	1	0	-0.18	0	0.03	0.18	0	0.03	1.49
A2	0	0	0	0.44	-1	0.09	0.44	1	-0.04	0.5
X2	0	0	1	0.12	0	-0.18	-0.12	0	0.18	3

FILA PIVOTE (VERDE)

Z= 1 0 -130+5.83M -30+1.16M –M –M 30-2.16M 0 0 360-18M **FILA VIEJA**
-130+5.83M **COEFICIENTE PIVOTE**
0 0 1 0.12 0 -0.18 -0.12 0 0.18 **FILA NUEVA**

3 1 0 0 -14.4+0.43M –M -23.4 14.4-1.43M 0 23.4-1.04M 750-3549M

X1= 0 1 0.16 -016 0 0 0.16 0 0 2 **FILA VIEJA**
0.16**COEFICIENTE PIVOTE**
0 0 1 0.12 0 -0.18 -0.12 0 0.18 3 **FILA NUEVA**
X1= 0 1 0 -0.18 0 0.03 0.18 0 0.03 1.49

A2= 0 0 0.5 0.5 -1 0 -0.5 1 0 2 **FILA VIEJA**
0.5**COEFICIENTE PIVOTE**
0 0 1 0.12 0 -0.18 -0.12 0 0.18 3 **FILA NUEVA**
A2= 0 0 0 0.44 -1 0.09 -0.44 1 -0.09 0.5

INICIO DE LA TERCERA ITERACCION

F.N:
S1 = 0 0 0 0.44 -1 0.09 -0.44 1 -0.09 0.5
0.44

S1 = 0 0 0 1 -2.27 0.2 -1 2.27 -0.2 1.13

V/BLE	Z	X1	X2	S1	S2	S3	A1	A2	A3	SOLUCION
Z	1	0	0	0	-32.68	**-26.28-0.08M**	-M	**32.68-0.97M**	**20.52- 0.96M**	**766.27-35.97M**
X1	0	1	0	0	-0.40	0.06	0	0.40	0	1.69
S1	0	0	0	1	-2.27	0.2	-1	2.27	-0.2	1.13
X2	0	0	1	0	0.27	-0.2	0	-0.27	0.2	2.86

Z= 1 0 0 -14.4+0.43M –M –23.4 14.4-1.43M 0 23.4-104M 750-35.49M**FILA VIEJA**

-14.4+0.43M**COEFICIENTE PIVOTE**

0 0 0 1 -2.27 0.2 -1 2.27 0.2 1.13 **FILA NUEVA**

Z= 1 0 0 0 -35.68 -26.28-0.08M -M 32.63-0.97M 20.52-0.96M 766.27-35.97M

X1= 0 1 0 -0.18 0 0.03 0.18 0 0.03 1.49 **FILA VIEJA**

-0.18**COEFICIENTE PIVOTE**

0 0 0 1 -2.27 0.2 -1 2.27 -0.2 1.13**FILA NUEVA**

X1= 0 1 0 0 -0.40 0.06 0 0.40 0 1.69

X2= 0 0 1 0.12 0 -0.18 -0.12 0 0.18 3 **FILA VIEJA**

0.12**COEFICIENTE PIVOTE**

0 0 0 1 -2.27 0.2 -1 2.27 -0.2 1.13 **FILA NUEVA**

X2= 0 0 1 0 0.27 -0.2 0 -0.27 0.2 2.86

La solución óptima consiste en:

- Que la empresa x1 opere 1.69 días a la semana
- Que la empresa x2 opere 2.86 días a la semana

Logrando a un 1.13 por encima de la producción mínima el costo total es de (766.27-35.97m)

Bibliografía

- Amaya, Jairo. (2010).Toma de Decisiones Gerenciales. Métodos cuantitativos para la administración. Segunda Edición. Editorial ECOE Ediciones.

- Bazaraa, Monkhtar.(2007). Programación Lineal y Flujo en Redes. Segunda Edición corregida. Editorial Limusa.

- Budnick, Frank s. Matemáticas Aplicadas Para Administración, Economía y Ciencias Sociales. Cuarta Edición. Editorial Mc. Graw-Hill. México.

- Camacho, Arturo (2008).Investigación de Operaciones aplicada a la Contaduría y Administración. ECAESA. México

Ejercicio de Teoría de Colas

.-En un servidor de la universidad se mandan programas de ordenador para ser ejecutados. Los programas llegan al servidor con una tasa de 10 por minuto. El tiempo medio de ejecución de cada programa ´ es de 5 segundos y tanto los tiempos entre llegadas como los tiempos de ejecución se distribuyen ex- ´ ponencialmente.

a) ¿Qué proporción ´ on de tiempo está ´ a el servidor desocupado? ´
b) ¿Cuál es el tiempo esperado total de salida de un programa? ´
c) ¿Cuál es el número medio de programas esperando en la cola del sistema?

Solución. ´ El sistema es M/M/1 con $\lambda = 10$ trabajos por minuto y $\mu = 12$ trabajos por minuto. Se asumirá que el sistema es abierto y que la capacidad es infinita. Como ´ $\rho = 10/12 < 1$, el sistema alcanzara el estado estacionario y se pueden usar las formulas obtenidas en clase.
a) El servidor estará desocupado ´ $1 - 5/6 = 1/6$ del total, esto es, 10 segundos cada minuto (ya que el ordenador está ocupado ´ $5 \times 10 = 50$ segundos por minuto).
b) Tiempo medio total es $W = 1\ \mu(1-\rho) = 1\ 12(1-5/6) = 1/2$ minuto por programa.
c) El número medio de programas esperando en la cola es ´ $Lq = \rho\ 2\ 1-\rho = 4.16$ trabajos.

.- La ventanilla de un banco realiza las transacciones en un tiempo medio de 2 minutos. los clientes llegan con una tasa media de 20 clientes a la hora. Si se supone que las llegadas siguen un proceso de Poisson y el tiempo de servicio es exponencial, determina

a) El porcentaje de tiempo en el que el cajero esta desocupado. ´
b) El tiempo medio de estancia de los clientes en la cola.
c) La fracción de clientes que deben esperar en la cola.

Solución. ´ Sistema M/M/1 con $\lambda = 20$ y $\mu = 30$.
a) P(cajero ocioso) = $p0 = 1 - \rho = 1/3$. El 33 % de tiempo el cajero esta ocioso. ´
b) $Wq = 1/15 = 4$ minutos.
c) $L = 2$, $Lq = 4/3$, por tanto la fracción de clientes que deben esperar en la cola es ´ $Lq/L = 2/3 \equiv 66.6$ %.

Ejercicios propuestos de Teoría de Colas

.-Una tienda de alimentación es atendida por una persona. Aparentemente el patrón de llegadas de ´ clientes durante los sábados se comporta siguiendo un proceso de Poisson con una tasa de llegadas de ´ 10 personas por hora. A los clientes se les atiende siguiendo un orden tipo FIFO y debido al prestigio de la tienda, una vez que llegan están dispuestos a esperar el servicio. Se estima que el tiempo que se tarda en atender a un cliente se distribuye exponencialmente, con un tiempo medio de 4 minutos. Determina: a) La probabilidad de que haya línea de espera.

b) La longitud media de la línea de espera.
c) El tiempo medio que un cliente permanece en cola.

.-En una fábrica existe una oficina de la Seguridad Social a la que los obreros tienen acceso durante ´ las horas de trabajo. El jefe de personal, que ha observado la afluencia de obreros a la ventanilla, ha solicitado que se haga un estudio relativo al funcionamiento de este servicio. Se designa a un especialista para que determine el tiempo medio de espera de los obreros en la cola y la duración´ media de la conversación que cada uno mantiene con el empleado de la ventanilla. Este analista ´ llega a la conclusión de que durante la primera y la ´ última media hora de la jornada la afluencia es ´ muy reducida y fluctuante, pero que durante el resto de la jornada el fenómeno se puede considerar ´ estacionario. Del análisis de 100 periodos de 5 minutos, sucesivos o no, pero situados en la fase estacionaria, se dedujo que el número medio de obreros que acudían a la ventanilla era de 1.25 por periodo y que el tiempo entre llegadas seguía una distribución exponencial. Un estudio similar sobre ´ la duración de las conversaciones, llevo a la conclusión de que se distribuían exponencialmente con duración media de ´ 3.33 minutos. Determina: a) Número medio de obreros en cola. ´
b) Tiempo medio de espera en la cola.
c) Compara el tiempo perdido por los obreros con el tiempo perdido por el oficinista.
Calcula el coste para la empresa, sin una hora de inactividad del oficinista vale 250 euros y una hora del obrero 400 euros. ¿Sería rentable poner otra ventanilla?

Bibliografía

Ingeniería Informática, UC3M ´ Curso 08/09

PROBLEMAS RESUELTOS DE TEORÍA DE COLAS. - Msc. Ing. Julio ...

https://jrvargas.files.wordpress.com/.../problemas-resueltos-de-teorc3ada-de-colas.pdf

PROBLEMAS RESUELTOS DE **TEORÍA DE COLAS**. (M/M/1: Un servidor con llegadas de Poisson y tiempos de servicio. Exponenciales). Prof.: Msc. Julio Rito.