



MATERIA:
MATEMÁTICA II

Valencia, Noviembre 2018

INTRODUCCIÒN

En el lenguaje ordinario la palabra límite tiene un carácter estático y significa término, extremo o frontera.

En matemática, el concepto de límite es un concepto dinámico y tiene que ver con la idea de acercarse lo más posible a un valor (finito o infinito).

Así mismo, la derivación constituye una de las operaciones de mayor importancia cuando se trata de funciones reales de variable real puesto que indica la tasa de variación de la función en un instante determinado, si ésta no es el tiempo.

Estos dos temas tan importantes son los que se tratarán en este contenido, el cual corresponden a la asignatura de Matemática II.

OBJETIVO GENERAL:

1. Resolver problemas relativos al límite de funciones de variables reales, del cálculo de derivadas y su aplicación en problemas cotidianos.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

2. Enunciar el concepto de límite de una función.
3. Identificar las propiedades de límites, desarrollando ejercicios.
4. Solucionará indeterminaciones de límites que puedan presentarse al buscar los límites de función.
5. Interpretará derivadas utilizando su definición.
6. Resolverá los diferentes casos derivadas utilizando adecuadamente las fórmulas de derivación.
7. Considerará la derivada para decidir cuándo una función es creciente o decreciente.
8. Aplicará las técnicas de derivación para estudiar la concavidad y puntos de inflexión así como obtener los puntos críticos, máximos y mínimos de una función.

UNIDAD I

Objetivo Específico:

1. Comprender el concepto de límite de una función y las propiedades de los límites.
2. Calcular el límite de una función algebraica utilizando las propiedades de los límites.

ESTUDIOS DE LÍMITES DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE:

1.- LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Cuando se tiene una función, ésta se puede representar de varias maneras como se presenta el siguiente ejemplo:

Dada la función:

$f(x) = y = x^2 + 1$ \longrightarrow Representación Algebraica

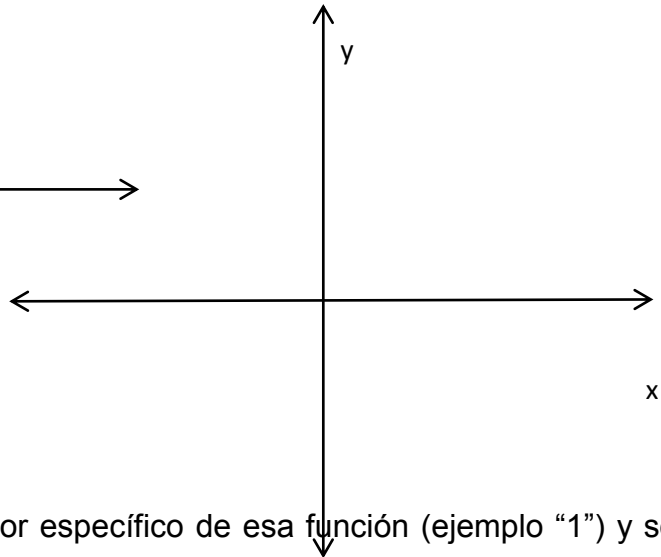
X	Y
-1	2
0	1
1	2
2	5

3 10

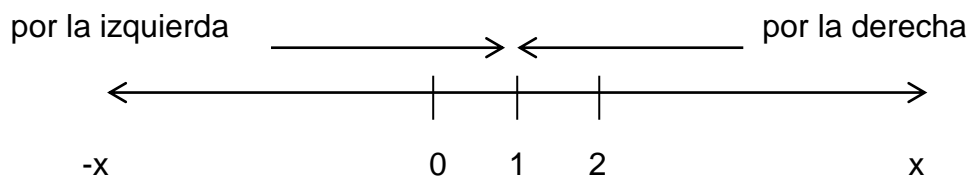


Representación Numérica

Representación Gráfica \longrightarrow



Ahora bien, si se toma un valor específico de esa función (ejemplo "1") y se representa en la recta real, se tiene que podemos dar a la función valores cercanos a 1 por la izquierda o valores cercano a uno por la derecha, sin llegar a uno



Cercanos a 1 por la izquierda

0

0,9

0,99

0,999

0,9999

Cercanos a 1 por la derecha

2

1,1

1,11

1,111

1,1111

De esto se puede inferir que conforme “ x ” toma valores más cercanos a uno, los valores de $f(x)$ se acercan cada vez a “2”

Es decir que el límite de $f(x)$ cuando “ x ” se aproxima al valor de “1” es 2.

En símbolos se escribe

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

Por lo que podemos definir el límite de una función como:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Eso quiere decir que $f(x)$ se acerca a el número L a medida que x se acerca a (pero no está igual a) el número a desde ambos lados.

Una manera más precisa a formular la definición es como sigue:

Se puede hacer que $f(x)$ sea tan cercana a L como queremos si hacemos que “ x ” se acerque lo suficiente a “ a ”.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad f(x) \rightarrow L \text{ cuando } x \rightarrow a^+$$

y

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \quad f(x) \rightarrow L \text{ cuando } x \rightarrow a^-$$

para significar que $f(x) \rightarrow L$ cuando x se acerca a " a " por la derecha (o por arriba), o por la izquierda (o por abajo), respectivamente. Para que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

exista, es necesario que los límites por la izquierda y la derecha existan y deben ser iguales.

Escribimos

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

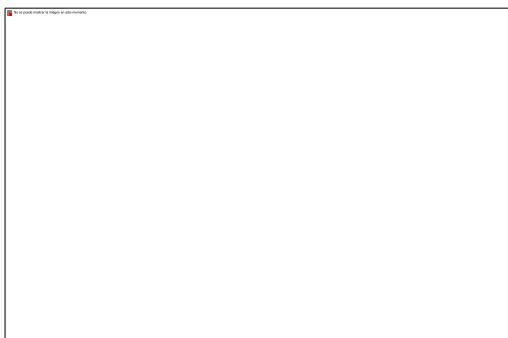
para significar que $f(x) \rightarrow L$ cuando x sea arbitrariamente grande, o que sea un número negativo arbitrariamente grande, respectivamente.

1.1.- FUNCIONES CONTINUAS

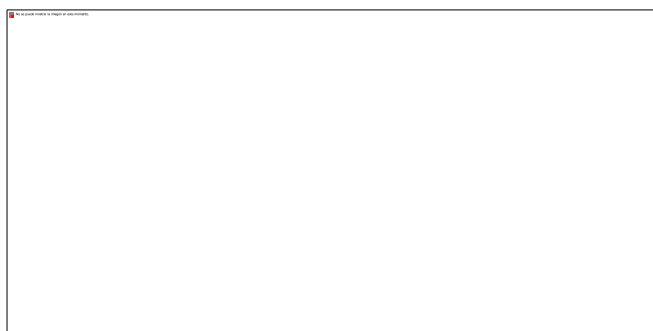
Una función f es **continua a " a "** si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ existe, y es igual a $f(a)$.

La función f es **continua en su dominio** si es continua en cada punto de su dominio. El enfoque algebraico a límites es basado en el hecho que todas las funciones de forma cerrada son continuas en sus dominios.

Ejemplo: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$



Sin embargo, no todas las **funciones** son continuas. Puede ocurrir que una **función** no sea continua en todo su dominio de definición. Si una **función** no es continua en un punto, se dice que la **función** tiene una discontinuidad en ese punto y que la **función** es **discontinua**.



Ejemplo: $f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$

1.3.- PROPIEDADES:

1. Límite de una función constante:

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5 = 5$$

1. Límite de una suma o resta de funciones:

Sean:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L + M$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2) \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 2} 3x$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 3x) = [(2^2) + 3(2)] = 4 + 6 = 10$$

1. Límite de un producto de funciones:

Sean:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$$

Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 3} 4 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 3} x^2 = 4 \cdot (3)^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

2. Límite de un cociente de funciones:

Sean:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \quad y \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$$

Entonces:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M} \quad \text{si } M \neq 0$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x + 2 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 1} 3x$$

Entonces:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow 1} x + 2}{\lim_{x \rightarrow 1} 3x} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{x + 2}{3x} \right] = \frac{1 + 2}{3(1)} = \frac{3}{3} = 1$$

3. Límite de una n-ésima potencia:

Sea

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Y n es cualquier número entero positivo, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^n = L^n$$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 4} (3x)^2 = (3 \cdot 4)^2 = (12)^2 = 144$$

4. Límite de un raíz n-ésima:

Sea

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

Y n es cualquier número entero positivo, entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$$

Si "n" es par entonces $L > 0$

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow -8} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

Ejercicios Propuestos:

Calcular los siguientes límites inmediatos aplicando propiedades

$$\lim_{x \rightarrow -7} \frac{3x}{\sqrt{2-x}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 2)^3 =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 + 3x =$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3x + 2}{11 - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 4x^2 + 3x + 1 =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x^3 =$$

1.4.- LÍMITES INDETERMINADOS

En matemática, se llama **forma indeterminada** a una expresión algebraica que involucra límites del tipo: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ y $\infty - \infty$, entre otros. Estas expresiones se encuentran con frecuencia dentro del contexto del límite de funciones.

En esta unidad se explicarán los estos tres casos de indeterminaciones.

1.4.1.- LÍMITES INDETERMINADOS DE LA FORMA $\frac{0}{0}$:

Este tipo de indeterminación, se suele presentar en cocientes de polinomios; cuando calculamos límites en un punto en el que se nos anula tanto el numerador

como el denominador. Para resolver la indeterminación hay que descomponer en factores los polinomios, tanto del Numerador como del Denominador (utilizando Ruffini, ecuación de segundo grado, productos notables) y se genera el factor nulo en numerador y denominador, que al simplificarlo conduce a la resolución de la indeterminación.

En ocasiones, si esta indeterminación aparece asociada a raíces, binomios de raíces, se hace necesario multiplicar y dividir por el conjugado del binomio de raíces, para que "asome" el factor nulo.

Funciones racionales con polinomios:

En primer lugar, hay que destacar que no se sabe si el límite será determinado o indeterminado y en el caso de que sea indeterminado, no se sabe de qué indeterminación se tratará. Por tanto, el primer paso para resolver cualquier límite es sustituir la x por el número al que tienda y ver qué resultado se obtiene.

Suponiendo que después de sustituir y operar se llega al resultado $0/0$, que es una indeterminación.

A partir de este punto, para resolver las indeterminaciones del tipo cero entre cero hay que seguir el siguiente procedimiento:

1. Se **descomponen en factores los polinomios del numerador y del denominador.**
2. Se **sustituyen** los polinomios en el límite **por su descomposición en factores.**
3. Se **eliminan los factores** que se repitan en el numerador y en el denominador. De esta forma se elimina la indeterminación
4. Se vuelve a sustituir la x por el número al que tienda, llegando a una solución determinada.

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2)^3 - 2(2)^2 - 6(2) + 12}{(2)^2 + 3(2) - 10} = \frac{8 - 8 - 12 + 12}{4 + 6 - 10} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} = \frac{(x-2)(x^2-6)}{(x-2)(x+5)}$$

Como se repite $(x - 2)$ tanto en el numerador como en el denominador, se simplifican y queda:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 6)}{(x + 5)} = \frac{((2)^2 - 6)}{(2 + 5)} = \frac{4 - 6}{7} = -\frac{2}{7}$$

De esta manera se elimina la indeterminación y se obtiene un valor real para el límite de la función. La mayor dificultad de este procedimiento radica en la descomposición de los polinomios en factores, por lo que se debe tener muy claro cómo descomponer polinomios, así como dominar los productos notables, cómo sacar factor común, el método de Ruffini...

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{x^4 + 2x}$$

Sustituyendo el valor de "x", se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(0)^2 - 5(0)}{(0)^4 + 2(0)} = \frac{0}{0}$$

El cual es una indeterminación. Se descomponen los polinomios en factores. A veces, no es necesario descomponer el polinomio en factores de grado 1 o irreducibles. Lo que se pretende conseguir al descomponerlos es encontrar un factor que se repita arriba y abajo para eliminarlo y que desaparezca la indeterminación

Por eso, esta vez, se puede sacar factor común a la x en ambos polinomios:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 5x}{x^4 + 2x} = \frac{x(3x - 5)}{x(x^3 + 2)}$$

Se elimina la "x" tanto del numerador como el denominador, por lo que queda:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x - 5}{x^3 + 2}$$

Se vuelve a sustituir el "0" por la "x"

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(0) + 5}{(0)^3 + 2} = \frac{0 + 5}{0 + 2} = \frac{5}{2}$$

Funciones racionales con raíces:

Muchas veces, los límites con indeterminación 0/0 tienen raíces y en estos casos no es posible factorizar los polinomios para eliminar el mismo factor del numerador y del denominador.

En este caso hay que multiplicar el numerador y el denominador por el conjugado del binomio donde esté la raíz.

Ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

Se sustituye la x por el 1 y da como resultado la indeterminación cero entre cero:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{(1)^2 - 1}{\sqrt{1} - 1} = \frac{1 - 1}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

En este caso, la raíz está en el denominador, por tanto, de ese binomio será el conjugado por el que se debe multiplicar el numerador y el denominador:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$$

En el denominador ha quedado una suma por diferencia, que es igual a una diferencia de cuadrados:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)\sqrt{x} + 1}{(\sqrt{x})^2 - 1^2}$$

Y en el numerador, se tiene un factor de grado 2 que es una diferencia de cuadrados, que se puede descomponer como suma por diferencia:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)\sqrt{x} + 1}{x-1}$$

Y de esta forma, el factor (x-1) se puede eliminar del numerador y del denominador y queda:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x} + 1)$$

Ahora se sustituye la x por el 1 y de esta manera se ha eliminado la indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x+1)(\sqrt{x} + 1) = (1+1)(\sqrt{1} + 1) = (2)(2) = 4$$

EJEMPLO:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9}$$

Se sustituye la x por el 3 y se demuestra la indeterminación de cero entre cero:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{3}}{3^2 - 9} = \frac{0}{0}$$

Se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado del binomio del numerador:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 9} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{3}}{\sqrt{x} + \sqrt{3}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})}{(x^2 - 9)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}$$

En el numerador nos queda una suma por diferencia, que es igual a una diferencia de cuadrados:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{3})^2}{(x^2 - 9)(\sqrt{x} + 3)}$$

En el denominador tenemos el binomio (x^2-9) , que es una diferencia de cuadrados y podemos ponerlo como una suma por diferencia:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{(x + 3)(x - 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}$$

Al tenerlo así, se elimina el factor $(x + 3)$:

Y queda:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x + 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})}$$

Al volver a sustituir la x por el 3, se llega a la solución del límite:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x + 3)(\sqrt{x} + \sqrt{3})} = \frac{1}{(3 + 3)(\sqrt{3} + \sqrt{3})} = \frac{1}{6(2\sqrt{3})} = \frac{1}{12\sqrt{3}}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{1 - x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x - 3}{\sqrt{x} - \sqrt{3}} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x} =$$

1.4.2.- LIMITES INTEDERMINADOS DE LA FORMA $\frac{\infty}{\infty}$:

Este tipo de indeterminación se encuentra en los límites de cuando x tiende a infinito (o a menos infinito) de funciones racionales y al sustituir nos queda ∞/∞ .

En general tienen esta forma:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(x)}{Q(x)}$$

Cuando se tiene la indeterminación de límites **infinito entre infinito**, se tienen que eliminar términos del numerador y del denominador y **dejar sólo los términos de mayor grado** arriba y abajo.

Una vez que se tienen los términos de mayor grado, se puede operar y eliminar las x que se repitan tanto en el numerador como en el denominador.

Al operar, **la indeterminación desaparece** y **se debe sustituir de nuevo la x** por el número al que tiende para llegar al resultado.

EJEMPLO:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{3x - 5}$$

Todos los límites empiezan resolviéndose igual: sustituyendo la x por el número al que tiende, es decir, no se resuelve sabiendo antes de empezar que va a ser una indeterminación.

Una vez hemos sustituido la x y operando, entonces se puede llegar a un resultado concreto o llegar a la conclusión de que es una indeterminación.

En primer lugar, sustituimos la x por infinito y nos queda una indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{3x - 5} = \frac{(\infty)^2 + 2(\infty) + 1}{3(\infty) - 5} = \frac{\infty}{\infty} = \text{indeterminación}$$

Para resolver este tipo de indeterminación se deja en el numerador y en el denominador sólo el término de mayor grado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{3x - 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{3x}$$

Una vez que se deja el término de mayor grado, se eliminan los factores que se repiten tanto en el numerador como en el denominador. En este caso, se puede eliminar una x en cada lado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{3} = \frac{\infty}{3} = \infty$$

Y finalmente, se sustituye otra vez la x por infinito, pero esta vez, ya no tiene ninguna indeterminación y el resultado es infinito entre un número, que es igual a infinito.

EJEMPLO:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x}{-3x + 2}$$

Primero se sustituye la x por infinito y queda:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x}{-3x + 2} = \frac{2(\infty)^4 - 3\infty}{-3\infty + 2} = \frac{\infty}{-\infty} = \text{indeterminación}$$

Esta vez se tiene un infinito negativo en el denominador, pero sigue siendo el mismo tipo de indeterminación.

Luego se deja el término de mayor grado en el numerador y el denominador:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4 - 3x}{-3x + 2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{-3x}$$

Se procede a eliminar una x del numerador y otra del denominador y se sustituye nuevamente la x por infinito, llegando al resultado de menos infinito, ya que se está dividiendo por un número negativo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4}{-3x} = \frac{2x^3}{-3} = \frac{2(\infty)^3}{-3} = \frac{\infty}{-3} = -\infty$$

EJEMPLO:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 2}{x^3 - 5}$$

Se sustituye la x por infinito y se llega a la indeterminación infinito entre infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 2}{x^3 - 5} = \frac{7(\infty) + 2}{(\infty)^3 - 5} = \frac{\infty}{\infty} = \text{indeterminación}$$

Se dejamos el término de mayor grado en el numerador y en el denominador:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x + 2}{x^3 - 5} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x}{x^3}$$

Se procede a eliminar una x tanto en el numerador como en el denominador. Esta vez en el numerador no tenemos ninguna x, por lo que a la hora de sustituir, el infinito nos queda sólo en el denominador y por tanto, un número entre infinito, da como resultado cero:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x}{x^3} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7}{x^2} = \frac{7}{(\infty)^2} = 0$$

EJEMPLO:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 4x}$$

Se sustituye la x por infinito y queda la indeterminación entre infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 4x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(\infty)^2 + 2}{(\infty)^2 - 4(\infty)} = \frac{\infty}{\infty} = \textit{indeterminación}$$

Se deja el término de mayor grado arriba y abajo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 2}{x^2 - 4x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2}$$

Se procede como se ha hecho en los ejercicios anteriores a eliminar x elevado al cuadrado tanto en el numerador como en el denominador, por lo que desaparecen las x. Por tanto, a la hora de volver a sustituir la x por infinito, como no se tiene x, el resultado es el mismo número que ha quedado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x^2} = \frac{2}{1} = 2$$

INDETERMINACIÓN INFINITO ENTRE INFINITO CON RAÍCES

Cuando se encuentran radicales en los límites suele causar confusión. Para resolverlos hay que verificar si se tiene la indeterminación de infinito entre infinito con raíces.

Por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x} + 1}$$

Se sustituye la x por infinito y llegando a la conclusión de que es una indeterminación:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\infty}{\infty} = \text{indeterminación}$$

Se queda solo con el término de mayor grado, pero ahora hay que tener cuidado con los radicales. En el numerador, el término de mayor grado es el primero, ya que el segundo término está dentro de otra raíz y por tanto el grado es menor.

En el denominador, el término de mayor grado es el de la raíz. Por lo que queda por tanto el mismo término arriba y abajo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}}}{\sqrt{x} + 1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

Al resolver, queda que la función es igual a 1, ya que ambos términos se pueden dividir entre sí, y por tanto, el límite de la función cuando x tiende a infinito es igual a 1:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

EJEMPLO:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2}}{2x + 3}$$

Se sustituye la x por infinito y quedando la indeterminación de infinito sobre infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2}}{2x + 3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{indeterminación}$$

Se deja el término de mayor grado en el numerador y en el denominador:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 3x^2}}{2x + 3} = \frac{\sqrt{x^3}}{2x}$$

Y ahora se resuelve, pero no se ve tan claro cómo operar para eliminar una de las x, como en el resto de ejemplos que se han visto.

En primer lugar la raíz la pasamos a exponente fraccionario:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2x} =$$

Y ahora, para operar con las x las consideramos como una división de potencias de la misma base, donde mantenemos la x y restamos los exponentes:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{3}{2}-1}}{2}$$

Quedando una sola x en el numerador, que al sustituir por infinito, el resultado es infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{\frac{1}{2}}}{2} = \infty$$

CONCLUSIÓN DE LA INDETERMINACIÓN INFINITO ENTRE INFINITO

Con la indeterminación de infinito entre infinito, el resultado va a depender del grado de los polinomios del numerador y del denominador:

1. Si el grado de P(x) es **menor que** el grado de Q(x) el resultado va a ser **cero**
2. Si el grado de P(x) es **mayor que** el grado de Q(x) el resultado va a ser **infinito o menos infinito**
3. Si el grado de P(x) es **igual que** el grado de Q(x) el resultado va a ser **un número**

1.4.3.- LIMITES INDETERMINADOS DE LA FORMA $\infty - \infty$:

Como no se sabe si los infinitos son iguales, infinito menos infinito es otra indeterminación:

$$\infty - \infty = \text{indeterminación}$$

El procedimiento para resolver límites con la indeterminación infinito menos infinito es el siguiente:

1. Llegar a la indeterminación infinito menos infinito sustituyendo la x por el número al que tienda
2. Multiplicar y dividir por el conjugado de la función
3. Operar en el numerador de la fracción resultante para simplificar términos
4. Resolver la indeterminación infinito entre infinito que queda.

EJEMPLO:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 - 5x} - 2x =$$

En primer lugar, se sustituye la x por infinito, lo que se llega a la indeterminación infinito menos infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 - 5x} - 2x = \sqrt{4\infty^2 - 5\infty} - 2\infty = \infty - \infty = \text{indeterminación}$$

Para resolver los límites con indeterminación infinito menos infinito hay que multiplicar y dividir por el conjugado de la función:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x^2 - 5x} - 2x = \sqrt{4x^2 - 5x} - 2x \cdot \frac{\sqrt{4x^2 - 5x} + 2x}{\sqrt{4x^2 - 5x} + 2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 5x} - 2x)(\sqrt{4x^2 - 5x} + 2x)}{(\sqrt{4x^2 - 5x} + 2x)} =$$

Operando en el numerador de la fracción, donde queda una diferencia de cuadrados, ya que se tiene una multiplicación de suma por diferencia:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{4x^2 - 5x})^2 - (2x)^2}{(\sqrt{4x^2 - 5x} + 2x)}$$

Resolviendo los cuadrados y agrupando los términos semejantes en el numerador se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 5x - 4x^2}{(\sqrt{4x^2 - 5x} + 2x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{(\sqrt{4x^2 - 5x} + 2x)}$$

Sustituyendo la x por infinito. Se llega a otra indeterminación, que ahora es la de infinito entre infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{(\sqrt{4x^2 - 5x} + 2x)} = \frac{-5\infty}{(\sqrt{4\infty^2 - 5\infty} + 2\infty)} = \frac{\infty}{\infty} = \textit{indeterminación}$$

Quedando con el término de mayor grado tanto en el numerador como en el denominador, se resuelve la raíz en y se agrupan términos en el denominador:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{(\sqrt{4x^2} + 2x)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{2x + 2x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{4x}$$

Finalmente, se eliminan la x y se obtiene el resultado del límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5x}{4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5}{4} = -\frac{5}{4}$$

EJEMPLO:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1}$$

Se evalúa el límite, sustituyendo el valor a la cual tiende la x

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{1-1} - \frac{1}{1^2-1} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty = \textit{indeterminación}$$

En este tipo de ejercicio hay que resolverlos sacando el mínimo común múltiplo, que en este caso es:

$$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$$

Se divide entre cada uno de los denominadores y el resultado se multiplica por su respectivo numerador:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} = \frac{(x+1)-1}{x^2-1} = \frac{x}{x^2-1}$$

Sustituyendo nuevamente el valor a la cual tiende x, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{1^2-1} = \frac{1}{0} = \infty$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x-1} - \sqrt{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - \sqrt{x^2+1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2}{x^2-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{3+x^2} - x =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - \frac{x^3-x}{x^2} =$$

UNIDAD II

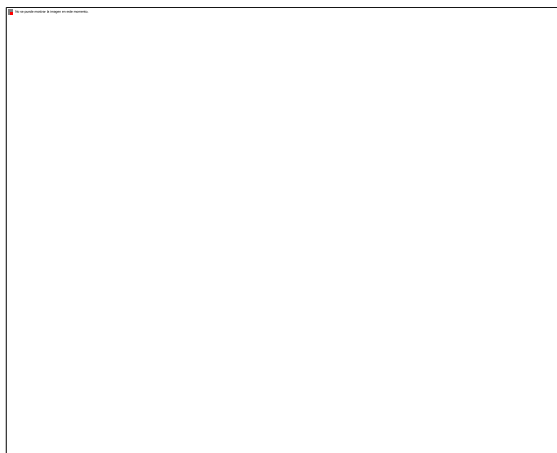
2.- ESTUDIO DE LA DERIVADA:

OBJETIVO ESPECÍFICO:

Calcular derivadas de funciones usando la definición y las reglas de derivación.

2.1.- DEFINICIÓN DE DERIVADA:

En matemática, la **derivada** de una función mide la rapidez con la que cambia el valor de dicha función matemática, según cambie el valor de su variable independiente. La derivada de una función es un concepto local, es decir, se calcula como el límite de la rapidez de cambio media de la función en cierto intervalo, cuando el intervalo considerado para la variable independiente se torna cada vez más pequeño. Por ello se habla del valor de la derivada de una función *en un punto dado*.



La derivada de la función en el punto marcado es equivalente a la pendiente de la recta tangente (la gráfica de la función está dibujada en rojo; la tangente a la curva está dibujada en verde).

El valor de la derivada de una función en un punto puede interpretarse geoméricamente, ya que se corresponde con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.

En general, las funciones elementales que se tratan en Cálculo poseen derivada en todos sus puntos (salvo quizás en algunos puntos específicos), por eso dada una función $y = f(x)$, se dice que su derivada es la función $y' = f'(x)$.

Es decir, la función derivada de $f(x)$ puede ser calculada mediante el límite:



EJEMPLO:

Hallar la función derivada de la siguiente función:

$$f(x) = 7x + 3$$

Aplicando la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Se sustituye $f(x+h)$ y $f(x)$ por sus funciones correspondientes:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(7 \cdot (x + h) + 3) - (7x + 3)}{h}$$

Se opera y se simplifican los términos:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{7x + 7h + 3 - 7x - 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h}{h}$$

Se elimina la h del numerador y del denominador y por último se obtiene el resultado:

$$\lim_{h \rightarrow 0} 7 = 7$$

Por tanto, la función derivada de la función anterior es:

$$f'(x) = 7$$

Esta vez, la función derivada es una función constante, es decir, no es el valor de la derivada en un punto, lo que quiere decir que la derivada de la función anterior en cualquier punto es igual a 7.

EJEMPLO:

Hallar la función derivada de la siguiente función:

$$f(x) = 5x^2 + 4$$

y hallar el valor de la derivada de esa función en el punto $x=2$.

En primer lugar se aplica la fórmula de la definición de derivada:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Se sustituye $f(x+h)$ y $f(x)$ por sus valores:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5 \cdot (x+h)^2 + 4) - (5x^2 + 4)}{h}$$

Se desarrolla el paréntesis que está al cuadrado:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(5 \cdot (x^2 + 2xh + h^2) + 4) - (5x^2 + 4)}{h}$$

Se eliminan los paréntesis:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 10xh + 5h^2 - 5x^2 - 4}{h}$$

Se simplifican los términos y se saca factor común a la h en el numerador:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{10xh + 5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(10x + 5h)}{h}$$

Se elimina la h que se repite en el numerador y en el denominador y obteniendo el resultado final:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 10x + 5h = 10x + 5(0) = 10x + 0 = 10x$$

La derivada de la función es por tanto:

$$f'(x) = 10x$$

Para hallar el valor de la derivada en $x=2$, ya no es necesario aplicar la fórmula de la derivada. Simplemente sustituyendo la x por 2 en la función derivada, obtenemos su valor para ese punto:

$$f'_{(2)} = 10(2) = 20$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Hallar la función derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 5x^2 - 7x^3$

2. $g(x) = \sqrt{1 + 2x}$

3. $f(x) = 2x + 1$

4. $f(x) = x^2 - 6x + 2$

2.2.- ALGEBRA DE DERIVADAS Y FÓRMULAS DE DERIVACIÓN (USO DE TABLAS) DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE REAL

CÁLCULO DE FUNCIONES DERIVADAS

Si se conoce la función derivada de cada tipo de función, se puede escribir directamente sin necesidad de calcular cada vez la función derivada utilizando su definición.

Esto permite calcular derivadas de una forma más directa, al mismo tiempo que simplifica mucho los cálculos en funciones más complejas.

Para ello se utiliza la tabla de derivadas que contiene cada una de las mismas de manera simplificada.



La primera derivada que aparece en la tabla es:

1. DERIVADA DE UNA CONSTANTE:

Si se tiene una función constante:

$$y = c$$

Siendo c cualquier número real

La derivada de una función constante es cero:

$$\frac{dc}{dx} = 0 \quad \text{ó} \quad y' = 0$$

Demostrando calculando su función derivada utilizando la definición:

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0$$

Por tanto, cada vez que la función sea una constante, la derivada será 0 y se puede colocar directamente.

EJEMPLO:

Calcular la derivada de la siguiente función:

$$y = 6$$

Como es una función constante, escribe directamente como aparece en la tabla su derivada:

$$y' = 0$$

EJEMPLO:

Calcular la derivada de la siguiente función:

$$y = -3$$

Como es una función constante, escribe directamente como aparece en la tabla su derivada:

$$y' = 0$$

2. DERIVADA DE LA FUNCIÓN LINEAL

Las funciones lineales son aquellas cuya forma son una "x" multiplicadas por un número:

$$y = c \cdot x$$

La derivada de la función lineal es el número que multiplica a la "x":

$$y = c \cdot x \rightarrow y' = c$$

La demostración es la siguiente:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(x+h) - c \cdot x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot x + c \cdot h - c \cdot x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} c = c \end{aligned}$$

Por tanto, cuando la función sea lineal, en su derivada desaparecerá la "x" y quedará sólo el número.

EJEMPLO:

Calcular la derivada de la siguiente función:

$$y = 3x$$

Su derivada es igual al número que tiene delante la "x":

$$y' = 3$$

EJEMPLO:

Calcular la derivada de la siguiente función:

$$y = -6x \rightarrow y' = -6$$

1. DERIVADA DE LA IDENTIDAD

Un caso particular de la función lineal es la función identidad, es decir, cuando la función es sólo una "x"

$$y = x$$

La derivada de la función identidad es igual a 1, que es igual al número que lleva delante:

$$y = x \quad \rightarrow \quad y' = 1$$

Su demostración es:

$$y' = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1$$

2. DERIVADA DE LA FUNCIÓN AFÍN

La función afín es la que tiene la siguiente forma:

$$y = ax + b$$

La derivada de la función afín es el número que queda delante de la "x". Todo lo demás desaparece:

$$y = ax + b \quad \rightarrow \quad y' = a$$

Tiene sentido ya que la derivada de una función lineal es el número que queda delante de la "x" y la derivada de una constante es cero, por tanto, la suma de las dos derivadas es igual al número que queda delante de la "x".

Más adelante se verá que la derivada de una suma de funciones es igual a la suma de las derivadas.

Su demostración derivando con la definición de la derivada es:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a(x+h) + b - (ax + b)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a \cdot x + a \cdot h + b - a \cdot x - b}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a = a \end{aligned}$$

EJEMPLO:

Calcular la derivada de:

$$y = -2x + 3$$

Directamente para calcular la derivada de esta función, se deja sólo el número que está multiplicando a la x:

$$y' = -2$$

EJEMPLO:

Calcular la derivada de:

$$y = 6x - 4$$

$$y' = 6$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

1. $y = 12x - 3$

2. $y = 14x + 6$

3. $y = 26x - 15$

4. DERIVADA DE LA FUNCIÓN POTENCIA

Una función potencia es aquella donde la x está elevada a un exponente. Para calcular su derivada, el exponente pasa a multiplicar a la x y se le resta 1 al exponente:

$$y = x^n \rightarrow y' = nx^{n-1}$$

En lugar de una x, se puede tener una función elevada a un exponente. En ese caso, la derivada se calcula pasando el exponente a multiplicar a la función, a cuyo exponente se le resta 1 y además todo lo anterior queda multiplicado por la derivada de la función:

$$y = [f(x)]^n \rightarrow y' = n[f(x)]^{n-1} \cdot f'(x)$$

EJEMPLO:

Calcular la derivada de:

$$y = x^2$$

Se pasa el 2 multiplicando a la x y le restamos 1 al exponente:

$$y' = 2x^{2-1} = 2x$$

EJEMPLO:

Una función elevada a un exponente: Derivar la siguiente función:

$$y = (3x^2 + x)^4$$

Se coloca el exponente a multiplicar la función y al exponente de la función se le resta 1 y todo eso, se multiplica por la derivada de la función, que está compuesta por dos términos y su derivada será la suma de la derivada de cada uno de los términos:

$$y' = 4 (3x^2 + x)^{4-1} (3x^2 + x)'$$

$$y' = 4(3x^2 + x)^3 (6x + 1)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

5. $y = (2x + 3)^5$

6. $y = (x^3 - 2)^6$

7. $y = (x^4 - x)^4$

1. DERIVADA DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN

Cuando se tiene una constante que está multiplicando a una función, su derivada será esa constante multiplicada por la derivada de la función:

$$y = c \cdot f(x) \rightarrow y' = c \cdot f'(x)$$

EJEMPLO:

Hallar la derivada de la función:

$$y = 27x^3$$

El 3 pasa a multiplicar al 27, que ya estaba y al exponente de la x se le resta 1:

$$y' = 3 \cdot 27 x^{3-2} \rightarrow y' = 81x^2$$

EJEMPLO:

Hallar la derivada de la función:

$$y = 4x^5 + 2x^3$$

El exponente pasa a multiplicar a la base y a ese mismo exponente se le resta "1"

$$y' = 20x^4 + 6x^2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

2. $y = 16x^3 + 24x^2$

3. $y = 36x^4 - 12x^3 + x^2$

4. $y = \frac{1}{4}x^3 + 6x^{\frac{2}{5}}$

1. DERIVADA DE UNA RAÍZ

La derivada de una raíz es un caso particular de la función potencial cuando el exponente es fraccionario. La derivada de la raíz cuadrada de x es la siguiente:

$$y = \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Si lo que se tiene es una función dentro de la raíz cuadrada, su derivada es:

$$y = \sqrt{f(x)} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$$

En general, la derivada de una raíz, ya sea de x o de una función es:

$$y = \sqrt[n]{x} \rightarrow y' = \frac{1}{n \sqrt[n]{x^{n-1}}}$$

$$y = \sqrt[n]{f(x)} \rightarrow y' = \frac{1}{n \sqrt[n]{[f(x)]^{n-1}}} \cdot f'(x)$$

EJEMPLO:

Calcular la derivada de la siguiente función:

$$y = \sqrt[3]{x}$$

En el denominador, el índice pasa a multiplicar a la raíz y se le resta 1 al exponente del radicando:

$$y' = \frac{1}{7\sqrt[7]{x^6}}$$

EJEMPLO:

Calcular la derivada de la raíz cuadrada de una función:

$$y = \sqrt{5x^4 + x^2}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{5x^4 + x^2}} \cdot (20x^3 + 2x)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

2. $y = \sqrt[5]{2x^2 - 3}$

3. $y = \sqrt[3]{3x^2 + 1}$

4. $y = 4\sqrt[3]{12x^5 - 8}$

1. DERIVADA DEL LOGARITMO

La derivada de un logaritmo de x de base cualquiera es igual a 1 dividido por el producto de x por el logaritmo neperiano de la base:

$$y = \log_a x \rightarrow y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Cuando el logaritmo es de una función, su derivada es igual a 1 entre el producto de la función por el logaritmo neperiano de la base, multiplicado por la derivada de la función:

$$y = \log_a f(x) \rightarrow y' = \frac{1}{f(x) \cdot \ln a} \cdot f'(x)$$

Cuando la función es logaritmo neperiano de x, su derivada es 1 entre x:

$$y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$$

Y si la función es logaritmo neperiano de una función, su derivada es 1 entre la función, multiplicado por la derivada de la función:

$$y = \ln f(x) \rightarrow y' = \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x)$$

EJEMPLO:

La derivada de este logaritmo en base 12 de esta función es:

$$y = \log_{12}(x^2 + 6x)$$

$$y' = \frac{1}{(x^2 + 6x) \ln 12} \cdot (2x + 6)$$

EJEMPLO:

Hallar la derivada de:

$$y = \ln x^2$$

$$y' = \frac{(x^2)'}{x^2} \rightarrow y' = \frac{2x}{x^2} \rightarrow y' = \frac{2}{x}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

2. $y = 5 \ln x^2$
3. $y = \log(x^2 - 8x)$
4. $y = \log(6x^3 - 5x^2 + 9)$

1. DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL

Se tiene una función exponencial cuando la x está en el exponente. Su derivada es igual al mismo número elevado a x multiplicado por el logaritmo neperiano de la base de la potencia:

$$y = a^x \rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$$

Si el número está elevado a una función, la derivada es igual a la misma potencia, multiplicada por el logaritmo neperiano de la base y por la derivada de la función exponente:

$$y = a^{f(x)} \rightarrow y' = a^{f(x)} \cdot \ln a \cdot f'(x)$$

Cuando el número al que está elevado la x es el número e, la derivada es el mismo número e elevado a x:

$$y = e^x \rightarrow y' = e^x$$

Si el número e está elevado a una función, su derivada es el mismo número e elevado a la función por la derivada de la función:

$$y = e^{f(x)} \rightarrow y' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

EJEMPLO:

En esta función exponencial, donde el número está elevado a una función:

$$y = 7^{x^4+2x}$$

Su derivada es:

$$y' = 7^{x^4+2x} \cdot \ln 7 (4x^3 + 2)$$

EJEMPLO:

Con el número e elevada a una función:

$$y = e^{\sqrt[3]{5x}}$$

Su derivada es:

$$y' = e^{\sqrt[3]{5x}} \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{(5x)^2}} \cdot 5$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

2. $y = e^{2x+5}$

$$3. \quad y = e^{-\frac{4}{3}x^2}$$

$$4. \quad y = 7e^{x^4+6}$$

1. DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Ahora se verán las derivadas de las funciones trigonométricas junto con sus funciones compuestas.

La derivada del seno es igual al coseno:

$$y = \text{sen } x \quad \rightarrow \quad y' = \cos x$$

$$y = \text{sen } f(x) \quad \rightarrow \quad y' = \cos f(x) \cdot f'(x)$$

La derivada del coseno, es igual a menos seno:

$$y = \cos x \quad \rightarrow \quad y' = -\text{sen } x$$

$$y = \cos f(x) \quad \rightarrow \quad y' = -\text{sen } f(x) \cdot f'(x)$$

La derivada de la tangente es igual a 1 más el cuadrado de la tangente o 1 entre el coseno cuadrado de x:

$$y = \text{tag } x \quad \rightarrow \quad y' = 1 + \text{tag}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \text{tag } f(x) \quad \rightarrow \quad y' = [1 + \text{tag}^2 f(x)] \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{\cos^2 f(x)}$$

Esas tres funciones trigonométricas son las más utilizadas. También está el resto de funciones trigonométrica:

Derivada de la cotangente:

$$y = \text{ctag } x \quad \rightarrow \quad y' = \frac{1}{-\text{sen}^2 x} = -(1 + \text{ctag}^2 x)$$

$$y = \text{ctag } f(x) \quad \rightarrow \quad y' = \frac{f'(x)}{-\text{sen}^2 f(x)} = -[1 + \text{ctag}^2 f(x)] \cdot f'(x)$$

Derivada de la secante:

$$y = \sec x \rightarrow y' = \sec x \cdot \operatorname{tag} x$$

$$y = \sec f(x) \rightarrow y' = \sec f(x) \cdot \operatorname{tag} f(x) \cdot f'(x)$$

Derivada de la cosecante:

$$y = \operatorname{csec} x \rightarrow y' = -\operatorname{csec} x \cdot \operatorname{ctag} x$$

$$y = \operatorname{csec} f(x) \rightarrow y' = -\operatorname{csec} f(x) \cdot \operatorname{ctag} f(x) \cdot f'(x)$$

EJEMPLO:

Derivar la siguiente función seno:

$$y = \operatorname{sen} (2x^3 + 5x)$$

$$y' = \operatorname{sen} (2x^3 + 5x)(2x^3 + 5x)' \rightarrow y' = \operatorname{sen}(2x^3 + 5x) (6x^2 + 5)$$

EJEMPLO:

Derivar la siguiente función coseno:

$$y = \cos \sqrt[5]{x^4}$$

$$y' = -\operatorname{sen} \sqrt[5]{x^4} \cdot \frac{1}{5 \sqrt[5]{(x^4)^4}} \cdot 4x^3$$

EJEMPLO:

Derivar la siguiente función tangente:

$$y = \operatorname{tag} 5^x$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 5^x} \cdot 5^x \cdot \ln 5$$

EJEMPLO:

Derivar la siguiente función cotangente:

$$y = \operatorname{ctag} \frac{2x + 1}{x - 3}$$

$$y' = \frac{1}{\sec^2 \frac{2x+1}{x-3}} \cdot \frac{2(x-3) - (2x+1)}{(x-3)^2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

2. $y = \text{sen}(6x)$

3. $y = \cos x^3$

4. $y = \text{tag} \sqrt{x}$

5. $y = \text{ctag} \left(\frac{2x}{3x-4} \right)$

1. DERIVADA DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Éstas son las derivadas de las funciones trigonométricas inversas principales.

Arco seno:

$$y = \text{arc sen } x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \text{arc sen } f(x) \rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

Arco coseno:

$$y = \text{arc cos } x \rightarrow y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$y = \text{arc cos } f(x) \rightarrow y' = \frac{f'(x)}{\sqrt{1-[f(x)]^2}}$$

Arco tangente:

$$y = \text{arc tag } x \rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y = \text{arc tag } f(x) \rightarrow y' = \frac{1}{1+[f(x)]^2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

2. $y = \text{arcsen} \frac{2x^2}{3}$

3. $y = \arctag(\operatorname{sen} x)$

4. $y = \operatorname{arc} \cos(x^6 - x^3)$

2.3.- OPERACIONES CON FUNCIONES DERIVADAS

Ahora se verá cómo derivar funciones que están formadas por más de una función, como la suma, la multiplicación, el cociente o la composición de funciones.

1. DERIVADA DE LA SUMA DE DOS FUNCIONES

La derivada de una suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de esas dos funciones:

$$y = f(x) + g(x) \rightarrow y' = f'(x) + g'(x)$$

EJEMPLO:

Hallar la derivada de la siguiente función:

$$y = x^4 + 3x^2 - 5x + 1$$

es igual a la derivada de cada uno de sus términos:

$$y' = 4x^3 + 6x - 5$$

EJEMPLO:

Hallar la derivada de la siguiente función:

$$y = 4x^5 + 2x^3 - 6x + 8$$

$$y' = 20x^4 + 6x^2 - 6$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

2. $y = \frac{3}{4} x^4 + \sqrt[3]{x^2} + 12x$

3. $y = e^{2x} - 6 \ln 3x^2 + \sqrt[3]{4x}$

4. $y = \text{sen } 2x + \cos 7x$

5. DERIVADA DE UN PRODUCTO DE FUNCIONES

La derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada segunda, más la segunda función por la derivada de la primera:

$$y = f(x) \cdot g(x)$$

$$y' = f(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot f'(x)$$

EJEMPLO:

$$y = (3x^4 + 15x) \cdot (4x^7 - 3x^5)$$

$$y' = (3x^4 + 15x) \cdot (4x^7 - 3x^5)' + (4x^7 - 3x^5) \cdot (3x^4 + 15x)'$$

$$y' = (3x^4 + 15x) \cdot (28x^6 - 15x^4) + (4x^7 - 3x^5) \cdot (12x^3 + 15)$$

EJEMPLO:

$$y = (3x - 2) \cdot (\text{sen } x^2)$$

$$y' = (3x - 2) \cdot [(\text{sen } x^2)]' + (\text{sen } x^2) \cdot (3x - 2)'$$

$$y' = (3x - 2) \cdot \cos x^2 \cdot (x^2) + (\text{sen } x^2) \cdot (3)$$

$$y' = (3x - 2) \cdot \cos x^2 \cdot 2x + (\text{sen } x^2) \cdot 3$$

$$y' = 6x^2 \cos x^2 - 4x \cos x^2 + 3 \text{sen } x^2$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1. $y = (3x + 5) \cdot (4x^2 - 7)^3$

2. $y = \sqrt{x^2 + 6} \cdot \text{tag}(5x)$

3. $y = x^4 \cdot (3x - 6)^3$

4. DERIVADA DEL COCIENTE DE FUNCIONES

La derivada de un cociente de funciones es igual a la derivada del numerador, por el denominador sin derivar, menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, todo ello dividido entre el denominador sin derivar al cuadrado:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$y' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

EJEMPLO:

$$y = \frac{3x^4 - 18}{x^2 + 5x}$$

$$y' = \frac{(x^2 + 5x) \cdot (3x^4 - 18)' - (3x^4 - 18) \cdot (x^2 + 5x)'}{(x^2 + 5x)^2}$$

$$y' = \frac{(x^2 + 5x) \cdot (12x^3) - (3x^4 - 18)(2x + 5)}{(x^2 + 5x)^2}$$

Una vez aplicada la fórmula de la derivada de un cociente, ya sólo queda operar y agrupar términos semejantes:

$$y' = \frac{12x^5 + 60x^4 - (6x^5 + 15x^4 - 36x - 90)}{(x^2 + 5x)^2}$$

$$y' = \frac{12x^5 + 60x^4 - 6x^5 - 15x^4 + 36x + 90}{x^4 + 10x^3 + 25x^2}$$

$$y' = \frac{6x^5 + 45x^4 + 36x + 90}{x^4 + 10x^3 + 25x^2}$$

EJEMPLO:

$$y = \frac{2x^4 + 3x}{x^5}$$

$$y' = \frac{x^5 \cdot (2x^4 + 3x)' - (2x^4 + 3x) \cdot (x^5)'}{(x^5)^2}$$

$$y' = \frac{x^5 \cdot (8x^3 + 3) - (2x^4 + 3x) \cdot 5x^4}{x^{10}}$$

$$y' = \frac{8x^8 + 3x^5 - 10x^8 - 15x^5}{x^{10}}$$

$$y' = \frac{-2x^8 - 12x^5}{x^{10}}$$

$$y' = \frac{x^5(-2x^3 - 12)}{x^{10}}$$

$$y' = \frac{-(2x^3 + 12)}{x^5}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Hallar la derivada de las siguientes funciones:

5. REGLA DE LA CADENA. DERIVADA DE LA FUNCIÓN COMPUESTA

En las funciones compuestas por otras funciones:

$$y = f[g(x)]$$

Su derivada se calcula aplicando la regla de la cadena, que consiste en ir derivando la función que queda por fuera, multiplicada por la derivada de la función de dentro:

$$y' = f'[g(x)] \cdot g'(x)$$

EJEMPLO:

Esta función se compone de una función elevada a 4:

$$y = (7x^5 + 12x^2 + 3)^4$$

La función de fuera es la función elevada a 4 y al función de dentro corresponde a un polinomio.

Por tanto, se aplica la regla de la cadena derivando la función que queda por fuera, es decir, la función elevada a 4, donde el 4 pasa a multiplicar a la base y le restamos uno al exponente, y lo multiplicamos por la derivada de la función de dentro, que corresponde a la suma de sus derivadas:

$$y' = 4(7x^5 + 12x^2 + 3)^3(35x^4 + 24x)$$

2.4.- DERIVADA DE FUNCIONES INVERSAS

Si f y g son funciones inversas, es decir $g \circ f = f \circ g = I$. Entonces:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

En la práctica, para derivar una función $y = f(x)$ a partir de su función inversa, se siguen los siguientes pasos:

- 1.- Se busca la función inversa de $y = f(x)$, que se escribe de la forma $x = g(y)$.
- 2.- Se busca $x' = g'(y)$.
- 3.- Usando lo anterior, $y' = 1/x'$.
- 4.- Se sustituye x' por $g'(y)$ y se opera.
- 5.- Por último se sustituye x por $g(y)$.

EJEMPLO:

Derivar, usando la derivada de la función inversa:

$$y = \arcsen x$$

La función inversa de la dada es:

$$x = \sen y$$

La derivada de la función es:

$$x' = \cos y$$

Ahora:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y}$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 y}}$$

Sabiendo que $x = \operatorname{sen} y$, se tiene:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

EJEMPLO:

Derivar, usando la derivada de la función inversa:

$$y = \operatorname{arctag} x$$

Función inversa

$$x = \operatorname{tag} y$$

Derivando

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{1 + \operatorname{tag}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

6. $y = 2x + 1$

7. $y = \frac{1}{1+x}$

8. $y = \frac{4+x}{2-x}$

1. DERIVADAS IMPLÍCITAS

En todos los casos vistos hasta ahora, la variable “y” (variable dependiente) está despejada (esta forma se llama función explícita).

$$y = 3x - 6$$

Pero puede ocurrir que la variable “y” no se encuentra despejada, en este caso se está en presencia de una función implícita,

$$y - 4x^5 + 3x^2 = 0$$

y mediante un despeje sencillo, se despeja la “y” y se procede entonces a derivar a la función dependiendo sea el caso. O se puede primero derivar la función con respecto a “y” y luego despejar la derivada.

EJEMPLO:

Sea la función:

$$y - 4x^5 + 3x^2 = 0$$

Despejando a “y”, se tiene

$$y = 4x^5 - 3x^2$$

Ahora se deriva la función y se obtiene:

$$y' = 20x^4 - 6x$$

También se puede derivar implícitamente a la función.

EJEMPLO:

Hallar y' en la función: $4x^2 + 5y^2 = 36$

Se deriva cada término por separado:

$$(4x^2)' + (5y^2)' = (36)'$$

Quedando:

$$8x + 10y \cdot y' = 0$$

Ahora se despeja a y'

$$10y \cdot y' = -8x \rightarrow y' = \frac{-8x}{10y} \rightarrow y' = -\frac{4x}{5y}$$

EJEMPLO:

Hallar y' en la función $2xy + y^2 = 3$

Derivando implícitamente:

$$(2xy)' + (y^2)' = (3)'$$

$$(y)(2x)' + (2x)(y)' + (2yy') = 0$$

$$2y + 2xy' + 2yy' = 0 \rightarrow 2xy' + 2yy' = -2y$$

$$y'(2x + 2y) = -2y \rightarrow y' = -\frac{2y}{2x + 2y} \rightarrow y' = -\frac{y}{x + y}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Hallar la derivada implícita en las siguientes funciones:

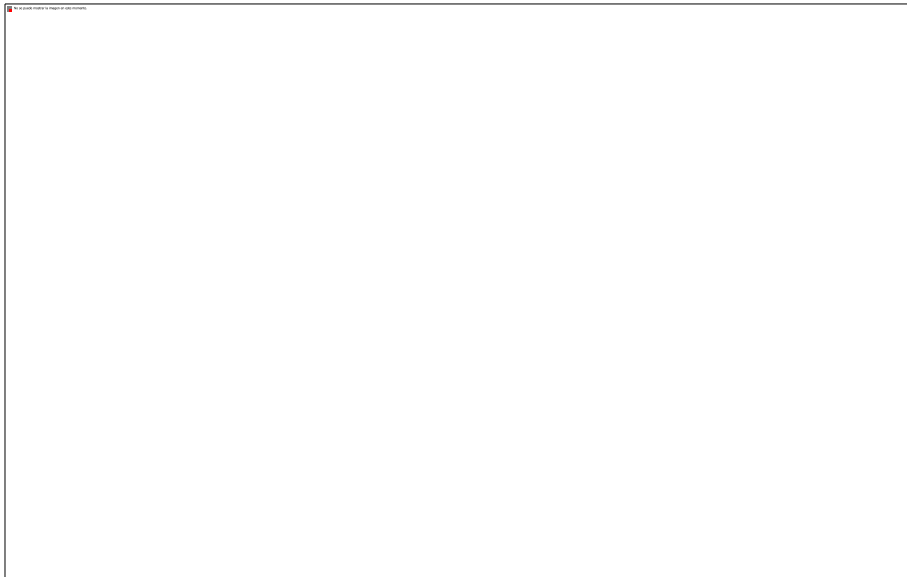
2. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{a^2}$
3. $4x^3 + y^2 - 3x^2 \cdot y + y = 1$
4. $\log(2x - y) - \log(\quad)x - 2y + 2 = 0$

5. DERIVADAS SUCESIVAS

Son las derivadas de una función después de la segunda derivada. El proceso para calcular las derivadas sucesivas es el siguiente: se tiene una función y , la cual podemos derivar y obtener así la función derivada y' . A dicha derivada de y podemos volver a derivarla, obteniendo y'' .

Esta nueva función se denomina segunda derivada; todas las derivadas calculadas a partir de la segunda son sucesivas; estas, llamadas también de orden superior, poseen grandes aplicaciones, como dar información sobre el

trazo de la gráfica de una función, la prueba de la segunda derivada para extremos relativos y la determinación de series infinitas.



EJEMPLO:

Hallar la segunda derivada de:

$$y = 2x^4 - 3x^3 + 2x$$

Se halla la primera derivada:

$$y' = 8x^3 - 9x^2 + 2$$

Se vuelve a derivar para obtener:

$$y'' = 24x^2 - 18x$$

EJEMPLO:

Hallar la tercera derivada de:

$$y = x^5 - 2x^4 + 3x^2 - 1$$

Se halla la primera derivada:

$$y' = 5x^4 - 8x^3 + 6x$$

Ahora la segunda derivada:

$$y'' = 20x^3 - 24x^2 + 6$$

Y por última la tercera derivada que es la que se pide en el ejercicio:

$$y''' = 60x^2 - 48x$$

EJEMPLO:

Hallar la segunda derivada de la función:

$$y = x(x - 1)^3$$

Se halla la primera derivada:

$$y' = x \cdot [(x - 1)^3]' + (x - 1)^3 \cdot (x)'$$

$$y' = x \cdot [3(x - 1)^2](x - 1)' + (x - 1)^3(1)$$

$$y' = 3x \cdot (x - 1)^2 + (x - 1)^3$$

Sacando factor común:

$$y' = (x - 1)^2 [3x + (x - 1)] \rightarrow y' = (x - 1)^2 [3x + x - 1]$$

$$y' = (x - 1)^2 (4x - 1)$$

Ahora de calcula la segunda derivada:

$$y'' = (x - 1)^2 [(4x - 1)]' + (4x - 1) [(x - 1)^2]'$$

$$y'' = (x - 1)^2 (4) + (4x - 1) [2(x - 1)](x - 1)'$$

$$y'' = 4(x - 1)^2 + 2(4x - 1)(x - 1) \rightarrow y'' = 2(x - 1) [2(x - 1) + (4x - 1)]$$

$$y'' = 2(x - 1) [2x - 2 + 4x - 1] \rightarrow y'' = 2(x - 1) (6x - 3)$$

$$y'' = 6(x - 1) (2x - 1)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

1.- Hallar y'' en la función: $y = x^4 - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 1$

2.- Hallar y''' en la función: $y = \frac{x^2}{x+1}$

3.- Hallar todas las derivadas sucesivas de la función:

$$y = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

1. DERIVADAS ENÉSIMAS

En algunos casos, podemos encontrar una fórmula general para cualquiera de las derivadas sucesivas (y para todas ellas). Esta fórmula recibe el nombre de derivada enésima, $f^{(n)}(x)$

EJEMPLO:

$$\text{Sea } y = \frac{1}{x}$$

Entonces:

$$y' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y'' = \frac{1 \cdot 2}{x^3} = \frac{2!}{x^3}$$

$$y''' = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4} = -\frac{3!}{x^4}$$

Por observación se puede deducir la derivada enésima:

$$y^{(n)} = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

EJEMPLO:

$$y = \ln x$$

Derivando sucesivamente:

$$y' = \frac{1}{x}$$

$$y'' = -\frac{1}{x^2}$$

$$y''' = \frac{1 \cdot 2}{x^3} = \frac{2!}{x^3}$$

$$y^{iv} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4} = -\frac{2 \cdot 3!}{x^4}$$

Deduciendo la derivada enésima:

$$y^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

EJEMPLO:

$$y = e^{-3x}$$

Derivando sucesivamente:

$$y' = -3e^{-3x}$$

$$y'' = 9e^{-3x}$$

$$y''' = -27e^{-3x}$$

Deduciendo la derivada enésima:

$$y^{(n)}(x) = (-3)^n \cdot e^{-3x}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Hallar la derivada enésima de las siguientes funciones:

1. $y = 5x^3 - x^2 + 3x + 7$
2. $y = e^{\cos x}$
3. $y = \ln(3x^2)$

UNIDAD III

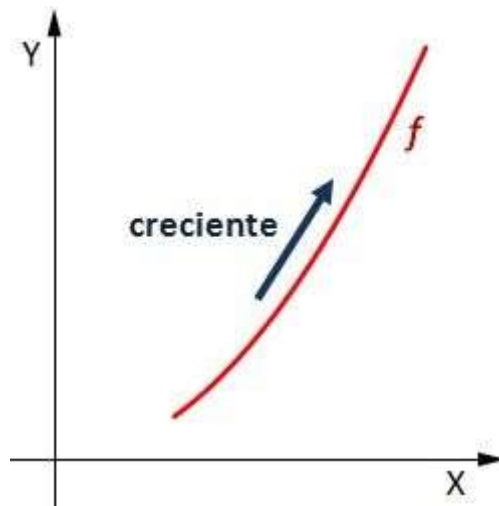
OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1. Considerará la derivada para decidir cuándo una función es creciente o decreciente.
2. Aplicará las técnicas de derivación para estudiar la concavidad y puntos de inflexión así como obtener los puntos críticos, máximos y mínimos de una función.

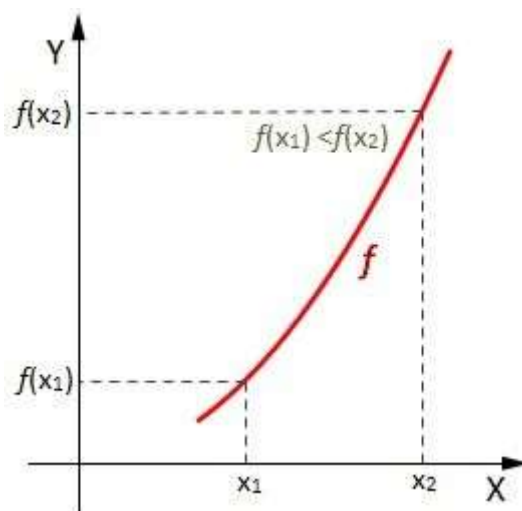
3.- CARACTERÍSTICAS DE LAS FUNCIONES DE VARIABLES REALES

3.1.- FUNCIÓN CRECIENTE

Una función creciente f es una función tal que al **aumentar la variable independiente x , aumenta la variable dependiente y .**



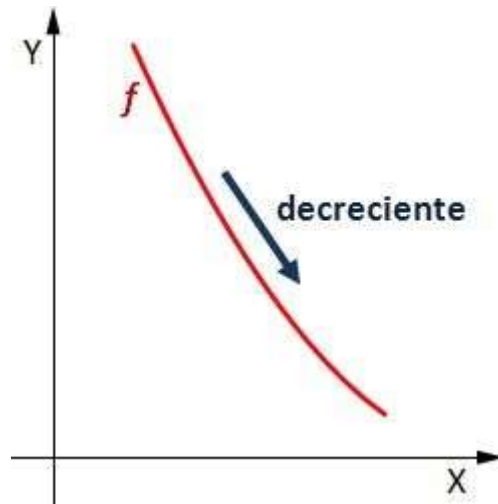
Es decir, la función f es creciente si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del dominio tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) \leq f(x_2)$.



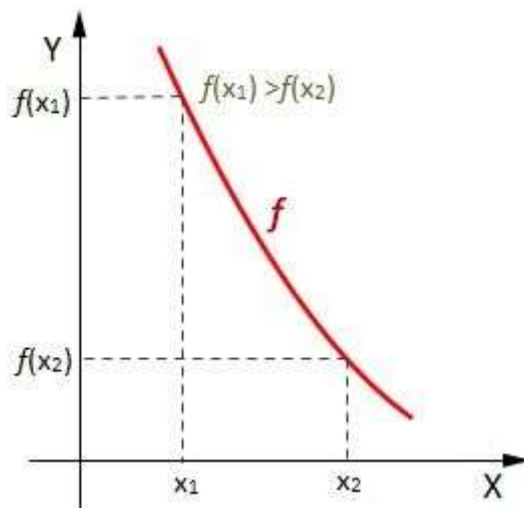
La función es estrictamente creciente en todo su dominio si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) < f(x_2)$.

3.2.- FUNCIÓN DECRECIENTE

Una función decreciente f es una función tal que al **aumentar la variable independiente x** , **disminuye la variable dependiente y** .



Es decir, la función f es decreciente si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del dominio tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) \geq f(x_2)$.



También se puede estudiar el decrecimiento a partir de la derivada. Una función f es decreciente si para todo punto x del dominio la derivada es negativa, es decir $f'(x) \leq 0$.

La función es estrictamente decreciente en todo su dominio si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) > f(x_2)$.

3.3.- ESTUDIO DE LAS FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

1. Si una función $y = f(x)$ tiene una derivada positiva en un punto (x_1) , es creciente en dicho punto.
2. Si una función $y = f(x)$ tiene una derivada negativa en un punto (x_1) , es decreciente en dicho punto.

3.4.- INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento explican los trozos del dominio en los que la función crece o decrece.

Para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento se realizará el siguiente procedimiento.

1. Derivar la función, obteniendo y' .
2. Hallar las raíces de la derivada, es decir, los x tales que la derivada sea 0.

$$y' = 0$$

3. Crear intervalos abiertos con extremos las raíces de f' .

Por ejemplo, si una función está definida en todos los números reales (es decir, en $(-\infty, +\infty)$) y tiene como raíces el 1 y el 3, entonces los intervalos a estudiar serían $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, +\infty)$.

4. Estudiar el signo que toma la derivada en un valor interior de cada intervalo, de manera que:

$$\text{Si } y' > 0 \rightarrow f \text{ es creciente}$$

$$\text{si } y' < 0 \rightarrow f \text{ es decreciente}$$

Por ejemplo, si $y'(2) < 0$, que es un punto interior de $(1, 3)$, entonces la función es decreciente en dicho intervalo.

5. A partir del paso anterior, obtenemos todos los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

EJEMPLO:

Sea la función f definida en los números reales (intervalo $(-\infty, +\infty)$):

$$y = x^3 - 3x^2 + 3$$

Hay que estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento que tiene.

6. Se deriva la función, obteniendo y' .

$$y' = 3x^2 - 6x$$

1. Se hallan las raíces de la derivada:

$$y' = 3x^2 - 6x \rightarrow y' = 3x(x - 2) \rightarrow \text{las raíces son } x = 0 \text{ y } x = 2$$

2. Los **intervalos abiertos** con extremos las raíces de y' serán:

$$(-\infty, 0), \quad (0, 2) \quad \text{y} \quad (2, \infty)$$

3. Se estudia el **signo** que toma la derivada en los valores interiores de cada **intervalo**, por ejemplo en el -1, el 1 y el 3:

$$y' = 3(-1)^2 - 6(-1) \rightarrow y' = 3 + 6 \rightarrow y' = 9 > 0$$

$$y' = 3(1)^2 - 6(1) \rightarrow y' = 3 - 6 \rightarrow y' = -3 < 0$$

$$y' = 3(3)^2 - 6(3) \rightarrow y' = 27 - 18 \rightarrow y' = 9 > 0$$

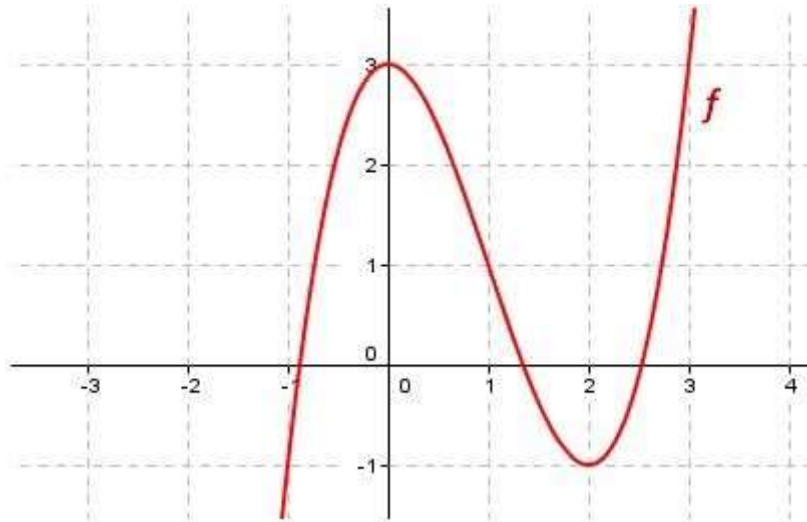
4. Por consiguiente:

y es creciente en el intervalo $(-\infty, 2)$

y es decreciente en el intervalo $(0, 2)$

y es creciente en el intervalo $(2, \infty)$

Graficando, se obtiene



EJEMPLO:

Sea la función f definida en los números reales (intervalo $(-\infty, +\infty)$):

$$y = x^3 + 2x^2 + 1$$

Estudiando los intervalos de crecimiento y decrecimiento que tiene.

5. Se deriva la función, obteniendo y' .

$$y' = 3x^2 + 4x$$

6. Se hallan las raíces de la derivada:

$$y' = x(3x + 4) \rightarrow x(3x + 4) = 0$$

Las raíces son:

$$x = 0 \quad y \quad x = -\frac{4}{3}$$

Los **intervalos abiertos** con extremos las raíces de y' serán:

$$\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right), \quad \left(-\frac{4}{3}, 0\right) \quad y \quad (0, \infty)$$

7. Se estudia el **signo** que toma la derivada en los valores interiores de cada **intervalo**:

$$y' = 3(-2)^2 + 4(-2) \rightarrow y' = 12 - 8 \rightarrow y' = 4 > 0$$

$$y' = 3(-1)^2 + 4(-1) \rightarrow y' = 3 - 4 \rightarrow y' = -1 < 0$$

$$y' = 3(1)^2 + 4(1) \rightarrow y' = 3 + 4 \rightarrow y' = 7 > 0$$

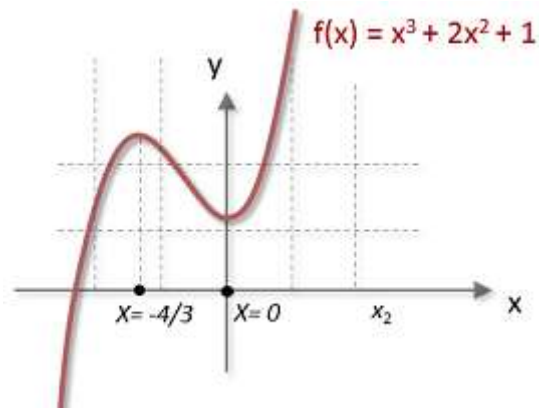
8. Por consiguiente:

y es creciente en el intervalo $\left(-\infty, -\frac{4}{3}\right)$

y es decreciente en el intervalo $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$

y es creciente en el intervalo $(0, \infty)$

Graficando



EJERCICIOS PROPUESTOS:

Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

9. $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$

10. $y = -x^2 + 6x + 3$

11. $y = \frac{2}{x}$

3.5.- CALCULO DE ESTREMOS RELATIVOS (MÁXIMOS Y MÍNIMOS) DE UNA FUNCIÓN

Los extremos relativos (máximos, mínimos y puntos de inflexión), **pueden ser** los puntos que hagan que la derivada primera de la función sea igual a cero:

$$y' = 0$$

Estos puntos serán los candidatos a ser un máximo, un mínimo un punto de inflexión, pero para ello, deben cumplir una segunda condición, que es la que se indica a continuación.

Cómo saber si un punto es un máximo, un mínimo o un punto de inflexión

Una vez que hemos obtenido los puntos para los cuales, la derivada primera de la función es igual a cero, para cada punto se debe comprobar lo siguiente:

1. Si el valor de la segunda derivada en ese punto es **mayor que cero**, entonces ese punto es **mínimo**:

Si $y'' > 0 \rightarrow$ entonces hay un mínimo en ese punto

2. Si el valor de la segunda derivada en ese punto es **menor que cero**, entonces ese punto es **máximo**:

Si $y'' < 0 \rightarrow$ entonces hay un máximo en ese punto

3. Si la derivada segunda en ese punto es **igual a cero**, entonces ese punto es un **punto de inflexión**, siempre y cuando **la tercera derivada en ese punto sea distinta de cero**:

Si $y'' = 0 \rightarrow$ entonces hay un punto de inflexión $\leftrightarrow y''' \neq 0$

EJEMPLO:

Obtener los extremos relativos de la siguiente función:

$$y = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x$$

En primer lugar, hay que obtener los posibles extremos relativos, obteniendo la primera derivada de la función e igualándola a 0.

La derivada primera de la función es:

$$y' = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24$$

Se iguala a cero para obtener los puntos que cumplen esa condición:

$$12x^3 + 24x^2 - 12x - 24 = 0$$

Para resolver la ecuación, se simplifica previamente:

$$12(x^3 + 2x^2 - x - 2) = 0$$

Como es una ecuación de tercer grado, se descomponen en factores por la regla de Ruffini:

$$(x - 1) \cdot (x + 1) \cdot (x + 2) = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$x_1 = 1, x_2 = -1 \text{ y } x_3 = -2$$

Que corresponden a posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión.

Ahora hay que comprobar a qué corresponde cada punto, estudiando el signo de la segunda derivada. Por lo que hay que obtener la segunda derivada de la función:

$$y'' = 36x^2 + 48x - 12 \rightarrow y'' = 12(3x^2 + 4x - 1)$$

Y se calcula el valor de la segunda derivada para cada uno de los valores que se calcularon y que hacen que la primera derivada sea igual a cero

$$x_1 = 1, x_2 = -1 \text{ y } x_3 = -2$$

Se empieza calculando el valor de la segunda derivada para $x = -2$

$$y'' = 3(-2)^2 + 4(-2) - 1 \rightarrow y'' = 12 - 8 - 1 \rightarrow y'' = 3$$

El resultado es mayor que cero, por tanto en

$$x = -2 \text{ hay un mínimo}$$

Se calcula ahora para el siguiente valor $x = -1$

$$y'' = 3(-1)^2 + 4(-1) - 1 \rightarrow y'' = 3 - 4 - 1 \rightarrow y'' = -2$$

El resultado es menor que cero, por tanto en

$$x = -2 \rightarrow \text{hay un máximo}$$

y por último, se calcula el otro valor de $x = 1$

$$y'' = 3(1)^2 + 4(1) - 1 \rightarrow y'' = 3 + 4 - 1 \rightarrow y'' = 6$$

El resultado es mayor que cero, por tanto en

$$x = 1 \rightarrow \text{hay un mínimo}$$

Con los valores de x obtenidos a partir de igualar la primera derivada a cero, no se ha obtenido ningún valor de $y'' = 0$, es decir no se ha encontrado ningún punto de inflexión.

EJEMPLO:

Obtener los extremos relativos de la siguiente función:

$$y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$$

En primer lugar, hay que obtener los posibles extremos relativos, obteniendo la primera derivada de la función e igualándola a 0.

La derivada primera de la función es:

$$y' = 3x^2 - 18x + 15$$

Se iguala a cero para obtener los puntos que cumplen esa condición:

$$3x^2 - 18x + 15 = 0$$

Para resolver la ecuación, se simplifica previamente:

$$3(x^2 - 6x + 5) = 0$$

$$(x - 1) \cdot (x - 5) = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$x_1 = 1 \text{ y } x_2 = 5$$

Que corresponden a posibles máximos, mínimos o puntos de inflexión.

Ahora hay que comprobar a qué corresponde cada punto, estudiando el signo de la segunda derivada. Por lo que hay que obtener la segunda derivada de la función:

$$y'' = 6x - 18$$

Y se calcula el valor de la segunda derivada para cada uno de los valores que se calcularon y que hacen que la primera derivada sea igual a cero

$$x_1 = 1 \text{ y } x_2 = 5$$

Se empieza calculando el valor de la segunda derivada para $x = 1$

$$y'' = 6(1) - 18 \rightarrow y'' = 6 - 18 \rightarrow y'' = -12 < 0$$

El resultado es menor que cero, por tanto en

$$x = -15 \rightarrow \text{hay un máximo}$$

Se calcula ahora para el siguiente valor $x = 5$

$$y'' = 6(5) - 18 \rightarrow y'' = 30 - 18 \rightarrow y'' = 12 > 0$$

El resultado es mayor que cero, por tanto en

$$x = 5 \rightarrow \text{hay un mínimo}$$

Con los valores de x obtenidos a partir de igualar la primera derivada a cero, no se ha obtenido ningún valor de $y'' = 0$, es decir no se ha encontrado ningún punto de inflexión.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Hallar los extremos relativos (máximos y mínimos) de las siguientes funciones:

4. $y = -2x^2 - 3x + 1$

5. $y = -x^3 + 4x - 1$

6. $y = x^2 - 5x + 6$

3.6.- CONCAVIDAD Y CONVEXIDAD DE UNA FUNCIÓN

Una función será **cóncava** en un intervalo cuando el valor de la derivada segunda de un punto de ese intervalo sea **mayor que cero**:

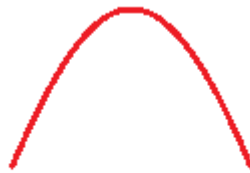
Si y'' en un punto es $> 0 \rightarrow y$ es cóncava en ese punto



Cóncava

Una función será **convexa** en un intervalo cuando el valor de la derivada segunda de un punto de ese intervalo sea **menor que cero**:

Si y'' en un punto es $< 0 \rightarrow y$ es convexa en ese punto



Convexa

En los puntos de inflexión, la función cambia de cóncava a convexa o viceversa.

EJEMPLO:

Calcular los intervalos donde la siguiente función es cóncava o convexa:

$$y = 3x^4 + 8x^3 - 6x^2 - 24x$$

Ahora hay que estudiar el signo de la segunda derivada de la función. Por tanto, hay a calcular la segunda derivada.

La primera derivada es:

$$y' = 12x^3 + 24x^2 - 12x - 24$$

Y la segunda derivada:

$$y'' = 36x^2 + 48x - 12 \quad (\text{factorizando}) \rightarrow y'' = 12(3x^2 + 4x - 1)$$

Ahora hay a calcular para ver en qué intervalos la derivada segunda es mayor o menor que cero.

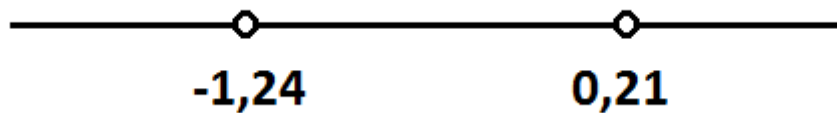
Para ello, se iguala la segunda derivada a cero:

$$3x^2 + 4x - 1 = 0$$

Y se resuelve la ecuación, cuyos resultados son:

$$x_1 = 0,21 \quad y \quad x_2 = -1,24$$

Colocando esos valores en la recta numérica:



Se tienen 3 intervalos:

1. Desde menos infinito hasta -1,24 $(-\infty, -1,24)$
2. Desde -1,24 hasta 0,21 $(-1,24; 0,21)$
3. Desde 0,21 hasta infinito $(0,21; \infty)$

¿Cómo saber si y'' es positiva o negativa en cada intervalo?

Para cada intervalo, se elige un punto que pertenezca a cada intervalo y se calcula el valor de y'' en ese punto.

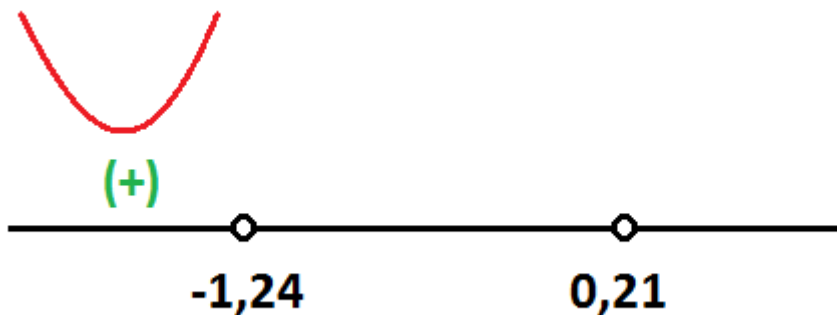
Para el intervalo comprendido entre el menos infinito y el -1,24, se puede tomar el punto $x = -2$. Calculando:

$$y'' = 3(-2)^2 + 4(-2) - 1 \rightarrow y'' = 12 - 8 - 1 \rightarrow y'' = 3$$

El resultado es mayor que cero, por lo tanto, la función será cóncava en el intervalo que va desde menos infinito hasta -1,24:

$$y'' = 3 > 0 \rightarrow y'' \text{ es cóncava en } (-\infty, -1,24)$$

Representado en la recta:



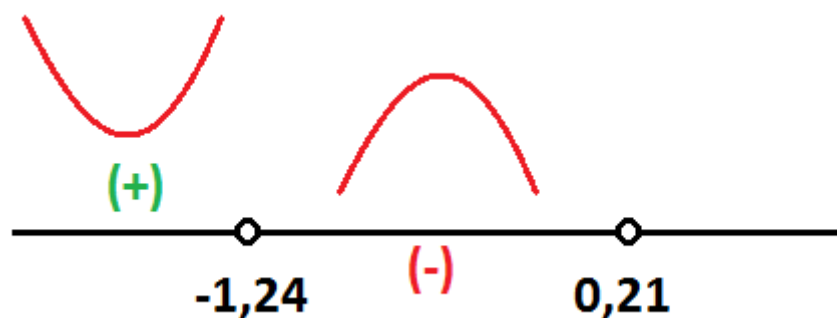
Ahora se busca en el intervalo que va desde -1,24 hasta 0,21. Tomando como punto $x = 0$, el valor de y'' para ese punto será:

$$y'' = 3(0)^2 + 4(0) - 1 \rightarrow y'' = 0 + 0 - 1 \rightarrow y'' = -1$$

Es menor que cero, por lo que la función es convexa en ese intervalo.

$$y'' = -1 < 0 \rightarrow y'' \text{ es convexa en } (-1,24; 0,21)$$

Representado en la recta:



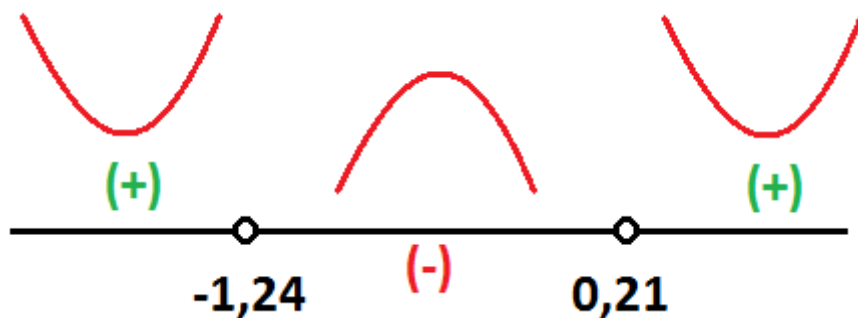
Para el tercer intervalo, se puede el punto $x = 1$:

$$y'' = 3(1)^2 + 4(1) - 1 \rightarrow y'' = 3 + 4 - 1 \rightarrow y'' = 6$$

La derivada segunda en ese intervalo es mayor que cero, por lo que la función será cóncava:

$$y'' = 6 > 0 \rightarrow y'' \text{ es cóncava en } (0,21; \infty)$$

Cuya representación en la recta es:



Ya se tienen los tres intervalos de la función definidos en cuanto a concavidad y convexidad se refiere.

EJEMPLO:

Calcular los intervalos donde la siguiente función es cóncava o convexa:

$$y = x^4 - 6x^2 + 4$$

Ahora hay que estudiar el signo de la segunda derivada de la función. Por tanto, hay a calcular la segunda derivada.

La primera derivada es:

$$y' = 4x^3 + 12x$$

Y la segunda derivada:

$$y'' = 12x^2 - 12 \text{ (factorizando)} \rightarrow y'' = 12(x^2 - 1)$$

Ahora hay a calcular para ver en qué intervalos la derivada segunda es mayor o menor que cero.

Para ello, se iguala la segunda derivada a cero:

$$12(x^2 - 1) = 0$$

Y se resuelve la ecuación, cuyos resultados son:

$$x_1 = 1 \text{ y } x_2 = -1$$

Colocando esos valores en la recta numérica:



Se tienen 3 intervalos:

4. Desde menos infinito hasta -1 $(-\infty, -1)$
5. Desde -1 hasta 1 $(-1, 1)$
6. Desde 1 hasta infinito $(1, \infty)$

Para cada intervalo, se elige un punto que pertenezca a cada intervalo y se calcula el valor de y'' en ese punto.

Para el intervalo comprendido entre el menos infinito y el -1, se puede tomar el punto $x = -2$. Calculando:

$$y'' = 12(-2)^2 - 12 \rightarrow y'' = 48 - 12 \rightarrow y'' = 36$$

El resultado es mayor que cero, por lo tanto, la función será cóncava en el intervalo que va desde menos infinito hasta -1,24:

$$y'' = 36 > 0 \rightarrow y'' \text{ es cóncava en } (-\infty, -1)$$

Representado en la recta:



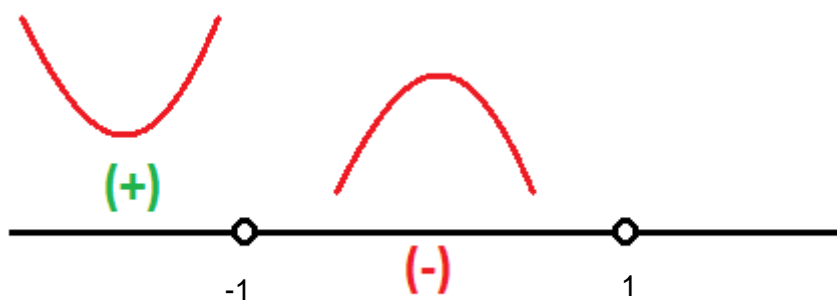
Ahora se busca en el intervalo que va desde -1 hasta 1. Tomando como punto $x = 0$, el valor de y'' para ese punto será:

$$y'' = 12(0)^2 - 12 \quad \rightarrow \quad y'' = 0 - 12 \quad \rightarrow \quad y'' = -12$$

Es menor que cero, por lo que la función es convexa en ese intervalo.

$$y'' = -12 < 0 \quad \rightarrow \quad y'' \text{ es convexa en } (-1, 1)$$

Representado en la recta:



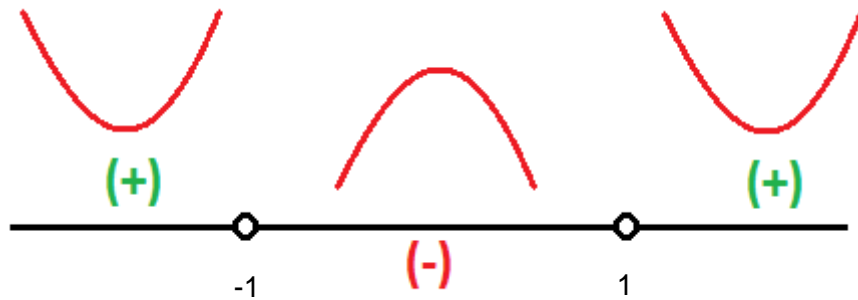
Para el tercer intervalo, se puede el punto $x = 2$:

$$y'' = 12(2)^2 - 12 \quad \rightarrow \quad y'' = 48 - 12 \quad \rightarrow \quad y'' = 36$$

La derivada segunda en ese intervalo es mayor que cero, por lo que la función será cóncava:

$$y'' = 36 > 0 \rightarrow y'' \text{ es cóncava en } (1, \infty)$$

Cuya representación en la recta es:



Ya se tienen los tres intervalos de la función definidos en cuanto a concavidad y convexidad se refiere.

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Calcular los intervalos donde las siguientes funciones son cóncavas o convexas:

1. $y = -2x^3 + 3x^2 + 2$
2. $y = -\frac{x^2}{3} + 2x - 1$
3. $y = x^3 + 2x$

3.7.- PUNTOS DE INFLEXIÓN:

Los puntos de inflexión de una curva, son aquellos que separan un arco cóncavo de otro convexo, o viceversa. En ellos la tangente atraviesa la curva.

1. CÁLCULO DE LOS PUNTOS DE INFLEXIÓN:

1.- Se halla la segunda derivada de la función, se iguala a cero y se resuelve la ecuación resultante.

2.- Se halla la tercera derivada y se calcula el valor numérico para los valores de "x" iguales a las raíces reales de la segunda derivada.

3.- Si el valor numérico de la tercera derivada es diferente de cero, hay un punto de inflexión. Si da igual a cero, no se sabe.

EJEMPLO:

Hallar los puntos de inflexión de la función: $y = x^3 - 10$

1.- Se halla la segunda derivada:

$$y' = 3x^2 \rightarrow y'' = 6x$$

Se iguala a cero: $6x = 0$, se resuelve la ecuación

$$6x = 0 \rightarrow x = 0$$

2. Se halla la tercera derivada:

$y''' = 6 \neq 0$, por lo tanto hay un punto de inflexión para $x = 0$

EJEMPLO:

Hallar las coordenadas de los puntos de inflexión de la función:

$$y = x^4 - 6x^2 - 2$$

1.- Se halla la segunda derivada, se iguala a cero y se resuelve la ecuación:

$$y' = 4x^3 - 12x$$

$$y'' = 12x^2 - 12 \rightarrow 12x^2 - 12 = 0 \rightarrow 12(x^2 - 1) = 0$$

$$x = \pm 1$$

2.- Se halla la tercera derivada y se calcula su valor numérico para las raíces obtenidas:

$$y''' = 24x$$

$$y''' = 24(1) \rightarrow y''' = 24 \neq 0 \rightarrow \text{hay punto de inflexión}$$

$$y''' = 24(-1) \rightarrow y''' = -24 \neq 0 \rightarrow \text{hay punto de inflexión}$$

3.- Para calcular las coordenadas de los puntos de inflexión, se sustituyen los valores de x, en la función:

Para

$$x = 1 \rightarrow y = (1)^4 - 6(1)^2 - 2 \rightarrow y = 1 - 6 - 2 \rightarrow y = -7 \\ \rightarrow \text{coordenadas } (1, -7)$$

Para

$$x = -1 \rightarrow y = (-1)^4 - 6(-1)^2 - 2 \rightarrow y = 1 - 6 - 2 \rightarrow y = -7 \\ \rightarrow \text{coordenadas } (-1, -7)$$

EJERCICIOS PROPUESTOS:

Hallar los valores de "x" para los cuales las siguientes funciones tienen puntos de inflexión:

2. $y = -x^3 + 3x$

3. $y = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{6} - x$

4. $y = x^4 - 10x^2 + 2$

3.8.- ASÍNTOTAS: VERTICAL, HORIZONTAL Y OBLICUA.

Una asíntota es una recta a la cual la gráfica de la función se va acercando cada vez más, pero que nunca llega a tocar, aunque teóricamente se dice que se tocan en el infinito.

Existen tres tipos de asíntotas: asíntotas horizontales, asíntotas verticales y asíntotas oblicuas.

ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Las asíntotas horizontales son rectas horizontales que la función nunca llega a tocar.

Existirá una asíntota horizontal cuando el límite de la función cuando x tienda a infinito, sea igual a un número k determinado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = k$$

En ese caso, en $y = k$, habrá una asíntota horizontal:

$$y = k \rightarrow \textit{Asíntota horizontal}$$

De la misma forma, cuando el límite de la función cuando x tiende a menos infinito sea igual a un número determinado, también existirá una asíntota horizontal:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$$

$$y = k \rightarrow \textit{Asíntota horizontal}$$

Si cada límite da como resultado un número distinto, entonces es que esa función tiene **dos asíntotas horizontales**.

Ese número que da como resultado el límite, tiene que ser un número finito y por tanto, nunca puede ser más o menos infinito:

$$k \neq \pm \infty$$

En el caso de que los límites anteriores den como resultado más o menos infinito, no existirán asíntotas horizontales.

ASÍNTOTAS VERTICALES

Las asíntotas verticales son rectas verticales a las que cada vez la función se acerca más, pero nunca llegará a tocar.

Existirá una asíntota vertical cuando el límite de la función cuando x tiende a un número de como resultado más o menos infinito:

$$\lim_{x \rightarrow k} f(x) = \pm \infty$$

En ese caso, habrá una asíntota vertical en $x = k$:

$$x = k \rightarrow \text{asíntota vertical}$$

¿Y cuál es ese número k con el que hay que calcular el límite para hallar la asíntota vertical?

El número con el que se calculan las asíntotas verticales es el número para el cuál el dominio de la función no está definido, es decir, el número que no pertenezca al dominio.

Puede ser que más de un número no pertenezca al dominio por tanto, la función tendrá más de una asíntota vertical.

Para calcular las asíntotas verticales se utilizan los límites laterales, que no es necesario que ambos límites laterales tengan el mismo resultado para que existe una asíntota vertical, al contrario que ocurre si se quiere comprobar si existe el límite de la función cuando “ x ” tiende a un punto.

Por ejemplo, si en un punto, un límite lateral da $+$ infinito y el otro $-$ infinito, existirá una asíntota vertical, pero no existirá el límite de la función en ese punto.

ASÍNTOTAS OBLICUAS:

Las asíntotas oblicuas solo se calculan en el caso de que no existan asíntotas horizontales.

Igual que los otros dos tipos de asíntotas, las asíntotas oblicuas son rectas oblicuas, a las que la función se va acercando cada vez más, pero que nunca llega a tocar.

Al ser una recta oblicua, tiene esta forma

$$y = mx + n$$

Y se trata de calcular coeficientes para m y n para hallar la ecuación de la recta.

Para calcular el coeficiente " m " se utiliza la siguiente fórmula:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

Para que exista la asíntota oblicua, m no puede ser igual a cero, ya que si $m = 0$, la asíntota sería horizontal.

$$m \neq 0$$

El coeficiente m tampoco puede ser infinito, porque si no la asíntota sería vertical

$$m \neq \infty$$

El coeficiente n se calcula con la fórmula siguiente:

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - m \cdot x]$$

Y finalmente, una vez obtenidos los valores de los coeficientes m y n , ya se tendría la ecuación de la recta que define a la asíntota oblicua:

$$y = mx + n \rightarrow \text{asíntota oblicua}$$

EJEMPLO:

Calcular las asíntotas de la siguiente función:

$$y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

CÁLCULO DE ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Se calcula el límite de la función cuando x tiende a infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Se Sustituye la x por infinito y se llega al resultado de la indeterminación infinito sobre infinito:

$$\frac{\infty^2 + 1}{\infty^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{indeterminación}$$

Se queda con el término de mayor grado y para obtener el resultado del límite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Por tanto, en $y = 1$ hay una asíntota vertical:

$$y = 1 \rightarrow \text{asíntota horizontal}$$

Se Calcula también el límite de cuando x tiende a menos infinito:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Se sustituye la x por menos infinito y dando una indeterminación:

$$\frac{(-\infty)^2 + 1}{(-\infty)^2 - 1} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \text{indeterminación}$$

Se resuelve y llegando al mismo resultado que antes:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Por tanto, sólo se tien una asíntota horizontal que está en $y = 1$:

$$y = 1 \rightarrow \text{asíntota horizontal}$$

CÁLCULO DE ASÍNTOTAS VERTICALES

Para calcular las asíntotas verticales, antes se debw saber cuál es el dominio de la función. El dominio de la función es:

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$$

Los números que no pertenecen al dominio, son con los que se tiene que calcular el límite, es decir, 1 y -1.

Se empieza calculando el límite de la función cuando x tiende a 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Se sustituye la x por 1 y llegando a la indeterminación de un número entre cero, que no se sabe si es infinito o menos infinito:

$$\frac{1^2 + 1}{1^2 - 1} = \frac{2}{0} = \pm \infty ?$$

Se empieza calculando el límite de la función cuando x tiende a 1 por la izquierda cuyo resultado es - infinito:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{-0} = -\infty$$

Calculando el límite cuando x tiende a 1 por la derecha, cuyo resultado es + infinito

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{+0} = \infty$$

Cuando ambos resultados son $\pm\infty$, el $x = 1$. Hay una asíntota vertical

$$x = 1 \rightarrow \text{Asíntota vertical}$$

Como se ha dicho antes, los límites no coinciden y no existe el límite cuando x tiende a 1 pero si existe la asíntota vertical.

Ahora se coloca el otro número que no pertenece al dominio: el -1

Se calcula el límite de la función cuando x tiende a -1

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

Se sustituye la x por el -1 y se obtiene una indeterminación de un número entre cero

$$\frac{(-1)^2 + 1}{(-1)^2 - 1} = \frac{2}{0} = \pm \infty ?$$

Se resuelve la indeterminación de este límite utilizando los límites laterales. Calculando el límite cuando x tiende a -1 por la izquierda y cuyo resultado es + infinito

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{+0} = +\infty$$

Se calcula el límite cuando x tiende a -1 por la derecha, cuyo resultado es $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2}{-0} = -\infty$$

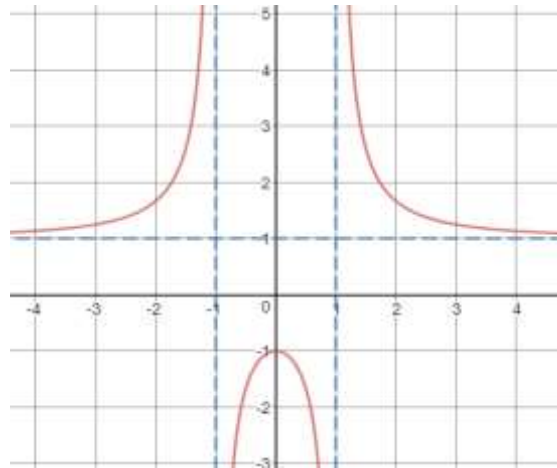
Igual que antes, los límites no coinciden, pero como ambos dan como resultado $\pm\infty$, entonces en $x = 1$, hay una asíntota vertical

$$x = 1 \rightarrow \text{Asíntota Vertical}$$

CÁLCULO DE ASÍNTOTAS OBLICUAS

En este caso, al existir asíntota horizontal, directamente no existe la asíntota oblicua.

Si se representa gráficamente la función y sus asíntotas queda de la siguiente manera, representando en color rojo la función y en color azul los trazos de las asíntotas horizontales y verticales. Se puede apreciar como la función se acerca a las asíntotas pero nunca las llega a tocar.



EJEMPLO:

Hallar las asíntotas de la siguiente función

$$y = \frac{x^2 + 2}{x - 3}$$

Cálculo de las asíntotas horizontales

Se calcula el límite de la función cuando x tiende a infinito

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x - 3}$$

Se sustituye la x por el infinito y se obtiene una indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x - 3} = \frac{\infty^2 + 2}{\infty - 3} = \frac{\infty}{\infty} = \text{indeterminación}$$

Se resuelve la indeterminación y se obtiene como resultado infinito:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$$

Luego con infinito, no se ha encontrado ninguna asíntota horizontal.

Se calcula el límite de la función cuando x tiende a menos infinito y el resultado es menos infinito.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2}{x - 3} = -\infty$$

Como ninguno de los dos límites ha dado como resultado un número infinito, la función no tiene asíntotas horizontales.

Cálculo de las asíntotas verticales

Para calcular las asíntotas verticales, se calcula el dominio de la función que es:

$$\text{Dom } y = \mathbb{R} - \{3\}$$

El número que no pertenece al dominio es el posible candidato a ser una asíntota vertical, que en este caso es el 3.

Se calcula el límite de la función cuando x tiende a 3.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2}{x - 3}$$

Se sustituye la x por el 3 y se llega a una indeterminación de número entre cero

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2}{x - 3} = \frac{3^2 + 2}{3 - 3} = \frac{11}{0} = \pm\infty$$

Se calculan los límites laterales

El límite cuando x tiene a 3 por la izquierda, cuyo resultado es menos infinito:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 + 2}{x - 3} = \frac{11}{-0} = -\infty$$

El límite cuando x tiene a 3 por la derecha, cuyo resultado es más infinito:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 + 2}{x - 3} = \frac{11}{+0} = +\infty$$

El resultado de los límites laterales no coincide, pero como ambos dan como resultado más o menos infinito, entonces en $x = 3$ hay una asíntota vertical

$$x = 3 \rightarrow \text{asíntota vertical}$$

Cálculo de asíntotas oblicuas

Como la función no tiene asíntotas horizontales, tendrá asíntotas oblicuas cuya ecuación será:

$$y = mx + n$$

Se calculan entonces los coeficientes m y n .

Para calcular m , se utiliza la fórmula:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$$

Se sustituye y en la función, y queda

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2 + 2}{x - 3}}{x}$$

Operando realizando la división de fracciones y multiplicando en el denominador:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3x}$$

Ahora se sustituye la x por infinito y se llega a la indeterminación:

$$\frac{\infty}{\infty} = \text{indeterminación}$$

Dejando el término de mayor grado en el numerador y en el denominador, se llega al resultado del límite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 = 1$$

Por lo tanto, en este caso, m es igual a 1

$$m = 1$$

Ahora hay que obtener el coeficiente n , que se calcula con la fórmula:

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} [y - m \cdot x]$$

Sustituimos y y el coeficiente m que se calculó y queda:

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 2}{x - 3} - 1 \cdot x \right]$$

Operando dentro del corchete, se obtiene el denominador común para realizar la resta y después se agrupan términos en el numerador

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2 - x^2 + 3x}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x + 2}{x - 2}$$

Sustituyendo la x por infinito queda:

$$\frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación}$$

Se resuelve la indeterminación y se obtiene el siguiente resultado:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3 = 3$$

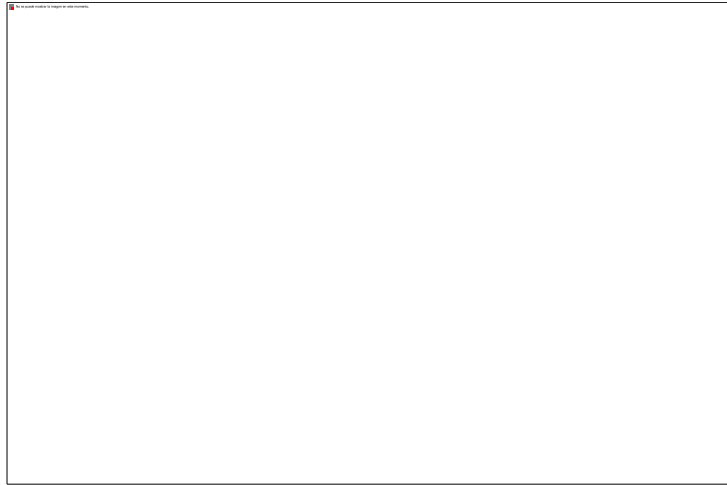
El coeficiente n es igual a 3

$$n = 3$$

Por tanto, después de sustituir los valores de los coeficientes m y n en la ecuación de la recta, queda entonces que la asíntota oblicua es

$$y = x + 3 \rightarrow \text{Asíntota oblicua}$$

Si se representa gráficamente la función, la asíntota vertical y la asíntota oblicua, queda:



REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

HOSTETLER y LARSON. Cálculo y geometría Analítica. Tercera edición, Editorial McGraw Hill, Colombia, 1992.

MORON, Williams y Ochoa J. Problema de Matemática I. S/C, S/E, S/F.

NAVARRO, E. Análisis y Geometría Analítica.

LINKS

Limites inmediatos

https://www.youtube.com/watch?v=2QEz_n81SsE

<https://www.youtube.com/watch?v=nTaiyaoyJhw>

LIMITES INDETERMINADOS 0/0

<https://www.youtube.com/watch?v=rrbS5l--1Ss>

<https://www.youtube.com/watch?v=bwXK7N28r3A>

LIMITES INDETERMINADOS INFINITO / INFINITO

<https://www.youtube.com/watch?v=q-FYH1gOw5w>

LIMITES INDETERMINADOS INFINITO MENOS INFINITO

https://www.youtube.com/watch?v=GjoZvv_-Xd8

DERIVADAS

https://www.youtube.com/watch?v=ia8L26ub_pc&list=PL9SnRnlzoyX1klbHdA7GN-6g-hvkyLbWp

<https://www.youtube.com/watch?v=JwEM-lyply8&index=3&list=PL9SnRnlzoyX1klbHdA7GN-6g-hvkyLbWp&t=0s>

<https://www.youtube.com/watch?v=krv6HGejMxM&index=3&list=PL9SnRnlzoyX1klbHdA7GN-6g-hvkyLbWp>

DERIVADAS (SUMAS Y RESTAS)

https://www.youtube.com/watch?v=p6q_I27TjX8&index=6&list=PL9SnRnlzoyX1klbHdA7GN-6g-hvkyLbWp

DERIVADA DE UNA RAÍZ

<https://www.youtube.com/watch?v=wceG9ZFOHZs&index=10&list=PL9SnRnlzoyX1klbHdA7GN-6g-hvkyLbWp>

DERIVADA DE UN PRODUCTO

<https://www.youtube.com/watch?v=TH0xJFMHHkY>

DERIVADA DE UN COCIENTE

<https://www.youtube.com/watch?v=ZyVS-lXG-zY&index=13&list=PL9SnRnlzoyX1klbHdA7GN-6g-hvkyLbWp>

DERIVADA DE LA FUNCIÓN SENO

<https://www.youtube.com/watch?v=N7ZDBeGi6zE&list=PL9SnRnlzoyX1klbHdA7GN-6g-hvkyLbWp&index=38>

DERIVADA DE LA FUNCIÓN COSENO

<https://www.youtube.com/watch?v=QugSs0H7OVY&index=41&list=PL9SnRnlzoyX1klbHdA7GN-6g-hvkyLbWp>

REGLA DE LA CADENA

<https://www.youtube.com/watch?v=ASbk8LLfZj0&index=185&list=PL9SnRnlzoyX1klbHdA7GN-6g-hvkyLbWp>

FUNCIONES CRECIENTE Y DECRECIENTE

<https://www.youtube.com/watch?v=DzsCZ90H1sY>

MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

<https://www.youtube.com/watch?v=z-x86rnArgs>

ASINTOTAS DE UNA FUNCIÓN

<https://www.youtube.com/watch?v=P7m-u3luAFY>