Instituto Universitario de Tecnología para la Informática

**MATERIA:**
MATEMÁTICA III

Licda. Alicia Zapata de Pérez

Valencia, Marzo 2019

# INTEGRALES

## OBJETIVO GENERAL:

Identificar y aplicar los diferentes métodos de integración para resolver ejercicios de cálculo integral.

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

- Entender la integral como operación inversa de la derivada.
- Encontrar integrales definidas e indefinidas desarrollando los distintos métodos de integración.

## 1.- NOTACIÓN DE INTEGRALES

**Integral** es un adjetivo que permite señalar a lo que es **total** o **global**.

En la **matemática**, integral es el signo que indica la integración y el resultado de integrar una expresión diferencial. Se conoce como **cálculo integral** a la rama de la matemática que busca obtener una función a partir de su derivada.

En otras palabras es el proceso que permite restituir una función que ha sido previamente derivada. Es decir, la operación opuesta de la derivada así como la suma es a la resta.
Por conveniencia se introduce una notación para la antiderivada de una función

Si $F^{!}(x) = f(x)$, se representa

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

A este grafo $\int$ se le llama símbolo de la integral y a la notación $\int fx\,dx$ se le llama integral indefinida de $f(x)$ con respecto a $x$. La función $f(x)$ se denomina integrando, el proceso recibe el nombre de integración. Al número C se le llama constante de integración, esta surge por la imposibilidad de obtener la constante derivada. Así como $dx$ denota diferenciación con respecto a la variable $x$, lo cual indica la variable derivada.

$$\int fx\,dx$$

Esto se lee integral de $fx$ del diferencial de $x$.

**2.- CALCULO DE INTEGRALES INMEDIATAS (USO DE TABLA)**

Una integral inmediata es aquella que se resuelve de forma directa, aplicando la formula correspondiente.

A continuación se presentan algunas fórmulas de integrales inmediatas, las cuales se explicará cada caso por separado.

1. $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
2. $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \neq -1)$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$
5. $\int e^x dx = e^x + c$
6. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
7. $\int sen\, x\, dx = -cos x + c$
8. $\int \cos x\, dx = sen\, x + c$
9. $\int sec^2 x\, dx = \tan x + c$
10. $\int csc^2 x\, dx = -\cot x + c$
11. $\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$
12. $\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$
13. $\int \frac{1}{x^2+1} dx = tan^{-1} x + c$
14. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = sen^{-1} + c$
15. $\int \tan x\, dx = \ln|\sec x| + c$
16. $\int \cot x\, dx = \ln|sen\, x| + c$

- **Integración de funciones potenciales:**

De acuerdo a la regla de una potencia, la derivada es igual a $y = x^n \rightarrow y' = n\, x^{n-1}$, en este caso al hallar la derivada de una función se multiplica el exponente por la base de la potencia, y a ese mismo exponente se le resta la unidad.

Cuando se integra una función potencial, o lo que es lo mismo una potencia, se procede de forma inversa, en vez de multiplicar, se divide y en vez de restar al exponente la unidad, se le suma una unidad.

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad => n \neq 1$$

**EJEMPLO:**

Hallar la siguiente integral:

$$\int x^3 dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c$$

**EJEMPLO:**

Hallar la siguiente integral:

$$\int \sqrt[3]{x^5} \, dx =$$

Cuando se tienen raíces como función, se debe transformar esta raíz como potencia para entonces proceder a integrar:

$$\int \sqrt[3]{x^5} \, dx = \int x^{\frac{5}{3}} \, dx = \frac{x^{\frac{8}{3}}}{\frac{8}{3}} + c = \frac{3\sqrt[3]{x^8}}{3} + c$$

Luego de hallar el resultado de la integral, se vuelve a colocar la potencia como raíz. Se debe recordar que se debe colocar siempre la constante de integración $(c)$ al final de la integración.

**EJEMPLO:**

Hallar la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{x^5} = \int x^{-5} \, dx = \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = \frac{x^{-4}}{-4} + c = -\frac{1}{4x^4} + c$$

Cuando la función potencial esté en el denominador, para poder integrar se debe llevar al numerador, por lo que hay que cambiar el signo al exponente y ya de esta forma se procede a integrar la función.

- **Integral de la función exponencial:**

La integración de la función exponencial $e^x$ es trivial por cuanto que $e^x$ es su propia derivada.

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

- **Integral de la función logarítmica:**

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

De esta manera se resuelven todas las integrales inmediatas, si por ejemplo se busca la integral de una función trigonométrica, se busca directamente en la tabla la solución de la misma. Ejemplo:

- **Integral de la función seno:**

$$\int sen\, x \, dx = -\cos x + c$$

- **Integral de la función coseno:**

$$\int \cos x \, dx = sen\, x + c$$

- **Integral de la función tangente:**

$$\int tag\, x \, dx = \ln|\sec x| + c$$

- **Regla del múltiplo constante:**

Para toda constante $c$, se tiene que:

$$\int c\, f_{(x)}\ dx = c \int f_x\, dx$$

Esto quiere decir que la integral de una constante por una función es igual a la constante por la integral dicha función

**Ejemplo:**

$$\int \mathbf{5\, x^3\ dx = 5 \int x^3\, dx}$$

- **Regla de la Suma o resta:**

La integral de una suma (o resta) de funciones es igual a la suma (o resta) de las integrales.

$$\int [f_{(x)} \pm g_{(x)}]\ dx = \int f_{(x)}\, dx \pm \int g_{(x)}\ dx$$

**Ejemplo:**

$$\int [e^x + x^2 - 3]\, dx = \int e^x\ dx + \int x^2\, dx - \int 3\, dx$$

$$= \int e^x\ dx + \int x^2\, dx - 3\int dx = e^x + \frac{x^3}{3} - 3x + c$$

A pesar de que son tres integrales, al final solo se coloca una constante de integración.

**Ejemplo:**

$$\int \left(\frac{2}{x^4} - sen\ x + tagx\right) dx = 2\int \frac{dx}{x^4} - \int sen\ x\, dx + \int tagx\ dx$$

$$= 2\int x^{-4}\ dx - \int sen\ x\ dx + \int tag\ x\ dx$$

$$= 2\ \frac{x^{-3}}{-3} - \cos x\ + \ln|\sec x| + c$$

**Ejemplo:**

$$\int \frac{3x^2 - 4}{x^2}\ dx =$$

En este caso se separan los numeradores y cada uno le colocamos el mismo denominador:

$$\int \left(\frac{3x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}\right) dx = \int (3 - 4x^{-2}) dx = 3\int dx - 4\int x^{-2}\ dx$$

$$3x - 4\frac{x^{-1}}{-1} + c = 3x + \frac{4}{x} + c$$

**Ejemplo:**

$$\int \left(x\sqrt{x} - 3\sqrt{x}\right) dx =$$

Se transforman las raíces a potencias, luego se multiplican las potencias de igual base:

$$\int \left(x \cdot x^{\frac{1}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \int \left(x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}\right) dx = \int x^{\frac{3}{2}}\ dx - 3\int x^{\frac{1}{2}}\ dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{5\sqrt{x^5}}{2} - 6\frac{\sqrt{x^3}}{3} + c$$

**Ejemplo:**

$$\int (x+1)\,(2-x)dx =$$

Para resolver este integral primero hay que aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación.

$$\int (2x - x^2 + 2 - x)dx = \int (x - x^2 + 2)\,dx = \int xdx - \int x^2dx + 2\int dx$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x + c$$

**Ejemplo:**

$$\int \frac{\ln 2x}{\ln 4x^2}\,dx = \int \frac{\ln 2x}{\ln(2x)^2}\,dx = \int \frac{\ln 2x}{2\ln 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\ln 2x}{\ln 2x}\,dx = \frac{1}{2}\int dx$$

$$= \frac{1}{2}\,x + c$$

**Ejemplo:**

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsen\,x + c$$

**Ejercicios propuestos:**

**Resolver las siguientes integrales inmediatas:**

- $\int (x+3)^2\ dx =$
- $\int (x^4 - x^2 + 4)dx =$
- $\int tag\ x\ dx =$
- $\int \sqrt{x}\ (x^3 + 2x)\ dx =$
- $\int (x^4 + 3)^3\ dx =$
- $\int (2x^2 - 6)^2\ dx =$

## INTEGRACIÓN POR SUSTITUCIÓN O CAMBIO DE VARIABLE

Las integrales que se resuelven por el método de sustitución o cambio de variable no siguen ninguna metodología establecida.

Se realiza un cambio de variable para simplificar la integral y facilitar su resolución y luego resolverlas como integrales inmediatas.

**Ejemplo:**

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\ dx$$

Al hacer un cambio de variable, se debe tener en cuenta que al derivar la función que fue cambiada, hay que obtener lo que resta en el integral.

A la función que se está cambiando se sustituye ahora por alguna letra:

$$\boldsymbol{u} = x^2+1 \quad => \boldsymbol{du} = 2x\,dx$$

$$\int \boldsymbol{2x}\sqrt{\boldsymbol{x^2+1}}\ \boldsymbol{dx} =$$

Haciendo los cambios en el integral, queda:

$$\int \sqrt{u}\ du$$

Como es una integral inmediata, se procede a resolver:

$$\int \sqrt{u}\ du = \int u^{\frac{1}{2}}\ du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2\sqrt{u^3}}{3} + c$$

Ya integrada la función se vuelve a sustituir por el valor original, es decir que en vez de “u” se coloca la función original:

$$= \frac{2\sqrt{u^3}}{3} + c = \frac{2\sqrt{(x^2+1)^3}}{3} + c$$

**Ejemplo:**

$$\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}\ dx =$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = 8 - 3x \quad => \quad du = -3dx \quad => \quad \frac{du}{-3} = dx$$

Sustituyendo:

$$\int \sqrt[5]{u^6}\ \frac{du}{-3} = -\frac{1}{3}\int \sqrt[5]{u^6}\ du = -\frac{1}{3}\int u^{\frac{6}{5}}\ du = -\frac{1}{3}\ \frac{u^{\frac{11}{5}}}{\frac{11}{5}} + c$$

$$= -\frac{5u^{\frac{11}{5}}}{33} + c = -\frac{5\sqrt[5]{u^{11}}}{33} + c = -\frac{5\sqrt[5]{(8-3x)^{11}}}{33} + c$$

**Ejemplo:**

$$\int 3x\sqrt{1-2x^2}\ dx = 3\int x\sqrt{1-2x^2}\ dx$$

Haciendo el cambio:

$$u = 1 - 2x^2 \quad => \quad du = -4xdx \quad => \quad \frac{du}{-4} = x\,dx$$

Sustituyendo:

$$3\int \sqrt{u}\ \frac{du}{-4} = -\frac{3}{4}\int \sqrt{u}\ du = -\frac{3}{4}\int u^{\frac{1}{2}}\ du = -\frac{3}{4}\ \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = -\frac{6\sqrt{u^3}}{12} + c$$

Devolviendo el cambio y simplificando, se tiene:

$$= -\frac{\sqrt{(1-2x^2)^3}}{2} + c$$

**Ejemplo:**

$$\int \frac{sen\ 3x}{\sqrt[3]{1+3\cos 3x}}\ dx =$$

Haciendo el cambio de variable:

$$u = 1 + 3\cos 3x \quad => du = \ -3\ sen\ 3x(3)\ dx \quad => \ -\frac{du}{9} = 3\ sen\ 3x$$

Sustituyendo los cambios en el integral, se tiene:

$$\int \frac{-\frac{du}{9}}{\sqrt[3]{u}} = \ -\frac{1}{9}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{3}}} = \ -\frac{1}{9}\int u^{-\frac{1}{3}}\ du = \ -\frac{1}{9}\,\frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c = -\frac{\sqrt[3]{u^2}}{6} + c$$

Devolviendo el cambio:

$$= \ -\frac{\sqrt[3]{(1+\cos 3x)^2}}{6} + c$$

**Ejercicios Propuestos:**

- $\int 3x\sqrt[3]{2-x^2}\ dx$
- $\int \frac{x}{2+x^2}\ dx$
- $\int \sqrt{1-4y}\ dy$
- $\int x^2(x^3+4)^2 dx$
- $\int \frac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+1}}\ dx$

## INTERACIÓN POR PARTES

Este método se usa para integrar ciertos productos (dos funciones que se estén multiplicando) $f_{(x)}\ g_{(x)}$, en los que uno de los factores, puede ser fácilmente integrado y el otro fácilmente derivado. Para ello se utiliza la siguiente fórmula:

$$\int u dv = uv - \int v\, du$$

¿Cómo elegir $u\ y\ v$?

Normalmente, se elige a $u$ a la función que es más fácil de derivar y a $dv$ la función más fácil de integrar.

Son buenas candidatas a ser la función a integrar:

- Función del número $e^x$.
- Funciones trigonométricas: $\cos x,\ sen\ x$ ….
- Funciones potenciales: $x^2, x^3, etc$ …
- El propio $dx$

Cuando coinciden varias de estas funciones en la integral, siempre elige la función a integrar en el orden de prioridad en el que están en el anterior listado, es decir, si tenemos esta integral:

$$\int e^x \cos x\ \ dx$$

La función a integrar será la de $e^x$ y la función $\cos x$ será la función a derivar:

**Ejemplo:**

$$\int xe^x\ \ dx =$$

$$u = x \quad (es\ mas\ fácil\ de\ derivar) \quad \rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^x\, dx \ \ (\ es\ más\ fácil\ de\ integrar) \quad \rightarrow \quad v = \ e^x + c$$

Aplicando la fórmula de integración por partes, se tiene:

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int e^x \, dx$$

Ya solo queda un integral inmediato, el cual se termina de resolver, quedando:

$$\int xe^x \, dx = xe^x - e^x + c$$

Sacando factor común:

$$\int xe^x \, dx = e^x(x-1) + c$$

De esta manera queda integrada la función.

**Ejemplo:**

$$\int \ln x \, dx$$

Aquí es más fácil integrar a $dx$, por lo tanto se tiene que:

$$u = \ln x \quad \rightarrow derivar \rightarrow \quad du = \frac{1}{x} \, dx$$

$$dv = dx \quad \rightarrow integrar \rightarrow \quad v = x + c$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$\int \ln x \, dx = \ln x \, (x) - \int x \, \frac{1}{x} \, dx$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - \int dx$$

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + c$$

**Ejemplo:**

$$\int x \cos x \, dx =$$

$$u = x \quad \rightarrow \quad derivar \quad \rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \cos x \, dx \quad \rightarrow \quad integrar \quad \rightarrow \quad v = sen\, x + c$$

Sustituyendo:

$$\int x \cos x \, dx = x\, senx - \int sen\, x\, dx$$

$$\int x \cos x \, dx = x\, sen\, x + \cos x + c$$

**Ejemplo:**

$$\int arc\ cotag\ x\ dx =$$

$$u = arc\ cotag\ x \quad \rightarrow derivar \quad \rightarrow \quad du = -\frac{1}{1+x^2}$$

$$dv = dx \quad \rightarrow integrar \quad \rightarrow \quad v = x + c$$

Sustituyendo:

$$\int arc\ cotag\ x\ dx = arc\ cotag\ x\ (x) - \int x \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) dx$$

Para resolver esta integral se utiliza el método de cambio de variable o sustitución:

$$* \int x \left(-\frac{1}{1+x^2}\right) dx = -\int \frac{x}{1+x^2}\ dx$$

$$t = 1 + x^2 \qquad \rightarrow \quad dt = 2x\,dx \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{2} = x\,dx$$

$$-\int \frac{x}{1+x^2}\,dx = -\int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{2}\ln t + c$$

Devolviendo el cambio:

$$= -\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

Sustituyendo en la función original, se tiene:

$$\int arc\ cotag\ x\ dx = arc\ cotag\ x\ (x) - \int x\left(-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$\int arc\ cotag\ x\ dx = x\ arc\ ctag\ x - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + c$$

**Ejemplo:**

$$\int x^2 e^x\ dx =$$

$$u = x^2 \quad \rightarrow derivar \ \rightarrow du = 2x\,dx$$

$$dv = e^x dx \quad \rightarrow integrar \ \rightarrow v = e^x + c$$

Sustituyendo en la fórmula:

$$\int x^2 e^x\ dx = x^2\,e^x - \int e^x\,(2x)dx$$

$$\int x^2 e^x\ dx = x^2\,e^x - 2\int \boldsymbol{x\,e^x\,dx}$$

En este caso se vuelve a integrar por pares la integral que quedó:

$$\int \boldsymbol{x\,e^x\,dx}$$

$$u = x \quad \rightarrow derivar \quad \rightarrow du = dx$$

$$dv = e^x dx \quad \rightarrow integrar \quad \rightarrow v = e^x + c$$

$$\int \boldsymbol{x\, e^x\, dx} = x\, e^x - \int e^x\, dx$$

$$\int \boldsymbol{x\, e^x\, dx} = x\, e^x - e^x + c$$

Sustituyendo, se tiene

$$\int x^2 e^x \; dx = x^2\, e^x - 2[x\, e^x - e^x] + c$$

$$\int x^2 e^x \; dx = x^2\, e^x - 2xe^x - 2e^x + c$$

$$\int x^2 e^x \; dx = e^x(x^2 - 2x - 2) + c$$

Existe otra manera de resolver integrales por partes utilizando el **método alternativo,** pero se utiliza para calcular una integral donde el integrando contiene como factor a funciones de la forma: $P_{(x)}.e^x, P_{(x)}\,.sen\;ax\,, P_{(x)}\,.\cos ax$, etc. Siendo $P_{(x)}$ un polinomio de grado $n$. Se construye una tabla de dos columnas. La columna de la izquierda se inicia con el polinomio $P_{(x)}$ y la de la derecha con $e^x, sen\;ax\,, \cos ax$, etc. En cada fila posterior y en secuencia, en la primera columna se van escribiendo las derivadas sucesivas del polinomio hasta que la misma se haga igual a cero (derivada de una constante) y en la segunda columna las integrales sucesivas de $e^x, sen\;ax\,, \cos ax$, etc. Para escribir el resultado se procede de la siguiente manera: se multiplica *la primera de la primera columna por la segunda fila de la segunda columna* (resultado positivo) más *la segunda fila de la primera columna por la tercera fila de la segunda columna* (resultado negativo) más *la tercera fila de la primera columna por la cuarta fila de la segunda columna* (resultado positivo) y así sucesivamente.

**Ejemplo:**

$$\int x^2\, sen\, x\, dx =$$

**Solución:**

| $x^2$ | $sen\, x$ |
|---|---|
| $(x^2)' = 2x$ | $\int sex\, x\, dx = -\cos x + c$ |
| $(2x)' = 2$ | $\int -\cos x\, dx = -sen\, x + c$ |
| $(2)' = 0$ | $\int -sen\, x\, dx = \cos x + c$ |

Luego es resultado es:

$$\int x^2\, sen\, x\, dx = x^2(-\cos x) - 2x(-senx) + 2(\cos x) + c$$

$$\int x^2\, sen\, x\, dx = -x^2 \cos x + 2x\, sen\, x + 2\cos x + c$$

**Ejemplo:**

$$\int x^3\, e^{2x}\, dx =$$

| $x^3$ | $e^{2x}$ |
|---|---|
| $(x^3)' = 3x^2$ | $\int e^{2x} dx = \frac{1}{2}\, e^{2x} + c$ |
| $(3x^2)' = 6x$ | $\frac{1}{2}\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{4} e^{2x} + c$ |
| $(2)' = 6$ | $\frac{1}{4}\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{8}\, e^{2x} + c$ |
| $(6) = 0$ | $\frac{1}{8}\int e^{2x}\, dx = \frac{1}{16}\, e^{2x} + c$ |

$$\int x^3\, e^{2x}\, dx = x^3 \frac{1}{2} e^{2x} - 3x^2 \frac{1}{4} e^{2x} + 6x \frac{1}{8} e^{2x} - 6 \frac{1}{16} e^{2x} + c$$

$$\int x^3\, e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} x^3 e^{2x} - \frac{3}{4} x^2 e^{2x} + \frac{3}{4} x e^{2x} - \frac{3}{8} e^{2x+c}$$

$$\int x^3\, e^{2x}\, dx = \frac{1}{2} e^{2x} \left( x^3 - \frac{3}{2} x^2 + \frac{3}{2} x - \frac{3}{4} \right) + c$$

**Ejercicios Propuestos:**

- $\int x e^{-x}\, dx =$
- $\int x \ln x\, dx =$
- $\int (2+1) sen\, 5x\, dx =$
- $\int x \sqrt{1+x}\, dx =$
- $\int e^{x}\ \ sen\ x\, dx =$

## INTEGRALES TRIGONOMÉTRICAS

Una integral se denomina trigonométrica cuando el integrando de la misma está compuesto de funciones trigonométricas, y que para integrarlas hay que transformarlas en integrales inmediata a través de reducciones trigonométricas sencillas

**CASO I:**

- **Integrales de la forma $\int \boldsymbol{sen^m\, u\, cos^n u\, du}$**

En el caso de que $\boldsymbol{m \ o \ n}$ sean un número entero impar positivo, sin importar lo que sea el otro, esta integración puede resolverse por medio de transformaciones sencillas y aplicando la fórmula:

$$\int v^n \ dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + c$$

Por ejemplo, si $\boldsymbol{m\ es\ impar}$**,** se descompone:

$$sen^m u = \ sen^{m-1}\, u\, .sen\, u\, du$$

Puesto que $\boldsymbol{m\ ahora\ es\ par}$ , el primer término del segundo miembro de la igualdad será una potencia de $\boldsymbol{sen^2 u}$**,** por lo que se sustituye por la identidad trigonométrica:

$$sen^2 u = 1 - \ cos^2\, u$$

De igual manera se procede si $\boldsymbol{n\ es\ impar}$**,**

$$cos^n\, u = \ cos^{n-1} u\, .\cos u\, du$$

Y se emplea la sustitución:

$$cos^2\, u = 1 - \ sen^2 u$$

**Ejemplo:**

$$\int sen^2\, x\, cos^5\; x\, dx =$$

Como $\boldsymbol{n\ es\ impar,}$ se descompone

$$\int sen^2\, x\, cos^4\, x \cos x\, dx = \int sen^2\, x\, (cos^2 x)^2 \cos x\, dx$$

Utilizando la identidad:

$$\int sen^2\, x\, (1 - sen^2 x)^2 \cos x\, dx = \int sen^2 x\, (1 - 2\, sen^2\, x + \; sen^4 x) \cos x\, dx$$

$$\int (sen^2 x - 2\, sen^4 x + \; sen^6 x) \cos x\, dx =$$

$$\int sen^2\, x \cos x\, dx - 2 \int sen^4 \cos x\, dx + \int sen^6 x \cos x\, dx$$

Ahora para resolver estos integrales, se hace un cambio de variable:

$$u = sen\, x \quad => \quad du = \cos x\, dx$$

$$\int u^2\, du - 2 \int u^4\, du + \int u^6 du = \frac{u^3}{3} - 2\frac{u^5}{5} + \frac{u^7}{7} + c$$

Devolviendo el cambio, se tiene:

$$= \frac{sen^3 x}{3} - \frac{2\, sen^5 x}{5} + \frac{sen^7 x}{7} + c$$

**Ejemplo:**

$$\int sen^3 dx = \int sen^2 x\, sen\, x\, dx$$

Se hace el cambio utilizando identidad trigonométrica

$$sen^2x = 1 - cos^2 x$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int (1 - cos^2x)\ sen\ x\ dx = \int sen\ x\ dx - \int cos^2 x\ sen\ x\ dx =$$

La primera integral es directa, pero en la segunda integral hay que hacer un cambio de variable para resolverla:

$$u = \cos x \quad => \quad du = -sen\ x\ dx \quad => -du = sen\ x\ dx$$

$$\int sen\ x\ dx - \int u^2\ (-du)$$

$$-\cos x + \frac{u^3}{3} + c$$

Devolviendo el cambio:

$$= -\cos x + \frac{cos^3x}{3} + c$$

**Ejemplo:**

$$\int \frac{cos^3x}{sen^4x}\ dx = \int \frac{cos^2x \cos x}{sen^4x}\ dx = \int \frac{(1 - sen^2x) \cos x}{sen^4x}\ dx =$$

$$\int \frac{\cos x - sen^2x \cos x}{sen^4x}\ dx = \int \frac{\cos x}{sen^4x}\ dx - \int \frac{sen^2x \cos x}{sen^4x}\ dx$$

$$\int \frac{\cos x}{sen^4x}\ dx - \int \frac{\cos x}{sen^2x}\ dx$$

Haciendo cambio de variable:

$$u = sen\ x \quad => \quad du = \cos x\ dx$$

$$\int \frac{du}{u^4} - \int \frac{du}{u^2} = \int u^{-4}\ du - \int u^{-2}\ du = \frac{u^{-3}}{-3} - \frac{u^{-1}}{-1} + c = -\frac{1}{3u^3} + \frac{1}{u} + c$$

Devolviendo el cambio:

$$= \frac{1}{sen\ x} - \frac{1}{3sen^3 x} + c = \csc x - \frac{1}{3} csc^3 x + c$$

**Ejercicios Propuestos:**

- $\int cos^4\, x\ sen^3 x\ dx =$
- $\int sen^5 x\ dx =$
- $\int cos^5\ \ dx =$
- $\int \frac{sen^3\phi}{cos^2\phi}\ d\phi =$
- $\int sen^5 x\ dx =$

**CASO II**

**Integrales de la forma $\int \boldsymbol{tag^n\ u\ du\ \ o\ \ \int ctag^n u\ du}$**

Cuando $n$ es un número entero. El primer paso es escribir:

$$\int tag^n\, u = \ tag^{n-2} u\ \ tag^2 u = \ tag^{n-2} u\ (\ sec^2 u - 1)$$

Cambiando a $tag^2 u\ por\ la\ identidad\ sec^2 u - 1$, o

$$\int ctag^n u = \ ctag^{n-2}\ \ ctag^2 u = \ ctag^{n-2} u\ (csec^2 - 1)$$

Cambando a $ctag^2 u\ por\ la\ identidad\ csec^2 u - 1$

**Ejemplo:**

$$\int tag^4\, x\ dx = \int tag^2\, x\ tag^2 x\ dx = \int tag^2\, x\ (sec^2 - 1) dx$$

$$\int (tag^2\, x\ sec^2 x - tag^2 x)\ dx = \int tag^2\, x\ sec^2 dx - \int tag^2 x\ dx$$

$$\int tag^2\, x\, sec^2 x\, dx - \int (sec^2 x - 1)\, dx$$

$$\int tag^2 x\, sec^2\, x\, dx - \int sec^2\, x\, dx + \int dx$$

La primera para resolverla hay que hacer un cambio de variable, por lo tanto

$$u = \ tag\ x \ \ => \ \ du = \ sec^2 x\, dx$$

$$\int u^2\, du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{tag^3 x}{3} + c$$

La segunda y la tercera integrales son inmediatas

$$\int tag^4\, x\, dx = \frac{tag^3 x}{3} - tag\ x + x + c$$

**Ejemplo:**

$$\int tag^3 x\, dx = \int tag\ x\ tag^2\, x\, dx = \int tag\ x\ (sec^2 x - 1)\ dx$$

$$\int tag\ x\ sec^2 x\, dx - \int tag\ x\, dx$$

Haciendo el cambio en la primera integral, se tiene

$$u = \ tag\ x \ \ => \ \ du = \ sec^2 x\, dx$$

$$\int u\, du = \frac{u^2}{2} + c = \frac{tag^2 x}{2} + c$$

La segunda integral es inmediata:

$$\int tag^4\, x\, dx = \frac{tag^2 x}{2} - \ \ln|\sec x| + c$$

**Ejemplo:**

$$\int ctag^3\, 2x\, dx =$$

En este caso primero se hace el cambio de variable de:

$$u = 2x \quad => du = 2\, dx \quad => \frac{du}{2} = dx$$

$$\int ctag^3\, u\, \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int ctag\, u\, ctag^{\,2}\, u\, du = \frac{1}{2}\int ctag\, u\, (csec^2\, u - 1)\, du$$

$$\frac{1}{2}\int (ctag\, u\, csec^2\, u - ctag\, u)\, du = \frac{1}{2}\int ctag\, u\, csec^2\, u\, du - \frac{1}{2}\int ctag\, u\, du$$

Resolviendo la primera integral por sustitución, se tiene

$$t = ctag\, u \quad => \quad dt = -csec^2 u\, du \quad => \; -dt = csec^2 u\, du$$

$$\frac{1}{2}\int t\,(-dt) = -\frac{1t^2}{4} + c = -\frac{ctag^2 u}{4} + c$$

Resolviendo la segunda integral, se tiene:

$$\frac{1}{2}\int catg\, u\, du = \ln|\sec u| + c$$

Uniendo las dos integrales se tiene:

$$\frac{1}{2}\int ctag^3\, u\, du = -\frac{ctag^2 u}{4} - \frac{1}{2}\ln|\sec u| + c$$

Devolviendo el cambio de $u$

$$\int ctag^3\, 2x\, dx = -\frac{ctag^2 2x}{4} - \frac{\ln|\sec 2x|}{2} + c$$

**Ejercicios propuestos:**

- $\int tag^{5}3\phi \; d\phi =$
- $\int ctag^{3}2x \; csec \; 2x \; dx =$
- $\int catg^{5} \; ax \; dx =$
- $\int \frac{cos^{4}x}{sen^{6}x} \; dx =$
- $\int \frac{sen^{2}\theta}{cos^{4}\theta} \; d\theta =$

**CASO III**

**Integrales de la forma $\int sec^{n} \, u \, du \;\; o \;\; \int csec^{2}u \, du$**

Los integrales de esta forma se calculan cuando $n$ es un número entero positivo par. Para ello se hacen los siguientes cambios:

$$sec^{n}u = \; sec^{n-2}u \; sec^{2}u = \; (tag\;^{2}u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \; sec^{2}u$$

$$csec^{n}u = \; csec^{n-2}u \; sec^{2}u = \; (ctag^{2}u + 1)^{\frac{n-2}{2}} \; sec^{2}u$$

**Ejemplo:**

$$\int sec^{4}\frac{x}{2} \; dx =$$

Cambiando variable:

$$u = \; \frac{x}{2} \;\; => 2u = x \;\;\; => dx = 2du$$

Sustituyendo:

$$\int sec^{4}\frac{1}{2}x \; dx = \; \int sec^{4}u \; (2 \; du) = 2\int sec^{4} \; u \; du$$

$$2\int sec^{4}u \; du = 2 \; \int sec^{2}u \; sec^{2} \; u \; du = 2\int (tag^{2}u + 1) \, sec^{2}u \; du$$

$$2\int (tag^2 u\, sec^2 u + sec^2 u)\, du = 2\int tag^2 u\, sec^2\, u\, du + 2\int sec^2\, u\, du$$

Resolviendo la primero integral por sustitución:

$$t = tag\, u \quad => dt = sec^2 u\, du$$

$$2\int t^2\ dt = 2\ \frac{u^3}{3} + c = \frac{2\ tag^3 u}{3} + c$$

Resolviendo la segunda integral:

$$2\int sec^2 u\, du = 2\ tag\ u + c$$

Uniendo las dos integrales se tiene:

$$2\int sec^4 u\, du = \frac{2\ tag^3 u}{3} + \ 2\ tag\ u + c$$

Devolviendo el cambio

$$2\int sec^4 \frac{1}{2} x\, dx = \frac{2\ tag^3 \frac{1}{2} x}{3} + \ 2\ tag\ \frac{1}{2} x + c$$

$$2\int sec^4 \frac{1}{2} x\, dx = \frac{tag^3 x}{3} + \ tag\ x + c$$

**Ejemplo:**

$$\int csec^4\, 9x\, dx =$$

Haciendo cambio de variable:

$$u = 9x \quad => du = 9\, dx \quad => \frac{du}{9} = dx$$

Sustituyendo queda:

$$\int csec^4 9x = \int cse^4\, u\, \frac{du}{9} = \frac{1}{9}\int csec^4\, u\, du = \frac{1}{9}\int csec^2\, csec^2 u$$

$$\frac{1}{9}\int csec^2 u\, (ctag^2 u + 1)\, du = \frac{1}{9}\int (csec^2\, u\, ctag^2 u + csec^2\, u)\, du$$

$$\frac{1}{9}\int csec^2\, u\, ctag^2 u\, du + \frac{1}{9}\int csec^2\, u\, du$$

La primera integral se resuelve aplicando método de sustitución:

$$\frac{1}{9}\int csec^2\, u\, ctag^2 u\, du = \frac{1}{9}\int t^2\ dt = \frac{1}{9}\,\frac{t^3}{3} + c = \frac{t^3}{27} + c = \frac{ctag^3 u}{27} + c$$

$$t = ctag\, u \ \ => \ \ dt = \ sec^2 u\, du$$

La segunda integral es inmediata:

$$\frac{1}{9}\int csec^2\, u\, du = \frac{1}{9}\,(-\,ctag\, u) + c$$

Uniendo las dos integrales, se tiene;

$$\int csec^4 9x = \frac{1}{9}\int cse^4\, u\, du \ = \frac{ctag^3 u}{27} - \frac{1}{9}\, ctag\, u + c$$

Devolviendo el cambio, queda:

$$\int csec^4 9x\ \ dx = \frac{ctag^3 9x}{27} - \frac{1}{9}\, ctag\ 9x + c$$

**Ejercicios propuestos:**

- $\int ctag^4\, 5x\, dx =$
- $\int csec^6\ \ dx =$
- $\int ctag^2 \csc x\, dx =$
- $\int ctag^2 3x \csc 3x\, dx =$
- $\int csec^4\, 2x\, dx =$

# INTEGRALES POR DESCOMPOSICIÓN DE FRACCIONES SIMPLES

Existen integrales donde la función es una fracción polinómica. Este método consiste en descomponer un cociente de polinomios en una suma de fracciones de polinomios de menor grado

Ejemplo:

$$\int \frac{x+4}{x^2-5x+3}\,dx$$

De modo más general, son las integrales de la forma $\int R_{(x)}\,dx = \int \frac{P_{(x)}}{F_{(x)}}$ y donde $P_{(x)}\ y\ F_{(x)}$ son polinomios.

En el caso en que el grado de $P_{(x)} \geq \ grado\ de\ F_{(x)}$ hay que realizar la división de polinomios para obtener:

$$\frac{P_{(x)}}{F_{(x)}} = Q_{(x)} + \frac{f_{(x)}}{F_{(x)}}$$

Un polinomio donde el grado de $f_{(x)} < que\ el\ grado\ de\ F_{(x)}$, para entonces realizar la descomposición en fracciones simples de

$$\frac{f_{(x)}}{F_{(x)}}$$

**Procedimiento a seguir**

- Asegurar que el grado del numerador es mayor que el del denominador. En caso contrario, separar la fracción realizando la división de polinomios.
- Descomponer en factores el polinomio denominador, sea por Ruffini o por cualquier otro método.
- Escribir la fracción polinómica en forma de suma de fracciones.
- Sacar factor común de los denominadores, y obtener un sistema de ecuaciones al igualar los términos del mismo grado.
- Resolver el sistema de ecuaciones, obteniendo las constantes.

- Escribir la integral como suma de integrales de fracciones de grado 1 o 2, y resolverla.

**CASO I**

**Los factores del denominador son todos de primer grado y ningún factor se repite:**

Corresponde a cada factor no repetido de primer grado, como $x - a$, una fracción parcial de la forma:

$$\frac{A}{x-a}$$

Siendo "A" una constante.

**Ejemplo:**

$$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}\,dx$$

Como el grado del denominador es mayor que el del numerador se descompone el denominador, en este caso se saca primero factor común:

$$x^3+x^2-2x = x\,(x^2+x-2)$$

Y se factoriza el polinomio de segundo grado

$$x^3+x^2-2x = x\,(x^2+x-2) = x\,(x+2)(x-1)$$

Por cada factor que queda al descomponer el polinomio, le corresponde una fracción y como numerador, a cada una de las fracciones resultantes se le coloca una constante que se expresan en letras mayúsculas.

$$\frac{2x+3}{x^3+x^2-2x} = \frac{2x+3}{x\,(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+2)}$$

Ahora hay que determinar el valor de cada una de esas constantes.

Para ello se saca el mínimo común múltiplo

$$\frac{2x+3}{x\,(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x+2)} \qquad (1)$$

$$2x+3 = A\,(x+2)(x-1) + B\,x\,(x+2) + C\,x\,(x-1)$$

Se multiplican los factores:

$$2x+3 = A(x^2+x-2) + B(x^2+2x) + C\,(x^2-x)$$

$$2x+3 = Ax^2 + Ax + 2A + Bx^2 + 2Bx + Cx^2 - Cx$$

Se agrupan los términos semejantes:

$$2x+3 = (Ax^2 + Bx^2 + Cx^2) + (Ax + 2Bx - Cx) + 2A$$

Sacando factor común, queda:

$$2x+3 = x^2(A+B+C) + x(A+2B-C) + 2A$$

Puesto que es una identidad, se igualan los coeficientes de las mismas potencias de $x$ en los dos miembros, por lo que se obtienen tres ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ A+2B-C &= 2 \\ 2A &= 3 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se tiene que:

$$A = \frac{3}{2}\ ;\ B = \frac{5}{3}\ y\ C = -\frac{1}{6}$$

Sustituyendo los valores en (1)

$$\frac{2x+3}{x\,(x-1)(x+2)} = \frac{\frac{3}{2}}{x} + \frac{\frac{5}{3}}{(x-1)} + \frac{-\frac{1}{6}}{(x+2)}$$

$$\frac{2x+3}{x\,(x-1)(x+2)} = \frac{3}{2x} + \frac{5}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)}$$

De este modo quedan tres integrales:

$$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx = \int \frac{3}{2x}\,dx + \int \frac{5}{3(x-1)}dx - \int \frac{1}{6(x+2)}dx$$

$$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx = \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} + \frac{5}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{6}\int \frac{dx}{x+2}$$

Las cuales son integrales inmediatas, por lo que queda:

$$\int \frac{2x+3}{x^3+x^2-2x}dx = \frac{3}{2}\ln|x| + \frac{5}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{6}\ln|x+2| + c$$

**CASO II**

**Los factores del denominador son todos de primer grado pero algunos se repiten**

En este caso a todo factor de primer grado que se repite $n$ veces, corresponde la suma de $n$ fracciones parciales.

**Ejemplo:**

$$\int \frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx$$

Puesto que $(x-1)$ está tres veces como factor, se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{x^3+1}{x(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)^3} + \frac{C}{(x-1)^2} + \frac{D}{(x-1)}$$

Sacando mínimo común múltiplo se tiene:

$$x^3+1 = A(x-1)^3 + Bx + Cx(x-1) + Dx(x-1)^2$$

Resolviendo queda:

$$x^3+1=(A+D)x^3+(-3A+C-2D)x^2+(3A+B-C+D)x-A$$

Igualando los coeficientes de las mismas potencias de $x$, se obtienen las siguientes ecuaciones simultáneas:

$$\begin{aligned} A+D&=1\\ -3A+C-2D&=0\\ 3A+B-C+D&=0\\ -A&=1 \end{aligned}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene:

$$A=\ -1;\ \ B=2;\ C=1\ y\ \ D=2$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx=\int\ \frac{-1}{x}dx+\int\frac{2}{(x-1)^3}dx+\int\frac{1}{(x-1)^2}dx+\int\frac{2}{(x-1)}dx$$

$$\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx=-\int\ \frac{dx}{x}+2\int\frac{dx}{(x-1)^3}+\int\frac{dx}{(x-1)^2}+2\int\frac{dx}{(x-1)}$$

Integrando queda:

$$\int\frac{x^3+1}{x(x-1)^3}dx=-\ln|x|-\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}+2\ln|x-1|+c$$

**CASO III**

**El denominador tiene factores de segundo grado pero ninguno se repite**

A todo factor no repetido de segundo grado como $x^2+px+q$ corresponde una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$$

**Ejemplo:**

$$\int \frac{4}{x^3 + 4x}\, dx =$$

Suponiendo que:

$$\frac{4}{x^3 + 4x} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4}$$

Sacando mínimo común múltiplo, se tiene:

$$4 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)x$$

$$4 = Ax^2 + 4A + Bx^2 + Cx$$

$$4 = x^2(A + B) + Cx + 4A$$

Igualando coeficiente de potencias, queda:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ C &= 0 \\ 4 &= 4A \end{aligned}$$

Resolviendo:

$$A = 1; \;\; B = -1 \;\; y \;\; C = 0$$

Por lo tanto sustituyendo en la integral:

$$\int \frac{4}{x^3 + 4x}\, dx = \int \frac{A}{x}\, dx + \int \frac{Bx + C}{x^2 + 4}\, dx$$

$$\int \frac{4}{x^3 + 4x}\, dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2 + 4}\, dx$$

$$\int \frac{4}{x^3 + 4x}\, dx = \ln|x| - \ln|x^2 + 4| + c$$

**CASO IV:**

**El denominador tiene factores de segundo grado y algunos se repiten**

A todo factor de segundo grado repetido $n$ veces como:

$$(x^2 + px + q)^n$$

corresponderá la suma de $n$ fracciones parciales.

**Ejemplo:**

$$\int \frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2}\, dx =$$

Puesto que $(x^2 + 1)$ está como dos veces como factor, se tiene

$$\frac{2x^3 + x + 3}{(x^2 + 1)^2} = \frac{Ax + B}{(x^2 + 1)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

Sacando factor común:

$$2x^3 + x + 3 = Ax + B + (Cx + D)(x^2 + 1)$$

Resolviendo e igualando los exponentes de las mismas potencias de $x$, se obtiene:

$$2x^3 + x + 3 = Ax + B + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D$$

$$2x^3 + x + 3 = Cx^3 + Dx^2 + (Ax + Cx) + (B + D)$$

$$2x^3 + x + 3 = Cx^3 + Dx^2 + x(A + B) + (B + D)$$

$$C = 2$$
$$D = 0$$
$$A + B = 1$$

$$B + D = 3$$

Por lo que queda:

$$A = -1;\ B = 3;\ \ C = 2\ \ y\ D = 0$$

Sustituyendo en la integral:

$$\int \frac{2x^3 + x + 3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{-x+3}{(x^2+1)^2}dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx$$

Resolviendo las integrales:

$$\int \frac{2x^3 + x + 3}{(x^2+1)^2}\,dx = \ln|x^2+1| + \frac{3}{2}\left[\frac{x}{x^2+1} + arctag\ x\right] + \frac{1}{2(x^2+1)} + c$$

**Ejercicios Propuestos:**

- $\int \frac{(4x-2)}{x^3-x^2-2x}dx =$
- $\int \frac{(5x^2-3)}{x^3-x}dx =$
- $\int \frac{(3x^2+5x)}{(x-1)(x+1)^2}dx =$
- $\int \frac{(4x^2+6)}{x^3+3x}dx =$
- $\int \frac{2x}{(x^2+1)(x+1)^2}dx =$

**INTEGRALES POR SUSTITUCIÓN TRIGONOMÉTRICA**

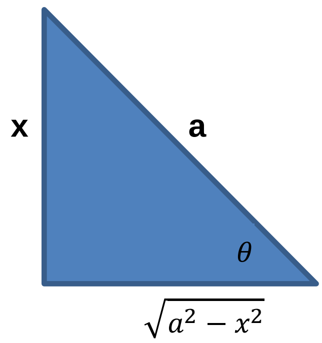
Si un integrando contiene expresiones de los tipos:

$$\sqrt{a^2 - x^2}\ ;\ \sqrt{a^2 + x^2}\ ;\ \sqrt{x^2 - a^2}$$

Donde $a$ es una constante mayor que cero. Es posible apoyarse en el triangulo rectángulo y el teorema de Pitágoras para hacer las sustituciones siguientes:

Caso 1:

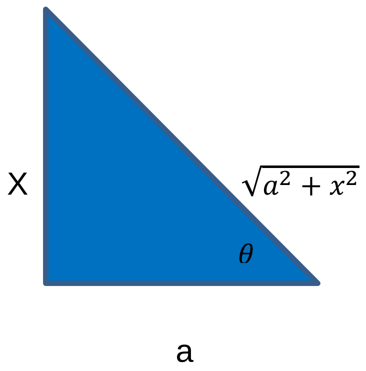
$\sqrt{a^2 - x^2}$




$$x = a\ sen\ \theta$$

Caso 2:

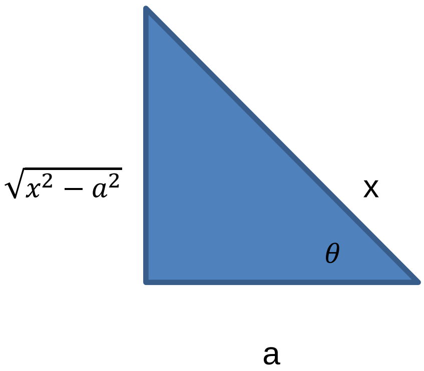
$\sqrt{a^2 + x^2}$




$$x = a\ tag\ \theta$$

Caso 3:

$\sqrt{x^2 - a^2}$




$$x = a \sec \theta$$

**Ejemplo:**

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}} =$$

En este ejercicio, la expresión dentro del radical es de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$, por lo que la sustitución debe ser

$$x = a\ sen\ \theta \quad => x = 2\ sen\ \theta \quad => dx = 2 \cos \theta\ d\theta$$

De tal manera que haciendo los cambios en el integral queda:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}} = \int \frac{2 \cos \theta\ d\theta}{(2\ sen\ \theta)^2\sqrt{4 + (2sen\ \theta)^2}}$$

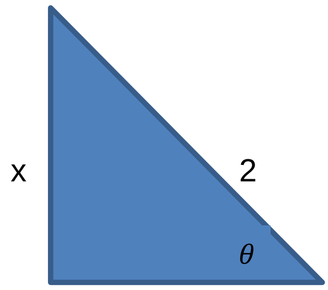
$$\int \frac{2 \cos \theta\ d\theta}{(2\,\mathrm{sen}\,\theta\,)^2\sqrt{4 + (2sen\ \theta)^2}} = \int \frac{2 \cos \theta\ d\theta}{4\ sen^2\theta\ \sqrt{4 + 4sen^2\theta}}$$

$$= \int \frac{\cos \theta\ d\theta}{2sen^2\theta\ \sqrt{4(1 + sen^2\theta)}} = \int \frac{\cos \theta\ d\theta}{2sen^2\theta\ 2\sqrt{cos^2\theta}}$$

$$\int \frac{\cos \theta\ d\theta}{4\ sen^2\theta \cos \quad \theta} = \frac{1}{4}\int \frac{d\theta}{sen^2\theta} = \frac{1}{4}\int csec^2\theta\ d\theta = -\frac{1}{4}\ ctag\ \theta + c$$

$$x = 2\, sen\, \theta \quad => \frac{x}{2} = sen\, \theta$$

Con estos datos se construye el triángulo rectángulo:




$$\sqrt{4 - x^2}$$

De la figura se deduce que:

$$cotag\, \theta = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto} => ctag\, \theta = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x}$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}} = -\frac{\sqrt{4 - x^2}}{4x} + c$$

**Ejemplo:**

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}\, dx =$$

En este ejercicio, la expresión dentro del radical es de la forma $\sqrt{x^2 + a^2}$, por lo que la sustitución debe ser

$$x = a\, tag\, \theta \quad => x = tag\, \theta \quad => dx = sec^2\theta\, d\theta \quad => x^2 = \ tag^2\theta$$

Sustituyendo:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{tag^2\theta+1}\ sec^2\theta\, d\theta}{tag\ \theta} = \int \frac{\sqrt{sec^2\theta}\ sec^2\theta\, d\theta}{tag\ \theta}$$

$$= \int \frac{\sec\theta\ \ sec^2\theta\, d\theta}{tag\ \theta} = \int \frac{\sec\theta\ (1+tag^2\theta)d\theta}{tag\ \theta}$$

$$= \int \frac{\sec\theta + \sec\theta\, tag^2\theta\, d\theta}{tag\ \theta} = \int \frac{\sec\theta\ \ d\theta}{tag\ \theta} + \int \frac{\sec\theta\, tag^2\theta\, d\theta}{tag\ \theta}$$

Resolviendo la primera integral:

$$\int \frac{\sec\theta\ \ d\theta}{tag\ \theta} = \int \frac{\frac{1}{\cos\theta}}{\frac{sen\ \theta}{\cos\theta}}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\cos\theta\ sen\ \theta}\,d\theta = \int \frac{1}{sen\ \theta}d\theta = \int csec\ \theta\ d\theta$$

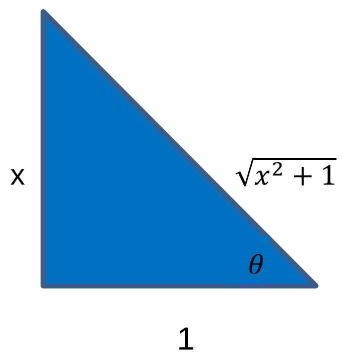
$$= \ln|csec\ \theta - ctag\ \theta| + c$$

Resolviendo la segunda integral:

$$\int \frac{\sec\theta\, tag^2\theta\, d\theta}{tag\ \theta} = \int \sec\theta\ tag\ \theta\ d\theta = \sec\theta + c$$

Uniendo las dos integrales, se tiene:

$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \ln|csec\ \theta - ctag\ \theta| + \sec\theta + c$$




$$\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\,dx = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\right| + \sqrt{x^2+1} + c$$

**Ejemplo:**

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} =$$

En este ejercicio, la expresión dentro del radical es de la forma $\sqrt{x^2-a^2}$, por lo que la sustitución debe ser:Escriba aquí la ecuación.

$$x = a\sec\theta \quad => x = \sec\theta \quad => dx = tag\ \theta \sec\theta\ d\theta$$

$$=> x^2 = \ sec^2\ \theta \quad => \quad x^4 = \ sec^4\theta$$

Sustituyendo se tiene:

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{tag\ \theta \sec\theta\ d\theta}{sec^4\theta\ \sqrt{sec^2\ \theta\ -1}} = \int \frac{tag\ \theta \sec\theta\ d\theta}{sec^4\theta\ \sqrt{tag^2\theta}} = \int \frac{tag\ \theta \sec\theta\ d\theta}{sec^4\theta\ tag\ \theta}$$

Simplificando funciones tanto en el numerador como en el denominador y utilizando identidades trigonométricas se tiene que:

$$\int \frac{d\theta}{sec^3\theta} = \int cos^3\theta\ d\theta = \int cos^2\theta \cos\ \theta\ d\theta = \int (1-sen^2\theta)\cos\theta\ d\theta$$

$$\int (\cos\theta - sen^2\theta\cos\theta)\ d\theta = \int \cos\theta\ d\theta - \int sen^2\ \theta\cos\theta\ \ d\theta$$

Resolviendo la primera integral, la cual es inmediata:

$$\int \cos\theta\ d\theta = sen\ \theta + c$$

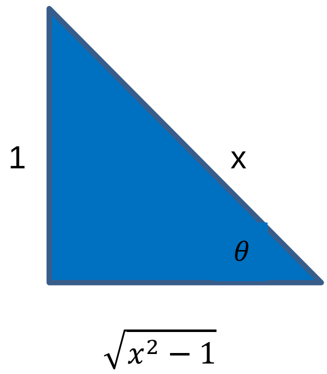
Resolviendo la segunda integral por sustitución:

$$u = sen\ \theta \quad => \quad du = \cos\theta\ d\theta$$

$$\int sen^2\theta\cos\theta\ d\theta = \int u^2\ du = \frac{u^3}{3} + c = \frac{sen^3\theta}{3} + c$$

Uniendo la primera y la segunda integral, se tiene:

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \quad sen\,\theta - \frac{sen^3\theta}{3} + c$$




$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} + \frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^3}{3\,x^3} + c$$

**Ejercicios propuestos:**

- $\int x^5\,\sqrt{1+x^2}\;dx =$
- $\int \frac{x^3}{\sqrt{16-x^2}}\;dx =$
- $\int \frac{1}{x^3\,\sqrt{x^2-1}}\;dx =$
- $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-4}} =$
- $\int \frac{\sqrt{1-25x^2}}{x^2}\;dx =$
- $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+100}}\;dx =$

INTEGRALES DEFINIDAS

## Objetivo general

Calcular áreas bajo la curva de una función, utilizando los métodos de integración.

**DEFINICIÓN DE UNA INTEGRAL DEFINIDA:**

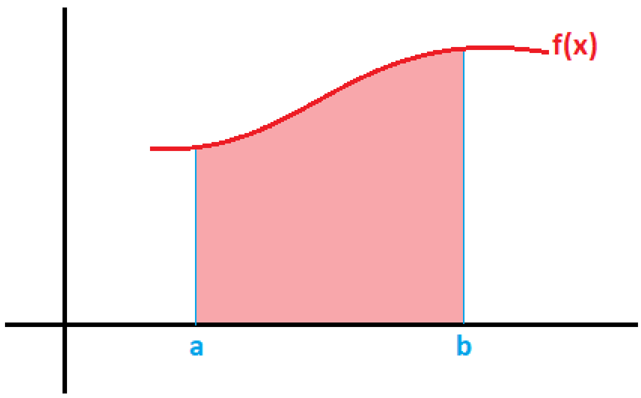
La **integral definida** de una función f(x), se define de la siguiente forma:

$$\int_a^b f_{(x)}\ dx$$

Donde $a\ y\ b$ son **valores de $x$** llamados **límites de integración**:

- $a$ : $límite\ inferior\ de\ integración$
- $b$: $límite\ superior\ de\ integración$

La **integral definida** corresponde al área limitada por la curva $f(x)$, los límites de integración $a\ y\ b$ y $el\ eje\ x$:




Por tanto, la solución de la integral definida **es un valor numérico**, que **siempre debe ser positivo** y expresado en unidades cuadradas, ya que realmente se están calculando áreas.

Las integrales definidas de calculan aplicando la regla de Barrow, que se verá a continuación.

**Cómo calcular integrales definidas: La Regla de Barrow**

Cómo calcular integrales definidas aplicando la regla de Barrow.

**Regla de Barrow**

La regla de Barrow dice lo siguiente:

La integral definida de una función $f(x)$, contínua en el intervalo cerrado $[a,b]$ es igual la diferencia de los valores de su primitiva en los extremos superior e inferior del intervalo $[a,b]$:

$$\acute{a}rea = \int_a^b f_{(x)}\, dx = \left[F_{(x)}\right]\begin{matrix} b \\ a \end{matrix} = F_{(b)} - F_{(a)}$$

Donde $F(x)$ es primitiva de $f(x)$.

Para aplicar la regla de Barrow y calcular integrales definidas, se siguen por tanto los siguientes pasos:

- Obtener la <u>*primitiva de la función*</u>, calculando la integral indefinida correspondiente
- Obtener los valores del valor de la primitiva en cada límite integración
- Realizar la diferencia del **valor la primitiva en el límite superior menos el valor de la primitiva en el límite inferior** $(F(b) - F(a))$
- Operar y calcular el resultado

**Ejemplo:**

Calcular la siguiente integral definida:

$$\int_{-2}^{3} (3x^2 - 2x + 7)\ dx$$

En primer lugar se calcula la integral indefinida de la función, dejando entre corchetes con los dos límites de integración de esta forma:

$$\int_{-2}^{3}(3x^2-2x+7)\ dx = \left[\frac{3x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + 7x\right]_{-2}^{3} = [x^3-2x^2+7x]_{-2}^{3} =$$

Ahora se haya el valor de la primitiva cuando $x=3$, sustituyendo la $x$ por 3 y le restamos el valor de la primitiva cuando $x=-2$, sustituyendo la $x$ por -2:

$$[x^3-2x^2+7x]_{-2}^{3} = (3^3 - 3^2 + 7.3) - [(-2^3) - (-2)^2 + 7\,(-2)] =$$

Finalmente se opera y se calcula la solución:

$$\int_{-2}^{3}(3x^2-2x+7)\ dx = 27+9+21-(-8-4-14) = 39-(-26) = 65\,u^2$$

- $u^2 = unidades\ de\ \text{á}rea$

**CÁLCULO DE ÁREA:**

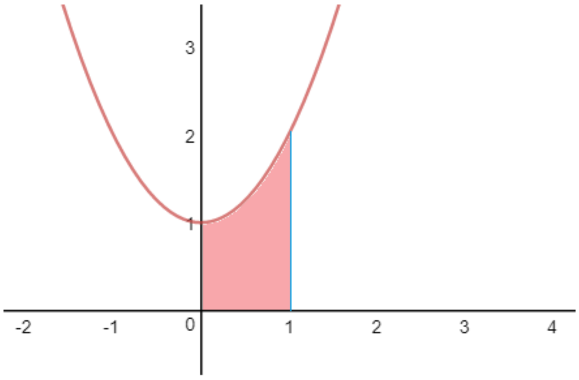
Calcular el área limitada por la curva de la función $f(x)=x^2+1$ y los puntos de abcisas $x=0\ y\ x=2$

En este caso, se pide calcular el área que se queda por debajo de la función:

$$f_{(x)=\,x^2+1}$$

Entre $x=0\ y\ x=2$, (estos dos valores son los límites de integración).

Lo que se está pidiendo es el área sombreada:




Por tanto, esta área se calcula por medio de la integral definida de la función entre $0\ y\ 2$.

$$\int_0^2 (x^2+1)dx$$

Para resolverla, en primer lugar se calcula la integral indefinida, dejándola entre corchetes con sus límites de integración:

$$\int_0^2 (x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^2$$

Y ahora se aplica la regla de Barrow, realizando la diferencia del valor de la primitiva cuando $x=2$, sustituyendo la $x$ por 2 y el valor de la primitiva cuando $x=0$, sustituyendo la $x$ por 0:

$$\int_0^2 (x^2+1)dx = \left[\frac{x^3}{3}+x\right]_0^2 = \left(\frac{2^3}{3}+2\right)-\left(\frac{0^3}{3}+0\right)$$

Y operando, lo que da el siguiente resultado:

$$\int_0^2 (x^2+1)dx = \frac{8}{3}+2 = \frac{14}{3}\ u^2$$

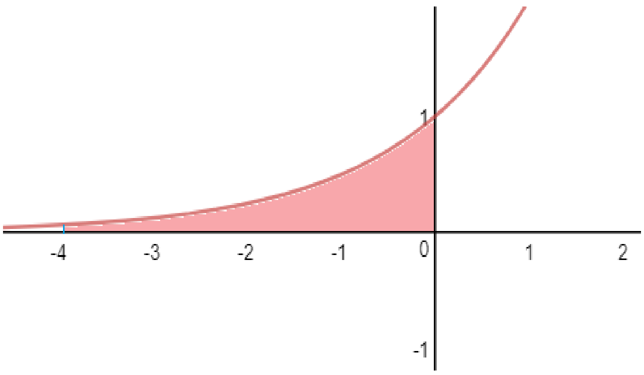
**Ejemplo:**

Calcular el área limitada por la curva de la siguiente función:

$$f_{(x)} = 2^x$$

por el eje “y” y valor de abcisa $x = -4$.

Se pide el área sombreada, que queda por debajo de la curva y entre los valores de abcisa $x = -4 \; y \; x = 0$.




En este problema, no se ve claramente que uno de los límites de integración es $x = 0$, si no que dice $el\, área\, limitada\, por\, el\, eje\, “y”$. De ambas formas se está refiriendo a lo mismo.

Por lo tanto, para calcular el área que piden, se debe calcular la integral definida de la función entre $-4 \; y \; 0$:

$$\int_{-4}^{0} 2^x \; dx =$$

Se calcula la integral indefinida, dejando la primitiva entre corchetes con los límites de integración:

$$\int_{-4}^{0} 2^x \; dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-4}^{0}$$

Se realiza la resta de los valores de las primitivas sustituyendo la $x$ por 0 y por $-4$ en cada caso:

$$\int_{-4}^{0} 2^x \; dx = \left[\frac{2^x}{\ln 2}\right]_{-4}^{0} = \left(\frac{2^0}{\ln 2}\right) - \left(\frac{2^{-4}}{\ln 2}\right)$$

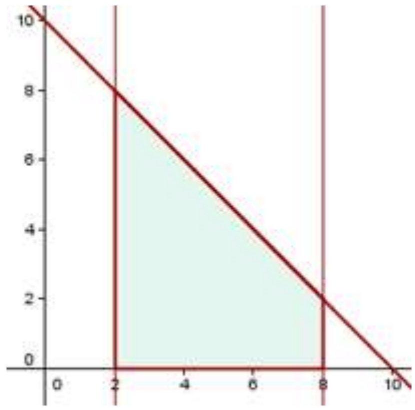
Por último, se resuelve hasta llegar al resultado:

$$\int_{-4}^{0} 2^x \; dx = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{16 \ln 2}$$

$$\int_{-4}^{0} 2^x \; dx = \frac{16-1}{16 \ln 2} = \frac{15}{16 \ln 2} = 1.35 \, u^2$$

**Ejemplo:**

Hallar el área limitada por la recta $x + y = 10$, el eje $OX$ y las ordenadas de $x = 2 \, y \, x = 8$.




Para determinar el valor de la función, se despeja:

$$x + y = 10 \;\; => y = 10 - x$$

Por lo que se tiene que:

$$\int_{2}^{8} (10 - x) \, dx = \left[(10x - \frac{x^2}{2})\right]_{2}^{8} = \left[10(8) - \frac{8^2}{2}\right] - \left[10(2) - \frac{2^2}{2}\right]$$

$$\int_{2}^{8} (10 - x) \, dx = \left(80 - \frac{64}{2}\right) - \left(20 - \frac{4}{2}\right)$$

$$\int_2^8 (10-x)\,dx = \left(\frac{160-64}{2}\right) - \left(\frac{40-4}{2}\right) = \frac{96}{2} - \frac{36}{2} = \frac{60}{2} = 30\,u^2$$

**Ejercicios propuestos:**

Hallar el área de la superficie limitada por la curva dada, el eje de las x y las ordenadas dadas:

- $y = x^3\,;\ x = 0\,,\ x = 4$
- $y = x^2 + x + 1;\ x = 2,\ x = 3$
- $y = 6x^2 - 3x^3;\ x = 0,\ x = 2$
- $y = 4x - x^2;\ x = 0;\ x = 4$
- $y = x^2 - 5x + 6\ y\ \ la\,recta\ \ y = 2x;\ x = 1; x = 6$

**BIBLIOGRAFÍA**

GRANVILLE, William Antyhony. Cálculo Diferencial e integral. Editroial Limusa, México. Año 1980

**Links.**

- Integrales Inmediatas:

https://www.youtube.com/watch?v=wtgnI8EXf8w

- Integrales por cambio de variables:

https://www.youtube.com/watch?v=5Ej7FPMxmPA

- Integrales Trigonométricas:

https://www.youtube.com/watch?v=932hh8xaQb0

- Integrales por descomposición en fracciones simples:

https://www.youtube.com/watch?v=sIJtWkE-t3w

- Integrales por cambios trigonométricos

https://www.youtube.com/watch?v=yPQSrK-gmXU

- Integral definida

https://www.youtube.com/watch?v=wuI5MFhvgsY&list=PLjbK-C2HC8-bLwtMvkPPPAlGnHIKdZc1R

- Cálculo de áreas:

https://www.youtube.com/watch?v=V7WnsXYJZaM