MATEMÁTICA FINANCIERA.
DOCENTE: ING.VLADIMIR GARCIA

CAPITALIZACIÓN COMPUESTA. (CLASE #1)

Calculo del monto en capitalización compuesta:

En la capitalización compuesta los intereses generados en cada período se acumulan al capital inicial de ese período para generar nuevos intereses. Por ello para calcular el monto Cn debemos tener en cuenta que ahora los intereses de cada período no son iguales, como sucedía en la capitalización simple, sino que se hacen cada vez mayores.

Desarrollemos la obtención del montante. El interés generado en el primer período será:

$I_1 = Co * i$

y el monto de ese primer período seria:

$C_1 = Co + I_1 = Co + Co * i = Co * (1 + i)$ {1}

El interés generado en el segundo período será:

$I_2 = C_1 * i$

y el monto del segundo período seria:

$C_2 = C_1 + I_2$

y sustituyendo I_2 por su valor, tendremos que:

$C_2 = C_1 + C_1 * i = C_1 * (1 + i)$

y sustituyendo C_1 por su valor en {1}, tendremos que:

$C_2 = C_o * (1 + i) * (1 + i) = C_o * (1 + i)^2$

Para el tercer período el interés sería:

$I_3 = C_2 * i$

y el monto del tercer período seria:

$C_3 = C_2 + I_3 = C_2 + C_2 * i = C_2 * i = C_o * (1 + i)^2 * (1 + i) = C_o * (1 + i)^3$

Y así sucesivamente, el interés del período "n"

$I_n = C_{n-1} * i$

Y el monto de ese período

$C_n = C_{n-1} + I_n = C_{n-1} + C_{n-1} * i = C_{n-1} * (1 + i) = C_o * (1 + i)^{n-1} * (1 + i) = C_o * (1 + i)^n$

Siendo entonces la expresión general del **monto en capitalización compuesta:**

$$\boxed{C_n = C_0(1+i)^n}$$

A partir de la expresión anterior podemos calcular cualquier elemento conocidos el resto.

El capital inicial será:

$$\boxed{C_0 = \frac{C_n}{(1+i)^n}}$$

$$\boxed{C_o = C_n(1+i)^{-n}}$$

La duración de la operación será, aplicando logaritmos sobre la expresión del montante:

$\log C_n = \log \{C_o * (1 + i)^n\} = \log C_o + \log (1 + i)^n = \log C_o + n * \log (1 + i)$

y despejando la duración:

$$\boxed{n = \frac{\log C_n - \log C_0}{\log(1+i)}}$$

El tipo o tasa de interés aplicada será, a partir de la expresión anterior:

$\frac{C_n}{C_0} = (1+i)^n = \sqrt[n]{\frac{C_n}{C_0}} = \sqrt[n]{(1+i)^n}$ Obteniendo:

$$\boxed{i = \left(\frac{C_n}{C_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Tipos de Tasas:

Tasa nominal anual (J_m): Es la tasa que expresada anualmente capitaliza varias veces al año. Por esta razón, la tasa de nominal no refleja la realidad en cuanto a los intereses devengados anualmente y de aquí su nombre. Sin embargo, en la mayor parte de las operaciones financieras se utiliza la tasa nominal para expresar el tipo de interés que debe pagarse o cobrarse en esa operación. Esto implica que para realizar los cálculos de la operación financiera, lo primero que debe hacerse es convertir esta tasa nominal a la tasa efectiva en cada periodo de capitalización, porque como se observa en los modelos matemáticos se utiliza la tasa efectiva anual o periódica.

Tasa efectiva periódica (i) o (i_m): Es la tasa que realmente se aplica en el periodo de capitalización anual o fracción de año, sobre el capital, para calcular intereses y montos.

Tasas equivalentes en capitalización compuesta.
Cuando utilizamos una fracción de año como período de capitalización en la capitalización compuesta debemos tener en cuenta que **ahora los tantos no son proporcionales**.

Recordando la definición dada para tasas equivalentes, una tasa es equivalente a otra cuando aplicados al mismo capital durante el mismo tiempo producen el mismo monto, utilizando un tasa anual i durante un año n= 1 sería:

$Cn = Co *(1 + i)^n = Co *(1 + i)$

y utilizando la tasa interes en fracción de año i_m

$Cn = Co *(1 + i_m)^m$

y como deben ser iguales los montos

$Co *(1 + i) = Co *(1 + i_m)^m$

Simplificando obtenemos:

$(1 + i) = (1 + i_m)^m$

Podemos despejar ahora el tanto que nos interese en función del otro. **La tasa anual i equivalente a una tasa de fracción de año i_m** será:

$$\boxed{i = (1 + i_m)^m - 1}$$

La tasa de fracción de año i_m equivalente a una tasa anual i será:

$$\boxed{i_m = (1 + i)^{1/m} - 1}$$

Es habitual que en los documentos financieros aparezca la referencia a un tipo proporcional que se denomina **tanto nominal J_m**. A partir de él puede obtenerse el equivalente en fracción de año de igual manera que en la capitalización simple hacíamos con el anual:

$$\boxed{i_m = \frac{J_m}{m} \qquad ; \qquad J_m = i_m * m}$$

Hay que recordar entonces que en la capitalización compuesta vamos a manejar tres tipos o tasas de interés: el efectivo anual (i), el efectivo de fracción de año (i_m) y el nominal anual (J_m).

Ejemplo: Tasas equivalentes en capitalización compuesta.

Calcular el monto que producirá un capital de Bs. 100.000 en capitalización compuesta a un tanto nominal del 5% mensual durante seis años.

$i_m = J_m /m = 0,05 /12$

$Cn = Co *(1 + i_m)^n$ con n en meses, ya que la tasa y la duración deben estar, como siempre, expresados en la misma referencia de tiempo.

$Cn = 100.000 *(1 +\{0,05 /12\})^{72}$ **= Bs.134.901,77**

También podemos calcular la tasa efectiva anual y hacerlo en años

$i = (1 + i_m)^m - 1 = (1 +\{0,05 /12\})^{12} - 1 = 0,051164897$

$Cn = Co *(1 + i)^n = 100.000 *(1,051164897)^6$ = **Bs. 134.901,77**