

Concepto de Análisis Numérico

El Análisis Numérico es la rama de las matemáticas, y en particular de la matemática aplicada, que se encarga de diseñar, analizar y aplicar algoritmos para encontrar soluciones aproximadas a problemas que se formulan matemáticamente.

En esencia, se distingue porque:

- Manipula números, no expresiones algebraicas (a diferencia del cálculo simbólico).
- Se enfoca en la aproximación de soluciones, ya que muchos problemas matemáticos complejos (como ecuaciones diferenciales o integrales) no tienen una solución exacta que pueda obtenerse de forma analítica o en un tiempo razonable.
- Está estrechamente ligado a la computación, pues los algoritmos numéricos se implementan y ejecutan en ordenadores, usando operaciones aritméticas simples (suma, resta, multiplicación, división).

Un concepto fundamental en esta área es el análisis de errores, que busca cuantificar y controlar la diferencia entre la solución aproximada y la solución exacta del problema.

Objetivos del Análisis Numérico

El objetivo principal es proporcionar herramientas y métodos eficientes para resolver problemas complejos que surgen en el mundo real. Sus metas clave incluyen:

1. **Encontrar Soluciones Aproximadas:** Su objetivo primordial es obtener soluciones numéricas para problemas matemáticos que no pueden resolverse de manera exacta o que son demasiado laboriosos de resolver de forma analítica.
2. **Optimizar Eficiencia:** Diseñar algoritmos que no solo sean precisos, sino también eficientes (rápidos) y de bajo costo computacional. Esto es crucial para problemas con grandes volúmenes de datos.
3. **Controlar el Error:** Desarrollar criterios y técnicas para cuantificar, controlar y minimizar el error (de redondeo, de truncamiento) en las aproximaciones, asegurando que la solución sea lo más precisa y confiable posible.

4. **Resolver Sistemas Complejos:** Abordar el cálculo de raíces de ecuaciones, la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y no lineales, la diferenciación e integración numérica, y la solución de ecuaciones diferenciales.

Aplicaciones del Análisis Numérico

El Análisis Numérico es la base de la simulación y el modelado en prácticamente todas las disciplinas científicas y de ingeniería.

Área de Aplicación	Ejemplos Específicos
Ingeniería Estructural	Análisis de esfuerzos y deformaciones en puentes, edificios y aeronaves (usando el Método de Elementos Finitos - MEF).
Física y Meteorología	Simulación de fenómenos físicos, como el flujo de fluidos (aerodinámica, hidrodinámica), la propagación del calor y las predicciones meteorológicas.
Finanzas	Modelado de la volatilidad del mercado, valoración de derivados y gestión de riesgos (Métodos de Monte Carlo).
Ciencia de Datos e IA	Optimización numérica para entrenar modelos de aprendizaje automático (Machine Learning), procesamiento de grandes volúmenes de datos (Big Data) y procesamiento de imágenes y señales.
Aeroespacial	Cálculo de trayectorias de satélites y naves espaciales.
Medicina	Modelado de órganos, simulación de la difusión de fármacos y análisis de imágenes médicas.

A continuación, veremos cómo podemos hacer uso del Análisis Numérico en la determinación de las raíces de una ecuación cuadrática. Aunque las ecuaciones cuadráticas tienen una solución analítica exacta (la fórmula general), son un excelente ejemplo para ilustrar cómo funcionan los métodos iterativos del Análisis Numérico para encontrar las raíces (soluciones) de una función.

Usaremos el Método de Newton-Raphson, conocido por su rápida convergencia.

Ejercicio Práctico: Solución por el Método de Newton-Raphson

1. El Problema

Queremos encontrar una de las raíces de la siguiente ecuación cuadrática:

$$f(x) = x^2 - 3x - 4 = 0$$

(Solución Analítica (Exacta) para referencia: Usando la fórmula cuadrática, las raíces son $x_1 = 4$; $x_2 = -1$)

2. El Método Numérico

El Método de Newton-Raphson se basa en la fórmula iterativa:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Donde:

- x_n es la aproximación actual.
- x_{n+1} es la siguiente y mejor aproximación.
- $f(x)$ es la función.
- $f'(x)$ es la derivada de la función.

3. Preparación de la Función y su Derivada

Función $f(x)$:

$$f(x) = x^2 - 3x - 4 = 0$$

Derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = 2x - 3$$

Fórmula de Iteración: Sustituimos $f(x)$ y $f'(x)$ en la fórmula de Newton-Raphson:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 3x_n - 4}{2x_n - 3}$$

4. Ejecución del Proceso Iterativo

Para usar un método numérico, necesitamos un valor inicial, llamado **semilla** o **aproximación inicial** (x_0). Intentaremos encontrar la raíz positiva ($x = 4$).

Elegimos un valor inicial:

$$X_0 = 3$$

La fórmula de Newton-Raphson calcula la intersección de esta tangente con el eje x para obtener x_1 :

$$x_1 = 3 - \frac{f(3)}{f'(3)} = 3 - \frac{-4}{3} = 3 + \frac{4}{3} = \frac{9 + 4}{3} = \frac{13}{3} = 4,3333333$$

$$x_1 \approx 4,333333$$

Análisis de la Convergencia (Velocidad)

Dado que el Método de Newton-Raphson posee convergencia cuadrática (muy rápida), y el valor inicial $x_0 = 3$ ya está muy cerca de la raíz $x = 4$, se espera que:

1. **Convergencia:** El método convergerá a la raíz $x = 4$.
2. **Velocidad:** La convergencia será extremadamente rápida (probablemente en 3 o 4 iteraciones se alcance una alta precisión de 6 o más decimales).

n	x_n (Aprox.)	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1} (Aprox.)
0	3	-4	3	4,333333
1	4,333333	4,777778	5,666667	3,5
2	3,5	-1,750	4	3,9375
3	3,9375	-0,371094	4,875	4,013063
4	4,013063	0,65561	5,026126	4
5	4	0	5	4

Se confirma que el método converge a $x = 4$ en muy pocas iteraciones.

Se utiliza una **condición o criterio de parada** (también llamada **criterio de convergencia**) para detener el proceso cuando se alcanza una aproximación lo suficientemente buena, es decir, se detendrá la iteración cuando: $x_n \cong x_{n+1}$