CENGAGE Learning™

11e

Anderson

Sweeney

Williams

Camm

Martin

Métodos cuantitativos para los negocios

Desarrollo de modelos

Los **modelos** son representaciones de objetos o situaciones reales y pueden presentarse en varias formas. Por ejemplo, un modelo a escala de un avión es una representación de un avión real. De modo parecido, un camioncito de juguete es un modelo de un camión real. El modelo de avión y el camioncito de juguete son ejemplos de modelos que son réplicas físicas de objetos reales. En la terminología del modelado, las réplicas físicas se conocen como **modelos icónicos**.

Una segunda clasificación incluye modelos que tienen la misma forma física pero no la misma apariencia que el objeto modelado. Estos modelos se conocen como **modelos análogos**. El velocímetro de un automóvil es un modelo análogo; la posición de la aguja en el cuadrante representa la rapidez del automóvil. Un termómetro es otro modelo análogo que representa la temperatura.

Una tercera clasificación de modelos, el tipo que estudiaremos principalmente, incluye representaciones de un problema mediante un sistema de símbolos y relaciones o expresiones matemáticas. Estos modelos se conocen como **modelos matemáticos** y son parte fundamental de cualquier método cuantitativo para la toma de decisiones. Por ejemplo, la utilidad o ganancia total de la venta de un producto puede determinarse al multiplicar la utilidad por unidad por la cantidad vendida. Suponga que x es el número de unidades producidas y vendidas, y P la utilidad total. Con una utilidad de $10 por unidad, el modelo matemático siguiente define las ganancias totales obtenidas al producir y vender x unidades:

$$P = 10x \tag{1.1}$$

El propósito, o valor, de cualquier modelo es que nos permite hacer inferencias acerca de la situación real al estudiar y analizar el modelo. Por ejemplo, un diseñador de aviones podría probar un modelo icónico de un nuevo avión en un túnel de viento para saber cuáles son las características potenciales de vuelo del avión de tamaño natural. Del mismo modo, un modelo matemático se puede utilizar para hacer inferencias sobre cuánta utilidad se ganará si se vende una cantidad específica de un producto en particular. De acuerdo con el modelo matemático de la ecuación 1.1, esperaríamos que la venta de tres unidades del producto ($x = 3$) diera como resultado una utilidad $P = 10(3) = \$30$.

En general, la experimentación con modelos requiere menos tiempo y es menos cara que experimentar con el objeto o la situación real. Un modelo de avión desde luego es más rápido y menos caro de construir y estudiar que el avión de tamaño natural. Asimismo, el modelo matemático de la ecuación 1.1 permite una identificación rápida de las expectativas esperadas sin requerir realmente que el gerente produzca y venda x unidades. Los modelos también reducen los riesgos asociados con la experimentación en la situación real. De hecho, los malos diseños o las malas decisiones que provocan que un modelo de avión choque o un modelo matemático prevea una pérdida de $10,000 pueden evitarse en la situación real.

El valor de las conclusiones y decisiones basadas en el modelo dependen de lo bien que el modelo represente la situación real. Cuanto más fiel sea la representación del modelo de

Herbert A. Simon, ganador del Premio Nobel de Economía y experto en la toma de decisiones, afirmó que un modelo matemático no tiene que ser exacto; sólo tiene que ser lo bastante aproximado para proporcionar mejores resultados de los que pueden obtenerse mediante el sentido común.

avión respecto al avión real, más precisas serán las conclusiones y predicciones. De igual modo, cuanto más fielmente represente el modelo matemático la relación utilidad-volumen verdadera de la empresa, más precisas serán las proyecciones de las utilidades.

Dado que este libro trata sobre el análisis cuantitativo basado en modelos matemáticos, estudiemos más de cerca el proceso de modelado matemático. Cuando empezamos a considerar un problema administrativo, por lo general, encontramos que la fase de definición del problema conduce a un objetivo específico, como la maximización de las utilidades o la minimización de los costos, y posiblemente a un conjunto de limitaciones o **restricciones**, tales como las capacidades de producción. El éxito del modelo matemático y del enfoque cuantitativo dependerá en gran medida de la precisión con que puedan expresarse el objetivo y las restricciones de las relaciones o ecuaciones matemáticas.

La expresión matemática que define la cantidad a maximizar o minimizar se conoce como **función objetivo**. Por ejemplo, suponga que x denota el número de unidades producidas y vendidas cada semana, y el objetivo de la empresa es maximizar la utilidad semanal total. Con una ganancia de \$10 por unidad, la función objetivo es $10x$. Sería necesario hacer una restricción de la capacidad de producción si, por ejemplo, se requieren cinco horas para producir cada unidad y sólo se dispone de 40 horas por semana. La restricción de la capacidad de producción está determinada por la fórmula

$$5x \leq 40 \tag{1.2}$$

El valor $5x$ es el tiempo total requerido para producir x unidades; el símbolo $\leq$ indica que el tiempo de producción requerido debe ser menor o igual que las 40 horas disponibles.

El problema o la interrogante de decisión es el siguiente: ¿cuántas unidades del producto deben producirse cada semana para maximizar las utilidades? Un modelo matemático completo para este sencillo problema de producción es

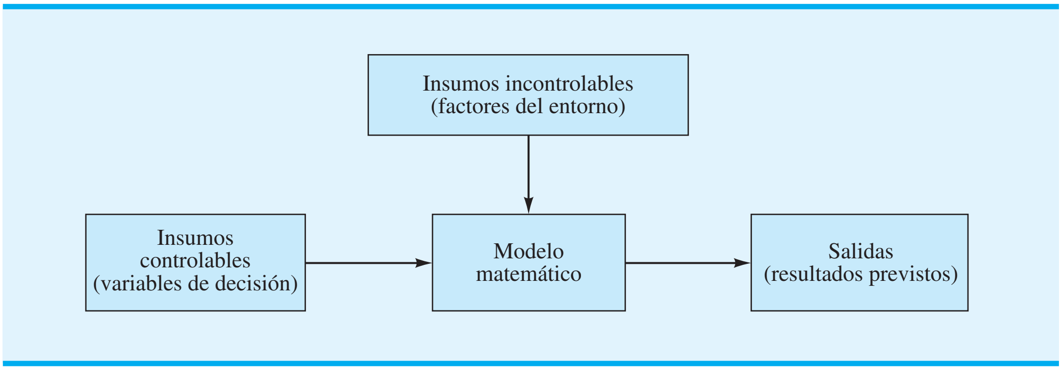
$$\begin{array}{lll} \text{Maximizar} & 10x & \text{función objetivo} \\ \text{sujeto a (s.a.)} & & \\ & \left.\begin{array}{r} 5x \leq 40 \\ x \geq 0 \end{array}\right\} & \text{restricción} \end{array}$$

La restricción $x \geq 0$ requiere que la cantidad de producción x sea mayor o igual que cero, lo cual tan sólo reconoce el hecho de que no es posible fabricar un número negativo de unidades. La solución óptima a este modelo se calcula fácilmente y es $x = 8$, con una utilidad asociada de \$80. Este modelo es un ejemplo de modelo de programación lineal. En capítulos posteriores se estudiarán modelos matemáticos más complicados y aprenderemos a resolverlos en situaciones donde las respuestas no son tan obvias.

En el modelo matemático anterior, la utilidad por unidad (\$10), el tiempo de producción por unidad (5 horas) y la capacidad de producción (40 horas) son factores del entorno que no están bajo el control del gerente o de quien toma las decisiones. Estos factores pueden afectar tanto a la función objetivo como a las restricciones y se conocen como **insumos incontrolables** del modelo. Los insumos que están controlados o determinados por quien toma las decisiones se conocen como **insumos controlables** del modelo. En el ejemplo expuesto, la cantidad de producción x es el insumo controlable del modelo. Los insumos controlables son alternativas de decisión especificadas por el gerente y por tanto también se llaman **variables de decisión** del modelo.

Una vez que se especifican todos los insumos controlables e incontrolables, se puede evaluar la función objetivo y las restricciones, y con ello, determinar la salida del modelo. En este sentido, la salida del modelo es sencillamente la proyección de lo que ocurriría si dichos factores del entorno y decisiones en particular ocurrieran en la situación real. En la figura 1.4 aparece un diagrama de flujo de cómo los insumos controlables e incontrolables

FIGURA 1.4 DIAGRAMA DE FLUJO DEL PROCESO DE TRANSFORMACIÓN DE LOS INSUMOS DEL MODELO EN SALIDAS

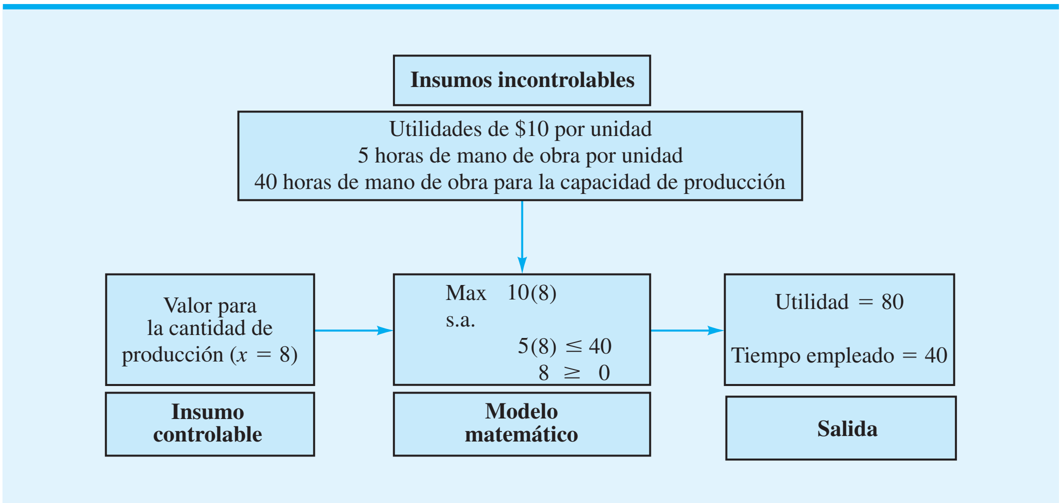


se transforman en salidas mediante el modelo matemático. Un diagrama de flujo similar que muestra los detalles específicos para el modelo de producción se presenta en la figura 1.5. Observe que hemos utilizado “Max” como abreviación de maximizar.

Como se expuso antes, los insumos incontrolables son aquellos en las que quien toma las decisiones no puede influir. Los insumos controlables e incontrolables específicos de un modelo dependen del problema o de la situación de toma de decisiones particular. En el problema de producción, el tiempo de producción disponible (40) es un insumo incontrolable. Sin embargo, si fuera posible contratar a más empleados o trabajar tiempo extra, el número de horas de producción sería un insumo controlable y, por consiguiente, una variable de decisión en el modelo.

Los insumos incontrolables pueden conocerse con exactitud o ser inciertas y estar sujetas a variación. Si se conocen todos los insumos incontrolables de un modelo y éstos no pueden variar, se trata de un **modelo determinista**. Las tasas de impuestos al ingreso empresarial no están bajo la influencia del gerente y, por tanto, constituyen un insumo incontrolable en muchos modelos de decisión. Debido a que estas tasas son conocidas y fijas (al menos a corto plazo), un modelo matemático con tasas de impuestos al ingreso empresarial como el único insumo incontrolable sería un modelo determinista. La característica distintiva de un modelo determinista es que los valores de los insumos incontrolables se conocen con anticipación.

FIGURA 1.5 DIAGRAMA DE FLUJO DEL MODELO DE PRODUCCIÓN



CAPÍTULO 7

Introducción a la programación lineal

CONTENIDO

La programación lineal es un método de solución de problemas desarrollado para ayudar a los gerentes a tomar decisiones. En el competitivo entorno de negocios actual pueden encontrarse varias aplicaciones de programación lineal. Por ejemplo, Eastman Kodak utiliza la programación lineal para determinar dónde fabricar productos en sus instalaciones de todo el mundo, y GE Capital la utiliza para determinar la estructuración de arrendamiento óptima. Marathon Oil Company utiliza la programación lineal para la mezcla de gasolina y evaluar la economía de una nueva terminal o tubería de distribución. El artículo de MC en acción, "Modelo de recolección de árboles en MeadWestvaco Corporation", proporciona otro ejemplo del uso de la programación lineal. Después, el siguiente artículo de MC en Acción ilustra cómo Hanshin Expressway Public Corporation utiliza la programación lineal para el control de tráfico en una autopista de cuota urbana en Osaka, Japón.

Para ilustrar algunas de las propiedades que tienen en común todos los problemas de programación lineal, considere las siguientes aplicaciones típicas:

1. Un fabricante quiere elaborar un programa de producción y una política de inventario que satisfaga la demanda de ventas en periodos futuros. En términos ideales, el programa y la política permitirán a la empresa satisfacer la demanda y al mismo tiempo *minimizar* los costos totales de producción e inventario.
2. Un analista financiero debe seleccionar un portafolio entre diversas alternativas de acciones e inversiones. Al analista le gustaría establecer el portafolio que *maximice* el rendimiento sobre la inversión.
3. Un gerente de marketing quiere determinar cómo asignar mejor un presupuesto de publicidad fijo entre medios de publicidad alternos como la radio, la televisión, el periódico y las revistas. Al gerente le gustaría determinar la combinación de medios que *maximice* la efectividad de la publicidad.
4. Una empresa tiene almacenes en varias ubicaciones. Dadas las demandas específicas de los clientes, a la empresa le gustaría determinar cuánto debe enviar cada almacén a cada cliente, de modo que los costos del transporte local se *minimicen.*

Estos ejemplos son sólo algunas de las situaciones en las cuales la programación lineal se ha utilizado a satisfacción, pero ilustran la diversidad de las aplicaciones de la programación lineal. Un escrutinio meticuloso revela una propiedad básica que tienen todos en común. En cada ejemplo nos interesa la *maximización* o *minimización* de alguna cantidad. En el ejemplo 1, el fabricante quería minimizar los costos; en el ejemplo 2, el analista financiero quería maximizar el rendimiento sobre la inversión; en el ejemplo 3, el gerente de marketing quería maximizar la efectividad de la publicidad, y en el ejemplo 4, la empresa quería minimizar los costos de transporte totales. En todos los problemas de programación lineal, el objetivo es la maximización o minimización de alguna cantidad.

MC *en* ACCIÓN

*MODELO DE RECOLECCIÓN DE ÁRBOLES EN MEADWESTVACO CORPORATION**

MeadWestvaco Corporation es un productor importante de papel de alta calidad para revistas, libros, impresión comercial y formularios para negocios. La empresa también produce pulpa y madera, diseña y manufactura sistemas de empaque para los mercados de bebidas y otros productos de consumo, y es líder mundial en la producción de cartón cubierto y contenedores de mercancía. El Departamento de Análisis de Decisiones de MeadWestvaco elaboró e implementó análisis cuantitativos para ayudar a quienes toman decisiones, además de proporcionarles herramientas analíticas de métodos cuantitativos también hace un análisis y recomendaciones personales.

*Con base en información proporcionada por el doctor Edward P. Winkofsky de MeadWestvaco Corporation

(*continúa*)

MeadWestvaco utiliza los modelos cuantitativos para ayudar con la gerencia de largo alcance del bosque maderable de la empresa. Mediante el uso de programas lineales a gran escala, se elaboran planes de recolección de madera para cubrir un horizonte de tiempo importante. Estos modelos consideran las condiciones del mercado maderero, los requerimientos de la fabricación de papel, las capacidades de la recolección y los principios generales de gerencia forestal. Dentro de estas restricciones, el modelo llega a un programa de recolección y compra óptimo con base en el descuento del flujo de efectivo. Los programas alternos reflejan cambios en varios supuestos relacionados con el crecimiento forestal, la disponibilidad de madera y las condiciones económicas generales.

También se utilizan métodos cuantitativos en la elaboración de los insumos para los modelos de programación lineal. Los precios de la madera y los suministros, así como los requerimientos de la fábrica de papel deben pronosticarse a lo largo del horizonte de tiempo, y se utilizan técnicas de muestreo avanzadas para evaluar la propiedad de predios y proteger el crecimiento forestal. El programa de recolección, por tanto, se elabora con métodos cuantitativos.

La programación lineal se conocía inicialmente como "programación en una estructura lineal". En 1948 Tjalling Koopmans le comentó a George Dantzig que el nombre era demasiado largo y que le sugería reducirlo a programación lineal. George Dantzig estuvo de acuerdo y fue así como el campo que ahora conocemos como programación lineal recibió su nombre.

Todos los problemas de programación lineal tienen también una segunda propiedad: las limitaciones o **restricciones** que limitan el grado en que se puede perseguir el objetivo. En el ejemplo 1 el fabricante está limitado por restricciones que requieren el cumplimiento con la demanda de productos y por restricciones que limitan la capacidad de producción. El problema del portafolio del analista financiero está restringido por la cantidad total de fondos de inversión disponibles y los montos máximos que se pueden invertir en cada acción o bono. La decisión de selección de medios del gerente de marketing está limitada por un presupuesto de publicidad fijo y la disponibilidad de los diversos medios. En el problema de transporte, el programa de envíos de costo mínimo está restringido por el suministro de productos diponibles en cada almacén. Por tanto, las restricciones son otra función general de los problemas de programación lineal.

7.1 Un problema sencillo de maximización

RMC, Inc. es una empresa pequeña que fabrica una variedad de productos químicos. En un proceso de producción particular se utilizan tres materias primas para elaborar dos productos: un aditivo para combustible y una base para solvente. El aditivo se vende a las compañías petroleras y se utiliza en la producción de gasolina y otros combustibles. La base para solvente se vende a una variedad de compañías de productos químicos y se usa en artículos de limpieza para el hogar y la industria. Las tres materias primas se mezclan para formar el aditivo para combustible y la base para solvente, como en la tabla 7.1, en la que se muestra que una tonelada de aditivo para combustible es una mezcla de 0.4 ton de material 1 y 0.6 ton de material 3, mientras que una tonelada de base para solvente es una mezcla de 0.5 ton de material 1, 0.2 ton de material 2 y 0.3 ton de material 3.

TABLA 7.1 REQUERIMIENTOS DE MATERIAL POR TONELADA PARA EL PROBLEMA DE RMC

	Producto	
	Aditivo para combustible	**Base para solvente**
Material 1	0.4	0.5
Material 2		0.2
Material 3	0.6	0.3

Se utilizan 0.6 ton de material 3 en cada tonelada de aditivo para combustible

La producción de RMC está restringida por una disponibilidad limitada de las tres materias primas. Para el periodo de producción actual, RMC cuenta con las siguientes cantidades de cada materia prima:

Material	**Cantidad disponible para producción**
Material 1	20 ton
Material 2	5 ton
Material 3	21 ton

Es importante entender que estamos maximizando la contribución a las utilidades, no las utilidades. Los costos indirectos y otros costos compartidos deben deducirse antes de llegar a una cifra definida de utilidad.

Debido al deterioro y a la naturaleza del proceso de producción, los materiales que no se utilizan en la producción actual son inútiles y deben desecharse.

El departamento de contabilidad analizó las cifras de producción, asignó todos los costos relevantes y llegó a precios para ambos productos que generarían una contribución a las utilidades[1] de $40 por cada tonelada de aditivo para combustible producido y $30 por cada tonelada producida de base para solvente. Utilicemos ahora la programación lineal para determinar la cantidad de toneladas de aditivo para combustible y de base solvente a producir con el fin de maximizar la contribución total a las utilidades.

Formulación del problema

La **formulación del problema** es el proceso de traducir una descripción verbal de un problema en un enunciado matemático. El enunciado matemático del problema se conoce como **modelo matemático**. El desarrollo de un modelo matemático apropiado es un arte que sólo puede dominarse con la práctica y la experiencia. Aunque cada problema tiene características únicas, la mayoría de ellos tiene muchas características comunes o parecidas. Como resultado, pueden ser útiles algunos lineamientos generales para el desarrollo de un modelo matemático. Ilustraremos estos lineamientos mediante el desarrollo de un modelo matemático para el problema de RMC.

Entender el problema a fondo El problema de RMC es relativamente fácil de entender. RMC quiere determinar cuánto de cada producto debe fabricar para maximizar la contribución total a las utilidades. El número de toneladas disponibles de los tres materiales que se requieren para fabricar los dos productos delimitan la cantidad de toneladas de cada producto que pueden elaborarse. Para entender los problemas más complejos se requiere más trabajo; sin embargo, entender el problema es el primer paso para desarrollar cualquier modelo matemático.

Describir el objetivo El objetivo de RMC es maximizar la contribución total a las utilidades.

Describir cada restricción Tres restricciones limitan el número de toneladas de aditivo para combustible y el número de toneladas de base para solvente que pueden producirse.

Restricción 1: el número de toneladas de material 1 empleadas debe ser menor o igual que las 20 toneladas disponibles.

Restricción 2: el número de toneladas de material 2 empleadas debe ser menor que o igual que las 5 toneladas disponibles.

Restricción 3: el número de toneladas de material 3 empleadas debe ser menor que o igual que las 21 toneladas disponibles.

[1]Desde una perspectiva contable, la contribución a las utilidades se describe de forma correcta como el margen de contribución por tonelada; los costos indirectos y otros costos compartidos no se han asignado a los costos del aditivo para combustible y de la base para solvente.

Definir las variables de decisión Las **variables de decisión** son los insumos controlables en el problema. Para el problema de RMC las dos variables de decisión son 1) el número de toneladas de aditivo para combustible producidas, y 2) el número de toneladas de base para solvente producidas. En el desarrollo del modelo matemático para el problema de RMC, se utilizará la siguiente notación para las variables de decisión:

F = número de toneladas de aditivo para combustible

S = número de toneladas de base para solvente

Escribir la función objetivo de las variables de decisión La contribución a las utilidades de RMC proviene de la producción de F toneladas de aditivo para combustible y S toneladas de base para solvente. Como RMC gana \$40 por cada tonelada de aditivo para combustible producida y \$30 por cada tonelada de base para solvente producida, la empresa ganará \$40F de la producción de aditivo para combustible y \$30S de la producción de base para solvente. Por tanto,

$$\text{Contribución total a las utilidades} = 40F + 30S$$

Como el objetivo, es decir maximizar la contribución total a las utilidades, es una función de las variables de decisión F y S, nos referimos a $40F + 30S$ como la **función objetivo**. Utilizando "Max" como una abreviatura de maximización, podemos escribir el objetivo de RMC como sigue:

$$\text{Max } 40F + 30S \tag{7.1}$$

Escribir las restricciones en función de las variables de decisión

Restricción 1:

$$\text{Toneladas del material 1 utilizadas} \leq \text{Toneladas del material 1 disponibles}$$

Cada tonelada de aditivo para combustible que RMC produce utiliza 0.4 ton de material 1. Por tanto, se utilizan $0.4F$ ton de material 1 para producir F ton de aditivo para combustible. Del mismo modo, cada tonelada de base para solvente que RMC produce utiliza 0.5 ton de material 1, así que se emplean $0.5S$ ton de material 1 para producir S ton de base para solvente. Por consiguiente, el número de toneladas de material 1 utilizado para producir F ton de aditivo para combustible y S ton de base para solvente es

$$\text{Toneladas de material 1 utilizadas} = 0.4F + 0.5S$$

Como se cuenta con 20 ton de material 1 disponibles para utilizar en la producción, el enunciado matemático de la restricción 1 es

$$0.4F + 0.5S \leq 20 \tag{7.2}$$

Restricción 2:

$$\text{Toneladas de material 2 empleadas} \leq \text{Toneladas de material 2 disponibles}$$

El aditivo para combustible no utiliza material 2, pero cada tonelada de base para solvente que RMC produce utiliza 0.2 ton de material 2, así que se utilizan $0.2S$ ton de material 2 para producir S ton de base para solvente. Por consiguiente, el número de toneladas de material 2 empleadas para producir F ton de aditivo para combustible y S ton de base para solvente es

$$\text{Toneladas de material 2 utilizadas} = 0.2S$$

Debido a que se dispone de 5 toneladas de material 2 para la producción, el enunciado matemático de la restricción 2 es

$$0.2S \leq 5 \qquad \textbf{(7.3)}$$

Restricción 3:

Toneladas de material 3 utilizadas $\leq$ Toneladas de material 3 disponibles

Cada tonelada de aditivo para combustible que RMC produce utiliza 0.6 ton de material 3. Por tanto, se utilizan $0.6F$ ton de material 1 para producir F ton de aditivo para combustible. De manera similar, cada tonelada de base para solvente que RMC produce utiliza 0.3 ton de material 3, así que se emplean $0.3S$ ton de material 1 para producir S ton de base para solvente. Por consiguiente, el número de toneladas de material 3 empleadas para producir F ton de aditivo para combustible y S ton de base para solvente es

Toneladas de material 3 utilizadas $= 0.6F + 0.3S$

Dado que se dispone de 21 toneladas de material 3 para la producción, el enunciado matemático de la restricción 3 es

$$0.6F + 0.3S \leq 21 \qquad \textbf{(7.4)}$$

Añadir las restricciones de no negatividad RMC no puede producir una cantidad negativa de toneladas de aditivo para combustible ni una cantidad negativa de toneladas de base para solvente. Por tanto, se deben añadir **restricciones de no negatividad** para impedir que las variables de decisión F y S tengan valores negativos. Estas restricciones de no negatividad son

$$F \geq 0 \quad \text{y} \quad S \geq 0$$

Las restricciones de no negatividad son una característica general de los problemas de programación lineal y pueden escribirse de forma abreviada:

$$F, S \geq 0 \qquad \textbf{(7.5)}$$

Modelo matemático para el problema de RMC

Ahora está completa la formulación de problemas. Hemos tenido éxito al traducir la definición verbal del problema de RMC en el siguiente modelo matemático:

$$\begin{array}{ll}
\text{Max } 40F + 30S & \\
\text{Sujeto a (s.a.)} & \\
\quad 0.4F + 0.5S \leq 20 & \text{Material 1} \\
\quad \phantom{0.4F + {}} 0.2S \leq 5 & \text{Material 2} \\
\quad 0.6F + 0.3S \leq 21 & \text{Material 3} \\
\quad F, S \geq 0 &
\end{array}$$

Nuestra tarea ahora es encontrar la mezcla de productos (es decir, la combinación de F y S) que satisfaga todas las restricciones y, al mismo tiempo, produzca un valor máximo para la función objetivo. En cuanto se calculan los valores de F y S, encontraremos la solución óptima para el problema.

Este modelo matemático del problema de RMC es un **programa lineal**. El problema de RMC tiene un objetivo y restricciones que, como se dijo antes, son propiedades comunes de todos los programas lineales. Pero ¿cuál es la característica especial de este modelo matemático que lo hace un programa lineal? La característica especial que lo hace un programa lineal es que la función objetivo y todas las funciones de restricciones (los lados izquierdos de las desigualdades de restricción) son funciones lineales de las variables de decisión.

Las funciones matemáticas en las cuales la variable aparece en un término separado y se eleva a la primera potencia se llaman **funciones lineales**. La función objetivo ($40F + 30S$) es lineal porque cada variable de decisión aparece en un término separado y tiene un exponente de 1. La cantidad empleada del material 1 ($0.4F + 0.5S$) también es una función lineal de las variables de decisión por la misma razón. De modo parecido, las funciones en el lado izquierdo de las desigualdades de restricción del material 2 y el material 3 (las funciones de restricción) también son funciones lineales. Por tanto, la formulación matemática se conoce como programa lineal.

Trate de poner a prueba su capacidad para reconocer los tipos de relaciones matemáticas que se pueden encontrar en un programa lineal.

La *programación* lineal no tiene nada que ver con la programación de computadoras. El uso de la palabra *programación* significa “elegir un curso de acción”. La programación lineal consiste en elegir un curso de acción cuando el modelo matemático del problema contiene sólo funciones lineales.

NOTAS Y COMENTARIOS

1. Los tres supuestos necesarios para que un modelo de programación lineal sea apropiado son proporcionalidad, aditividad y divisibilidad. La *proporcionalidad* significa que la contribución a la función objetivo y la cantidad de recursos empleados en cada restricción son proporcionales al valor de la variable de decisión. La *aditividad* significa que el valor de la función objetivo y los recursos totales empleados se calculan al sumar la contribución de la función objetivo y los recursos empleados para todas las variables de decisión. La *divisibilidad* significa que las variables de decisión son continuas. El supuesto de divisibilidad más las restricciones de no negatividad significan que las variables de decisión pueden tomar cualquier valor mayor o igual que cero.
2. Los analistas cuantitativos formulan y resuelven una variedad de modelos matemáticos que contienen una función objetivo y una serie de restricciones. Los modelos de este tipo se conocen como *modelos de programación matemática.* Los modelos de programación lineal son un tipo especial de modelo de programación matemática en los que son lineales la función objetivo y todas las funciones de restricción.

7.2 Procedimiento de solución gráfica

Un problema de programación lineal que involucra sólo dos variables de decisión puede resolverse mediante un procedimiento de solución gráfica. Comencemos dicho procedimiento al trazar una gráfica que muestre las soluciones posibles (valores de F y S) para el problema de RMC. La gráfica de la figura 7.1 tiene los valores de F en el eje horizontal y los de S en el eje vertical. Cualquier punto en la gráfica puede identificarse por medio de sus valores de F y S, los cuales indican la posición del punto a lo largo de los ejes horizontal y vertical, respectivamente. Por tanto, cada punto en la gráfica corresponde a una solución posible. La solución $F = 0$ y $S = 0$ se conoce como el origen. Debido a que tanto F como S deben ser no negativos, la gráfica de la figura 7.1 sólo muestra las soluciones en que $F \geq 0$ y $S \geq 0$.

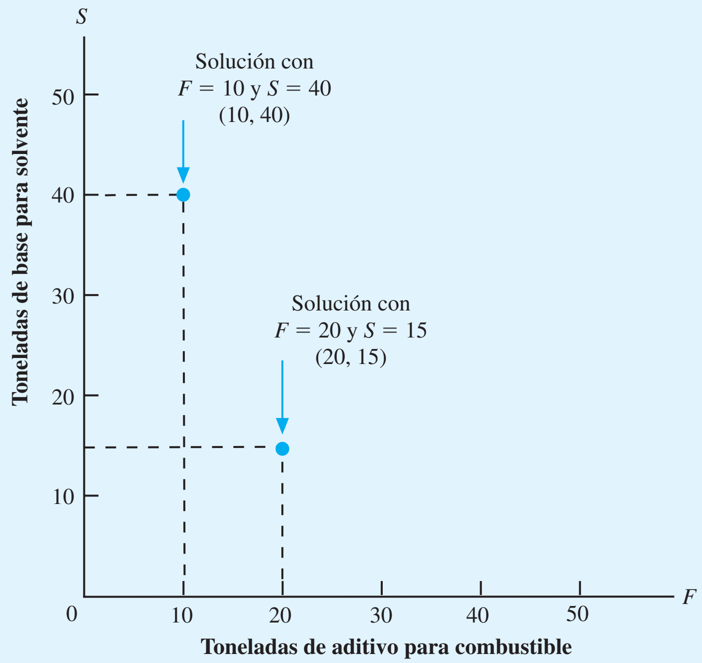
Antes determinamos que la desigualdad que representa la restricción del material 1 era

$$0.4F + 0.5S \leq 20$$

Para mostrar todas las soluciones que satisfacen esta relación, empezamos trazando la gráfica de la recta que corresponde a la ecuación

$$0.4F + 0.5S = 20$$

FIGURA 7.1 GRÁFICA QUE MUESTRA DOS SOLUCIONES PARA EL PROBLEMA DE DOS VARIABLES DE RMC



Trazamos la gráfica de esta ecuación al identificar dos puntos que satisfagan esta ecuación y luego trazar una recta que pase por los puntos. Si establecemos $F = 0$ y calculamos S, obtenemos $0.5S = 20$ o $S = 40$; por consiguiente, la solución ($F = 0$, $S = 40$) satisface la ecuación anterior. Para encontrar una segunda solución que satisfaga esta ecuación, establecemos $S = 0$ y calculamos F. Al hacerlo, obtenemos $0.4F = 20$, o $F = 50$. Por tanto, una segunda solución que satisface la ecuación es ($F = 50$, $S = 0$). Con estos dos puntos, ahora podemos trazar una recta, a la cual llamamos *recta de restricción del material 1,* como muestra la figura 7.2.

Recuerde que la desigualdad que representa la restricción del material 1 es

$$0.4F + 0.5S \leq 20$$

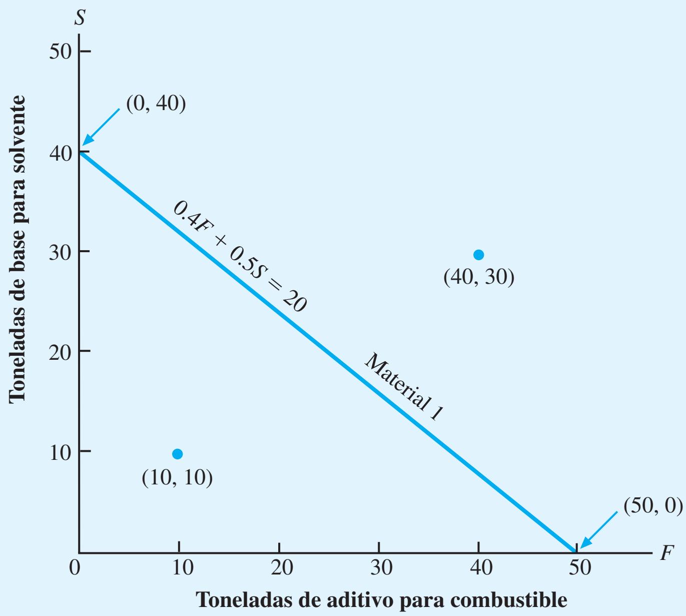
¿Puede identificar todas las soluciones que satisfacen esta restricción? Primero observe que cualquier punto en la recta $0.4F + 0.5S = 20$ debe cumplir con la restricción. Pero, ¿dónde están las soluciones que satisfacen $0.4F + 0.5S < 20$? Considere dos soluciones ($F = 10$, $S = 10$) y ($F = 40$, $S = 30$). La figura 7.2 muestra que la primera solución está por debajo de la recta de restricción y la segunda solución está por encima de la misma. ¿Cuál de estas soluciones satisface la restricción del material 1? Para ($F = 10$, $S = 10$) tenemos

$$0.4F + 0.5S = 0.4(10) + 0.5(10) = 9$$

Dado que 9 toneladas son menores que las 20 toneladas de material 1 disponibles, la solución $F = 10$, $S = 10$ cumple con la restricción. Para $F = 40$ y $S = 30$ tenemos

$$0.4F + 0.5S = 0.4(40) + 0.5(30) = 31$$

FIGURA 7.2 RECTA DE RESTRICCIÓN DEL MATERIAL 1



Las 31 toneladas son mayores que las 20 toneladas disponibles, así que la solución $F = 40$, $S = 30$ no satisface la restricción.

Ahora usted está en condiciones de trazar una recta de restricción y encontrar los puntos de solución que satisfacen la restricción. Resuelva el problema 2.

Si una solución en particular satisface la restricción, todas las demás soluciones del mismo lado de la recta de restricción también la satisfarán. Si una solución en particular no cumple con la restricción, todas las demás soluciones del mismo lado de la recta de restricción tampoco cumplirán con la restricción. Por tanto, sólo se necesita evaluar una solución para determinar cuál lado de una recta de restricción proporciona soluciones que satisfacen la restricción. El área sombreada de la figura 7.3 muestra todas las soluciones que satisfacen la restricción del material 1.

A continuación se identifican todas las soluciones que satisfacen la restricción del material 2:

$$0.2S \leq 5$$

Empezamos con el trazado de la recta de restricción $0.2S = 5$. Como esta ecuación es equivalente a la ecuación $S = 25$, simplemente trazamos una recta cuyo valor de S sea 25 para cada valor de F; esta recta es paralela al eje horizontal y está 25 unidades por encima de la misma. La figura 7.4 muestra la recta que corresponde a la restricción del material 2. Siguiendo el enfoque que utilizamos para la restricción del material 1, observamos que sólo las soluciones por encima y por debajo de la recta satisfarán la restricción del material 2; por tanto, en la figura 7.4 el área sombreada corresponde a las soluciones que satisfacen esta restricción.

Asimismo, podemos determinar las soluciones que satisfacen la restricción del material 3. La figura 7.5 muestra el resultado. Como práctica, trace la gráfica de las soluciones viables que satisfacen la restricción del material 3 y determine si su resultado concuerda con el resultado mostrado en la figura 7.5.

Ahora tenemos tres gráficas separadas que indican las soluciones que satisfacen cada una de las tres restricciones. En un problema de programación lineal, debemos identificar

FIGURA 7.3 SOLUCIONES QUE SATISFACEN LA RESTRICCIÓN DEL MATERIAL 1

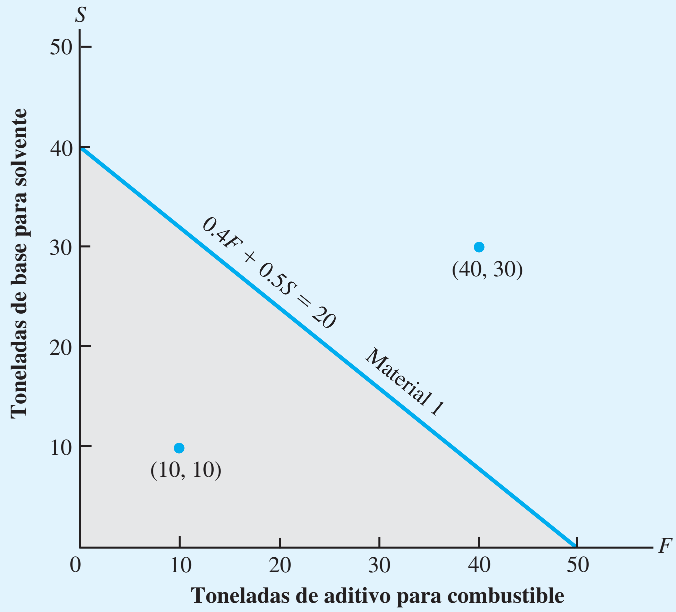


FIGURA 7.4 SOLUCIONES QUE SATISFACEN LA RESTRICCIÓN DEL MATERIAL 2

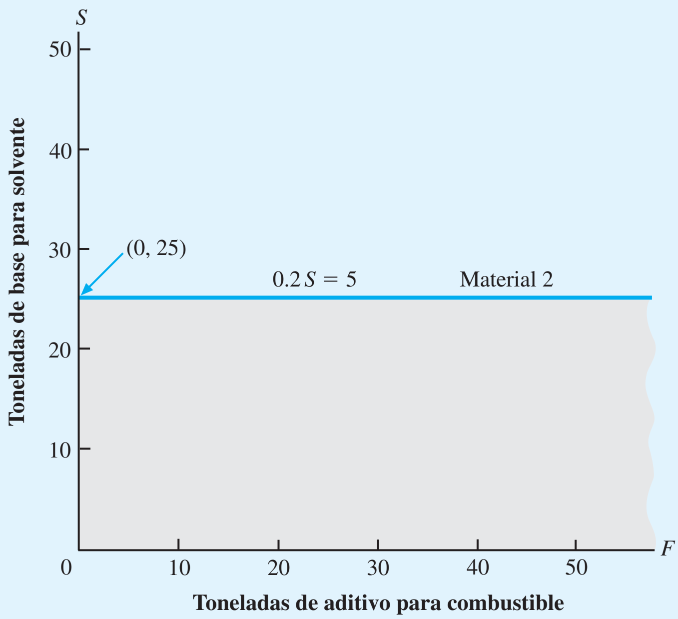
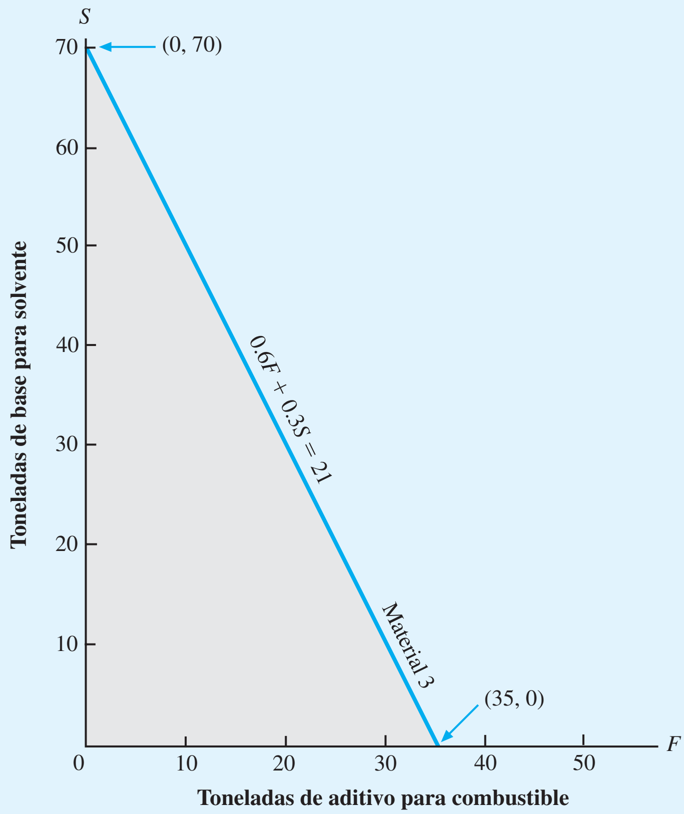


FIGURA 7.5 SOLUCIONES QUE SATISFACEN LA RESTRICCIÓN DEL MATERIAL 3



las soluciones que satisfacen *todas* las restricciones *simultáneamente.* Para hallar estas soluciones, podemos trazar las tres restricciones en una gráfica y observar el área que contiene los puntos que sí satisfacen todas las restricciones de forma simultánea.

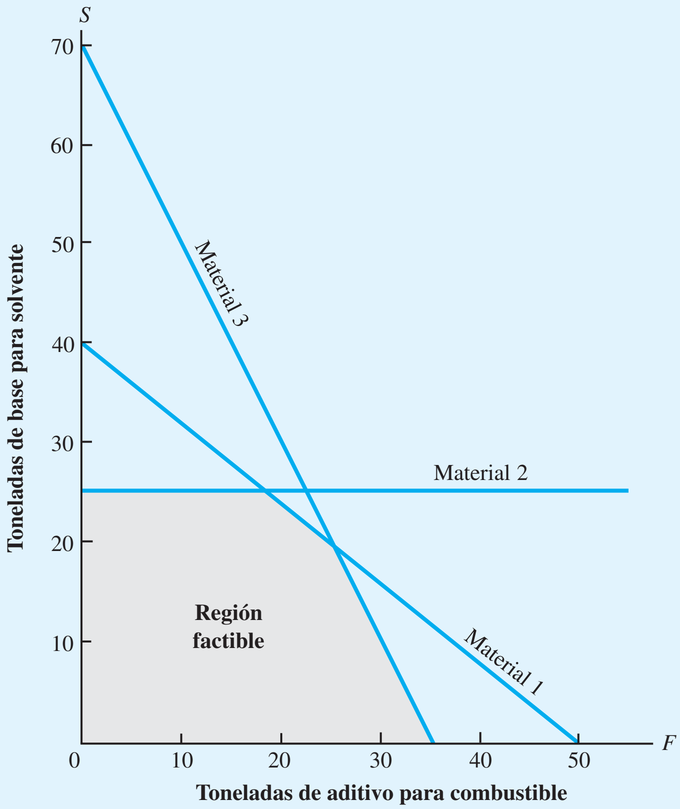
Las gráficas de las figuras 7.3, 7.4 y 7.5 pueden superponerse para obtener una gráfica con las tres restricciones. La figura 7.6 muestra esta gráfica de restricción combinada; la región sombreada incluye cada punto de solución que satisface todas las restricciones de forma simultánea. Como las soluciones que cumplen con todas las restricciones de forma simultánea se llaman **soluciones factibles**, la región sombreada se llama *región de solución factible,* o sencillamente **región factible**. Cualquier punto en el límite de la región factible o dentro de ésta es un *punto de solución factible* para el problema de programación lineal.

¿Dadas varias restricciones puede encontrar la región factible? Resuelva el problema 7.

Una vez identificada la región factible, estamos dispuestos a proseguir con el método de solución gráfica y obtener la solución óptima para el problema de RMC. Recuerde que la solución óptima para un problema de programación lineal es la solución factible que proporciona el mejor valor posible de la función objetivo. Comenzaremos el paso de optimización del procedimiento de solución gráfica al volver a trazar la región factible en una gráfica separada, la cual se muestra en la figura 7.7.

Un método para encontrar la solución óptima sería evaluar la función objetivo para cada solución factible; la solución óptima por ende es la que produce el valor más grande.

FIGURA 7.6 REGIÓN FACTIBLE PARA EL PROBLEMA DE RMC



La dificultad con este método es que el número infinito de soluciones factibles vuelve imposible la evaluación de todas las soluciones factibles. Por consiguiente, este procedimiento de prueba y error no se puede utilizar para identificar la solución óptima.

En vez de tratar de calcular la contribución a las utilidades para cada solución factible, seleccionamos un valor arbitrario para la contribución a las utilidades e identificamos todas las soluciones factibles que producen el valor seleccionado. Por ejemplo, ¿cuáles soluciones factibles proporcionan una contribución a las utilidades de \$240? Estas soluciones están determinadas por los valores de F y S en la región factible que proporcionará la función objetivo

$$40F + 30S = 240$$

Esta expresión es simplemente la ecuación de una recta. Por tanto, todas las soluciones factibles (F, S) que producen una contribución a las utilidades de \$240 deben estar en la recta. Aprendimos antes en esta sección cómo trazar la gráfica de una recta de restricción. El procedimiento para trazar la gráfica de las utilidades o la recta de la función objetivo es el mismo. Sea $F = 0$, vemos que S debe ser 8; por tanto, el punto de solución ($F = 0$, $S = 8$) está en la recta. De modo parecido, al establecer $S = 0$ vemos que el punto de solución ($F = 6$, $S = 0$) también está en la recta. Al trazar la recta que pasa por estos dos puntos identificamos todas las soluciones que tienen una contribución a las utilidades de \$240. En la figura 7.8 se presenta una gráfica de esta recta de utilidades, la cual muestra que un número infinito de combinaciones de producción factibles proporcionará una contribución a las utilidades de \$240.

FIGURA 7.7 REGIÓN FACTIBLE PARA EL PROBLEMA DE RMC

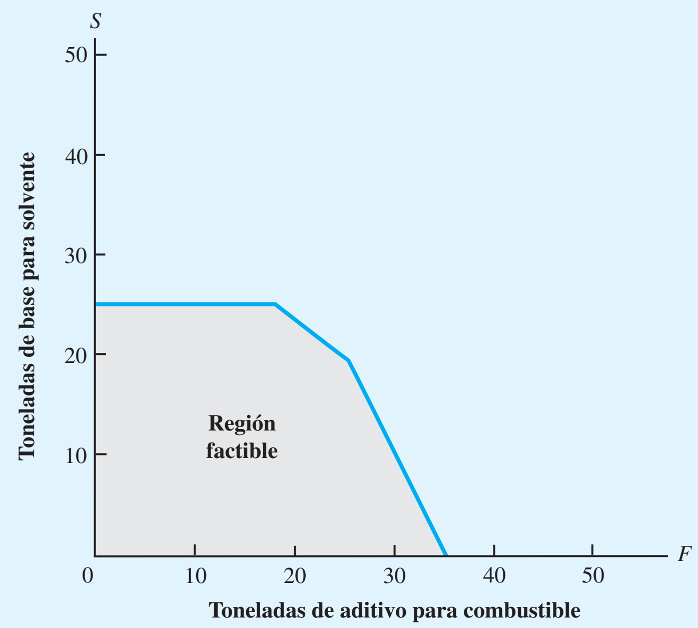
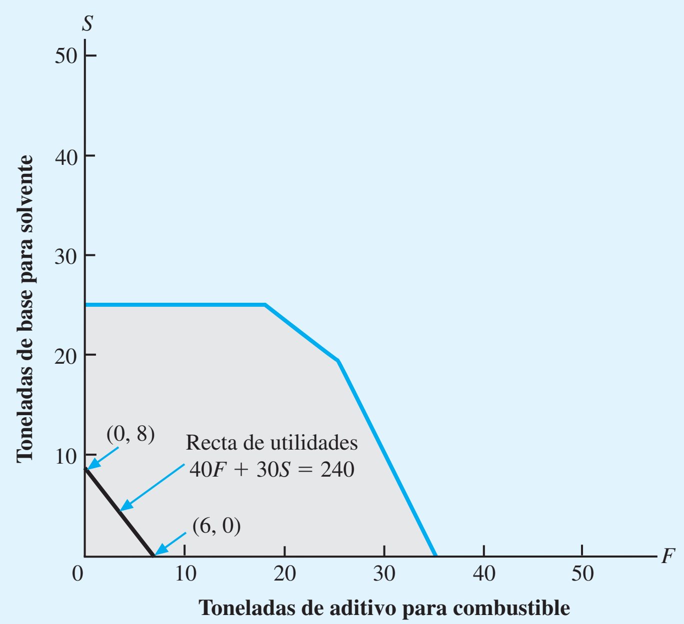


FIGURA 7.8 RECTA DE UTILIDADES DE $240 PARA EL PROBLEMA DE RMC



El objetivo es encontrar la solución factible que produzca la más alta contribución a las utilidades, así que proseguimos con la selección de contribuciones a las mayores utilidades y encontramos las soluciones que producen los valores establecidos. Por ejemplo, ¿cuáles soluciones proporcionan una contribución a las utilidades de $720? ¿Cuáles soluciones proporcionan una contribución a las utilidades de $1200? Para responder a estas preguntas debemos determinar los valores de F y S que están en las rectas de utilidades:

$$40F + 30S = 720 \text{ y } 40F + 30S = 1200$$

Con el procedimiento anterior para trazar la gráfica de las rectas de utilidades y restricciones, graficamos las rectas de utilidades de $720 y $1200 presentadas en la figura 7.9. No todos los puntos de solución en la recta de utilidades de $1200 están en la región factible, aunque algunos sí lo están, por lo que podemos obtener una solución factible que proporcione una contribución a las utilidades de $1200.

¿Podemos encontrar una solución factible que produzca una contribución a las utilidades incluso mayor? Mire con atención la figura 7.9 y haga algunas observaciones generales sobre las rectas de utilidades. Deberá poder identificar las propiedades siguientes: 1) las rectas de utilidades son *paralelas* entre sí, y 2) las rectas de utilidades con contribuciones a las utilidades mayores están más alejadas del origen.

Como las rectas de utilidades son paralelas y aquellas que son mayores están más alejadas del origen, podemos obtener soluciones que producen valores cada vez mayores para la función objetivo al continuar alejando la recta de utilidades del origen, pero manteniéndola paralela a las demás rectas de utilidades. Sin embargo, se llegará a un punto en que el alejamiento coloque a la recta de utilidades completamente fuera de la región factible. Dado que los puntos fuera de la región factible son inaceptables, el punto en la región factible que se encuentra en la recta de utilidades mayor es una solución óptima para el programa lineal.

Ahora usted está en condiciones de identificar el punto de solución óptima para el problema de RMC. Utilice una regla y mueva la recta de utilidades lo más lejos del origen que pueda. ¿Cuál es el último punto en la región factible? Este punto, que es la solución óptima, se muestra en la figura 7.10. Los valores óptimos para las variables de decisión son los valores de F y S en este punto.

FIGURA 7.9 RECTAS DE UTILIDADES SELECCIONADAS PARA EL PROBLEMA DE RMC

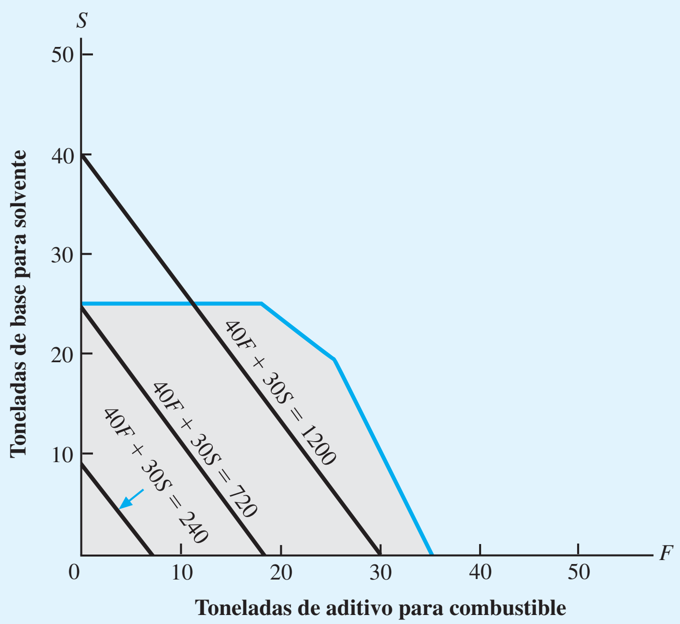
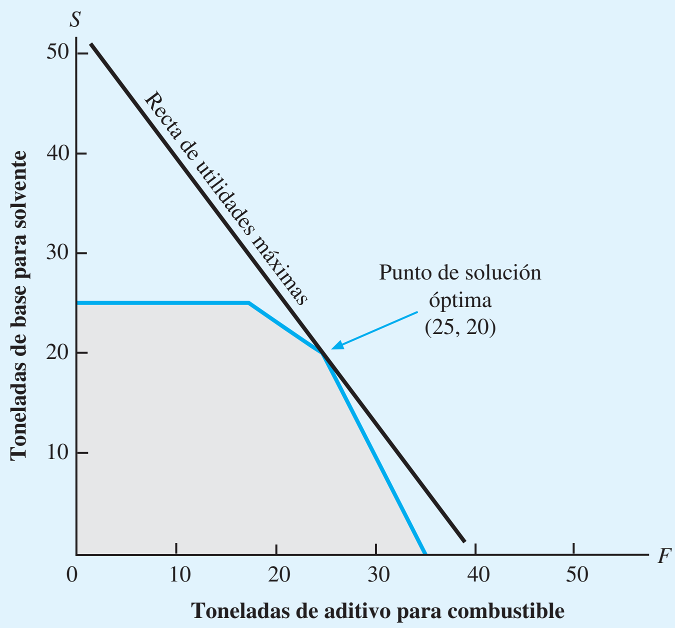


FIGURA 7.10 SOLUCIÓN ÓPTIMA PARA EL PROBLEMA DE RMC



Depende de la precisión de su gráfica, pero usted puede determinar o no los valores óptimos exactos de F y S directamente de la gráfica. Sin embargo, remítase a la figura 7.6 y observe que el punto de solución óptima para el ejemplo de RMC está en la *intersección* de las rectas de restricción del material 1 y del material 3. Es decir, la solución óptima está tanto en la recta de restricción del material 1,

$$0.4F + 0.5S = 20 \qquad \textbf{(7.6)}$$

como en la recta de restricción del material 3,

$$0.6F + 0.3S = 21 \qquad \textbf{(7.7)}$$

Por tanto, los valores de las variables de decisión F y S deben satisfacer ambas ecuaciones (7.6) y (7.7) de manera simultánea. Al utilizar la ecuación (7.6) y calcular F obtenemos

$$0.4F = 20S - 0.5S$$

o

$$F = 50 - 1.25S \qquad \textbf{(7.8)}$$

Si se sustituye esta expresión por F en la ecuación (7.7) y calculamos S

$$\begin{aligned} 0.6(50 - 1.25S) + 0.3S &= 21 \\ 30 - 0.75S + 0.3S &= 21 \\ -0.45S &= -9 \\ S &= 20 \end{aligned}$$

Al sustituir $S = 20$ en la ecuación (7.8) y calcular F se obtiene

$$F = 50 - 1.25(20)$$
$$= 50 - 25 = 25$$

Aun cuando la solución óptima para el problema de RMC contiene valores enteros para las variables de decisión, este resultado no siempre será así.

Por tanto, la ubicación exacta del punto de solución óptima es $F = 25$ y $S = 20$. Este punto de solución proporciona las cantidades de producción óptimas para RMC a 25 toneladas de aditivo para combustible y 20 toneladas de base para solvente y produce una contribución a las utilidades de $40(25) + 30(20) = \$1600$.

Para un problema de programación lineal con dos variables de decisión, usted puede determinar los valores exactos de estas variables para la solución óptima al utilizar primero el procedimiento gráfico para identificar el punto de solución óptima y luego resolver las dos ecuaciones simultáneas asociadas con este punto.

Una nota sobre la elaboración de gráficas

Un aspecto importante del método gráfico es la capacidad para trazar rectas que muestren las restricciones y la función objetivo del programa lineal. El procedimiento que utilizamos para trazar la gráfica de la ecuación de una recta es encontrar dos puntos cualesquiera que satisfagan la ecuación y luego trazar una recta que pase por los dos puntos. Para las restricciones de RMC, los dos puntos se encontraron fácilmente al establecer $F = 0$ y calcular la ecuación de restricción para S. Luego establecimos $S = 0$ y calculamos F. Para la recta de restricción del material 1

$$0.4F + 0.5S = 20$$

este procedimiento identificó los dos puntos ($F = 0, S = 40$) y ($F = 50, S = 0$). La recta de restricción del material 1 luego se graficó al trazar una recta que pasa por estos dos puntos.

Resuelva el problema 10 con el propósito de probar su capacidad para utilizar el procedimiento de solución gráfica para identificar la solución óptima y encontrar los valores exactos de las variables de decisión en la solución óptima.

Todas las rectas de restricción y de la función objetivo en los programas lineales de dos variables pueden graficarse si se identifican dos puntos en la recta. Sin embargo, encontrar estos dos puntos no siempre es tan fácil como se mostró en el problema de RMC. Por ejemplo, suponga que una empresa fabrica dos modelos de una computadora de bolsillo pequeña: el modelo Profesional (P) y el Asistente (A). La gerencia necesita 50 unidades del modelo Profesional para su personal de ventas, y espera que las ventas del modelo Profesional sean menores o iguales que 50% de las ventas del modelo Asistente. Una restricción que impone este requerimiento es

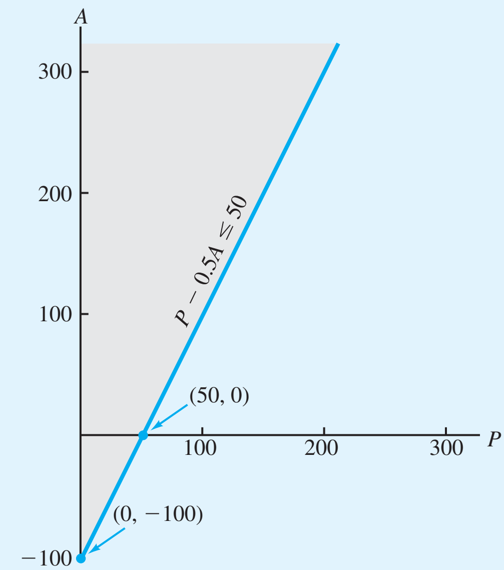
$$P - 50 \leq 0.5A$$

o

$$P - 0.5A \leq 50$$

Si utilizamos la forma de igualdad de la restricción y se establece que $P = 0$, encontramos que el punto ($P = 0, A = -100$) está en la recta de restricción. Al establecer $A = 0$ encontramos un segundo punto ($P = 50, A = 0$) en la recta de restricción. Si sólo hemos trazado la porción no negativa ($P \geq 0, A \geq 0$) de la gráfica, el primer punto ($P = 0, A = -100$) no puede trazarse debido a que $A = -100$ no está en la gráfica. Siempre que tenemos dos puntos en la recta, pero uno o dos de los puntos no puede trazarse en la porción no negativa de la gráfica, el método más sencillo es agrandar la gráfica. En este ejemplo el punto ($P = 0, A = -100$) puede trazarse al extender la gráfica para incluir el eje A negativo. Una vez que se localizan los dos puntos que satisfacen la ecuación de restricción, se puede trazar la recta. La recta de restricción y las soluciones pueden satisfacer la restricción $P - 0.5A \leq 50$, se muestran en la figura 7.11.

FIGURA 7.11 SOLUCIONES QUE SATISFACEN LA RESTRICCIÓN $P - 0.5A \leq 50$



Como otro ejemplo, considere un problema que involucra dos variables de decisión, R y T. Suponga que el número de unidades R producidas tiene que ser como mínimo igual al número de unidades T producidas. Una restricción que impone este requerimiento es

$$R \geq T$$

o

$$R - T \geq 0$$

¿Puede trazar una recta de restricción cuando el origen está en la recta de restricción misma? Resuelva el problema 5.

Para encontrar todas las restricciones que satisfagan la restricción como una igualdad, primero establecemos $R = 0$ y calculamos T. Este resultado muestra que el origen ($T = 0$, $R = 0$) está en la recta de restricción. Al establecer $T = 0$ y calcular R se obtiene el mismo punto. Sin embargo, podemos obtener un segundo punto en la recta al establecer T igual a cualquier valor diferente de cero y luego calcular R. Por ejemplo, si establecemos que $T = 100$ y calculamos R, encontramos que el punto ($T = 100$, $R = 100$) está en la recta. Con los dos puntos ($R = 0$, $T = 0$) y ($R = 100$, $T = 100$), puede trazarse la recta de restricción $R - T = 0$ y las soluciones que satisfacen la restricción $R - T \geq 0$, como se aprecia en la figura 7.12.

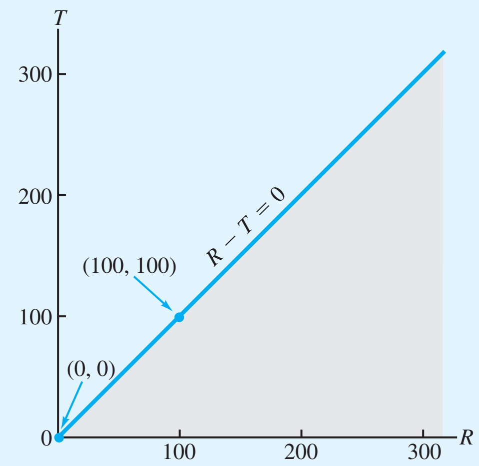
Resumen del procedimiento de solución gráfica para problemas de maximización

Como práctica adicional en el uso del procedimiento de solución gráfica, resuelva el problema 24.

Como hemos visto, el procedimiento de solución gráfica es un método para resolver problemas de programación lineal de dos variables como el problema de RMC. Los pasos del procedimiento de solución gráfica para un problema de maximización se resumen aquí:

1. Prepare una gráfica para cada restricción que muestre las soluciones que satisfacen la restricción.
2. Determine la región factible al identificar las soluciones que satisfacen todas las restricciones de forma simultánea.

FIGURA 7.12 SOLUCIONES FACTIBLES PARA LA RESTRICCIÓN $R - T \geq 0$



3. Trace una recta de la función objetivo que muestre los valores de las variables de decisión que producen un valor específico para la misma.
4. Mueva las rectas paralelas de la función objetivo hacia valores mayores de esta función hasta que la recta quede completamente fuera de la región factible.
5. Cualquier solución factible en la recta de la función objetivo con el valor mayor encontrado mediante el procedimiento anterior, es una solución óptima.

Variables de holgura

Además de la solución óptima y su contribución a las utilidades asociadas, los gerentes de RMC querrán información sobre los requerimientos de producción para los tres materiales. Podemos determinar esta información al sustituir los valores de la solución óptima ($F = 25, S = 20$) en las restricciones del programa lineal.

Restricción	Toneladas requeridas para $F = 25, S = 20$ ton	Toneladas disponibles	Toneladas sin utilizar
Material 1	$0.4(25) + 0.5(20) = 20$	20	0
Material 2	$0.2(20) = 4$	5	1
Material 3	$0.6(25) + 0.3(20) = 21$	21	0

Por tanto, la solución óptima indica a la gerencia que la producción de 25 toneladas de aditivo para combustible y 20 toneladas de base para solvente requerirán todo el material 1 y material 3 disponibles pero sólo 4 de las 5 toneladas del material 2. La tonelada que queda sin utilizar del material 2 se conoce como *holgura*. En la terminología de la programación lineal, cualquier capacidad sin utilizar o desocupada para una restricción de $\leq$ se conoce como una *holgura asociada con la restricción.* Por ende, la restricción del material 2 tiene una holgura de 1 tonelada.

¿Puede identificar la holgura asociada con una restricción? Resuelva el problema 24 parte (e).

Con frecuencia las variables, llamadas **variables de holgura**, se añaden a la formulación de un problema de programación lineal para representar la holgura, o capacidad sin utilizar, asociada con una restricción. La capacidad sin utilizar no contribuye en lo absoluto a las utilidades, por lo que las variables de holgura tienen coeficientes de cero en la función objetivo. De manera más general, las variables de holgura representan la diferencia entre el lado derecho y el lado izquierdo de una restricción de $\leq$. Después de la adición de tres variables de holgura, denotadas por S_1, S_2 y S_1, el modelo matemático del problema de RMC se vuelve

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 40F + 30S + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\
\text{s.a.} \quad & \\
& 0.4F + 0.5S + 1S_1 = 20 \\
& 0.2S + 1S_2 = 5 \\
& 0.6F + 0.3S + 1S_3 = 21 \\
& F, S, S_1, S_2, S_3 = 0
\end{aligned}$$

¿Puede escribir un programa lineal en forma estándar? Resuelva el problema 18.

Siempre que se escribe un programa lineal de manera que todas las restricciones estén expresadas como igualdades, se dice que está escrito en **forma estándar**.

Al referirnos a la forma estándar del problema de RMC, vemos que en la solución óptima ($F = 25$, $S = 20$) los valores para las variables de holgura son

Restricción	Valor de la variable de holgura
Material 1	$S_1 = 0$
Material 2	$S_2 = 1$
Material 3	$S_3 = 0$

¿Podríamos haber utilizado el análisis gráfico para proporcionar alguna información previa? La respuesta es afirmativa. Al encontrar la solución óptima en la figura 7.6, vemos que la restricción del material 1 y la restricción del material 3 limitan, o *confinan*, la región factible en este punto. Por tanto, la solución óptima requiere el uso de estos dos recursos. En otras palabras, la gráfica muestra que en la solución óptima el material 1 y el material 3 tendrán una holgura de cero; pero como la restricción del material 2 no está confinada a la región factible en la solución óptima, podemos esperar cierta holgura para este recurso.

Es fácil reconocer las restricciones redundantes con el método de solución gráfica. Sin embargo, en problemas con más de dos variables de decisión las restricciones redundantes por lo general no son evidentes.

Por último, algunos programas lineales pueden tener una o más restricciones que no afectan a la región factible; es decir, la región factible sigue siendo la misma sin importar si la restricción se incluye o no en el problema. Debido a que esta restricción no afecta a la región factible y, por tanto, no puede afectar a la solución óptima, se le llama **restricción redundante**. Las restricciones redundantes pueden omitirse del problema sin que esto tenga un efecto en la solución óptima. Sin embargo, en la mayoría de los problemas de programación lineal, las restricciones redundantes no se descartan debido a que no se reconocen de inmediato como redundantes. El problema de RMC no tiene restricciones redundantes porque todas las restricciones tienen un efecto en la región factible.

NOTAS Y COMENTARIOS

1. En la representación en forma estándar de un programa lineal, los coeficientes de la función objetivo para las variables de holgura son cero. Esta condición implica que las variables de holgura, las cuales representan recursos sin emplear, no afectan el valor de la función objetivo. Sin embargo, en algunas aplicaciones, parte o todos los recursos sin emplear pueden venderse y contribuir a las utilidades. En estos casos, las variables de holgura correspondientes se vuelven variables de decisión que representan la cantidad de recursos a vender. Para cada una de estas variables un coeficiente distinto de cero en la función objetivo reflejaría las utilidades asociadas con la venta de una unidad del recurso correspondiente.
2. Las restricciones redundantes no afectan a la región factible; como resultado pueden eliminarse de un modelo de programación lineal sin afectar a la solución óptima. Sin embargo, si el modelo de programación lineal se resolverá más tarde, los cambios en algunos de los datos podrían convertir una restricción previamente redundante en una restricción confinante. De ahí que recomendemos mantener todas las restricciones en el modelo de programación lineal, aun cuando una o más de ellas puedan ser redundantes.

7.3 Puntos extremos y solución óptima

Suponga que la contribución a las utilidades para 1 tonelada de base para solvente aumenta de \$30 a \$60, mientras que permanecen sin cambio la contribución a las utilidades para 1 tonelada de aditivo para combustible y todas las restricciones. El modelo de programación lineal completo de este nuevo problema es idéntico al modelo matemático de la sección 7.2, excepto por la función objetivo modificada:

$$\text{Max } 40F + 60S$$

¿Cómo afecta este cambio en la función objetivo a la solución óptima para el problema de RMC? La figura 7.13 muestra la solución gráfica del problema de RMC con la función objetivo modificada. Observe que como las restricciones no cambian, la región factible permanece sin cambios. No obstante, las rectas de utilidades deben alterarse para reflejar la nueva función objetivo.

Al alejar del origen, en forma paralela, a la recta de utilidades, encontramos la solución óptima como lo muestra la figura 7.13. Los valores de las variables de decisión en este punto son $F = 18.75$ y $S = 25$. El aumento en las utilidades de la base para solvente provocó un cambio en la solución óptima. De hecho, como podría sospechar, hicimos reducciones en la producción del aditivo para combustible menos rentable e incrementamos la producción de la base para solvente más rentable.

¿Qué nota usted acerca de la ubicación de las soluciones óptimas en los problemas de programación lineal que hemos resuelto hasta ahora? Estudie detenidamente las soluciones gráficas de las figuras 7.10 y 7.13. Una observación importante que usted debería poder hacer es que las soluciones óptimas ocurran en uno de los vértices, o "esquinas", de la región factible. En la terminología de la programación lineal estos vértices se conocen como **puntos extremos** de la región factible. Por consiguiente, RMC tiene cinco vértices

FIGURA 7.13 SOLUCIÓN ÓPTIMA PARA EL PROBLEMA DE RMC CON UNA FUNCIÓN OBJETIVO DE $40F + 60S$

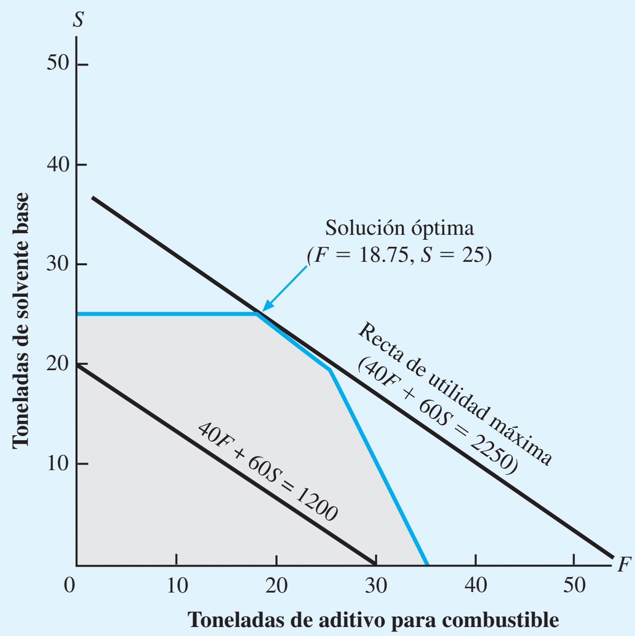
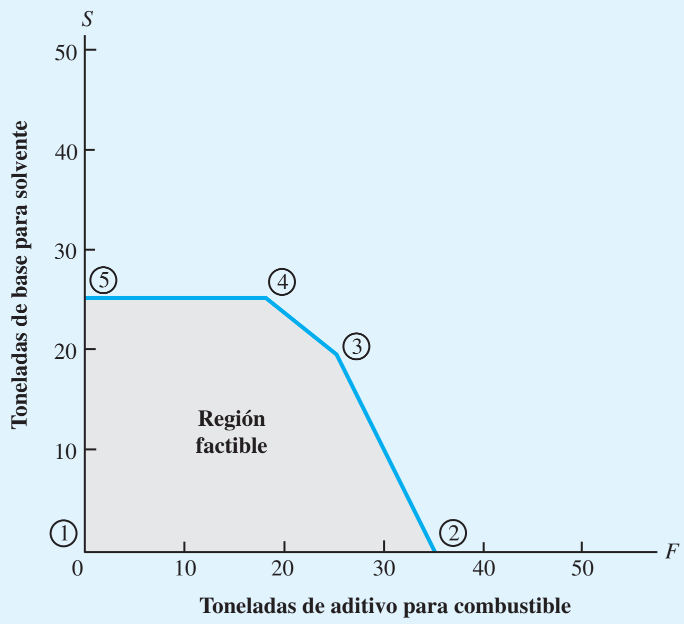


FIGURA 7.14 LOS CINCO PUNTOS EXTREMOS DE LA REGIÓN FACTIBLE PARA EL PROBLEMA DE RMC



o cinco puntos extremos (figura 7.14). Podemos establecer nuestra observación sobre la localización de soluciones óptimas:[2]

> La solución óptima para un problema de programación lineal puede encontrase en un punto extremo de la región factible para el problema.

Como práctica adicional en la identificación de los puntos extremos de la región factible y en la determinación de la solución óptima mediante el cálculo y la comparación del valor de la función objetivo en cada punto extremo, resuelva el problema 13.

Esta propiedad significa que, si usted busca la solución óptima para un problema de programación lineal, no tiene que evaluar todos los puntos de solución factibles. De hecho, tiene que considerar *sólo* las soluciones factibles que ocurren en los puntos extremos de la región factible. Por tanto, para el problema de RMC, en vez de calcular y comparar las soluciones factibles de las utilidades, podemos encontrar la solución óptima al evaluar las cinco soluciones de los puntos extremos y seleccionar aquella que proporcione la mayor utilidad. En realidad, el procedimiento de solución gráfica es nada menos que una manera conveniente de identificar un punto extremo óptimo para problemas de dos variables.

7.4 Solución por computadora al problema de RMC

Los programas de computadora diseñados para resolver problemas de programación lineal ahora están disponibles para todo el público. La mayoría de las empresas y universidades tiene acceso a estos programas de computadora. Después de un breve periodo de familiarización con las funciones específicas del programa, la mayoría de los usuarios resuelve los problemas de programación lineal con pocas dificultades. Los problemas que involucran

[2]En la sección 7.6 mostramos que dos casos especiales (infactibilidad e ilimitado) en la programación lineal no tienen solución óptima. La observación hecha no se aplica en estos casos.

En enero de 1952 se realizó en la computadora SEAC (Standars Eastern Automatic Computer) la primera solución por computadora exitosa de un problema de programación lineal. La SEAC, la primera computadora digital construida por la Standards Eastern Automatic Computer bajo el patrocinio de la Fuerza Aérea de Estados Unidos, tenía una memoria de 512 palabras y una cinta magnética para almacenamiento externo.

En los apéndices al final del capítulo se proporcionan instrucciones sobre cómo resolver programas lineales utilizando The Management Scientist, LINGO y Excel.

miles de variables y de restricciones ahora se resuelven de forma rutinaria con paquetes de computadora. Algunos de los paquetes comerciales más destacados son CPLEX, LINGO, MOSEK, Premium Solver for Excel y Xpress-MP. También existen paquetes gratuitos que se pueden descargar de Internet. Un buen ejemplo de ellos es Clp (COIN-OR linear programming) disponible en el sitio web de la organización COIN-OR (*http://www.coin-or.org*).

Como resultado del reciente crecimiento del software para computadoras personales, ahora contamos con una gran cantidad de programas de cómputo con una interfaz amigable. Casi todos estos programas, desarrollados por académicos y empresas pequeñas, son fáciles de utilizar. La mayoría de ellos se diseñó para resolver programas lineales (algunos cientos de variables), pero algunos se pueden utilizar para resolver miles de variables y restricciones. Los solucionadores de programación lineal ahora forman parte de muchos paquetes de hojas de cálculo. En el apéndice 7.3 mostramos cómo utilizar el solucionador de Excel.

The Management Scientist, un software desarrollado por los autores de este libro, contiene un módulo de programación lineal. Explicaremos cómo se utiliza al resolver el problema de RMC. El programa lineal es el siguiente:

$$
\begin{array}{lrll}
\text{Max} & 40F + 30S & & \\
\text{s.a.} & & & \\
& 0.4F + 0.5S \leq & 20 & \text{Material 1} \\
& 0.2S \leq & 5 & \text{Material 2} \\
& 0.6F + 0.5S \leq & 21 & \text{Material 3} \\
& F, S \geq 0 & &
\end{array}
$$

La solución[3] generada por The Management Scientist se muestra en la figura 7.15.

Interpretación del resultado de la computadora

Veamos con mayor detalle el resultado que proporciona The Management Scientist en la figura 7.15 e interpretemos la solución por computadora para el problema de RMC. Primero observe que el número 1600.000, que aparece a la derecha del valor de la función objetivo, indica que la solución óptima a este problema proporcionará una utilidad de $1600. Directamente debajo del valor de la función objetivo están los valores de las variables de decisión de la solución óptima. Por tanto, tenemos $F = 25$ ton de aditivo para combustible y $S = 20$ ton de base para solvente como cantidades de producción óptimas.

La información en la columna Reduced Costs (Costos reducidos) indica cuánto tendrá que mejorar[4] el coeficiente de cada variable de decisión de la función objetivo antes de que sea posible para esa variable asumir un valor positivo en la solución óptima. Si una variable de decisión ya es positiva en la solución óptima, su costo reducido es cero. Para el problema de RMC, la solución óptima es $F = 25$ y $S = 20$. Las dos variables de decisión ya tienen valores positivos, así que sus costos reducidos correspondientes son cero. En el capítulo 8 interpretamos el costo reducido para una variable de decisión que no tiene un valor positivo en la solución óptima.

Enseguida de los valores de F y S de la solución óptima y de la información del costo reducido, el resultado de la computadora proporciona información sobre el estado de las restricciones. Recuerde que el problema de RMC tenía tres restricciones de menor o igual que, correspondientes a las toneladas disponibles para cada una de las tres materias primas. La información mostrada en la columna Slack/Surplus (Holgura/Excedente) proporciona

[3]Los pasos requeridos para generar esta solución se describen en el apéndice 7.1.

[4]Para un problema de maximización, *mejorar* significa aumentar; para un problema de minimización, *mejorar* significa disminuir.

FIGURA 7.15 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SC1ENTIST PARA EL PROBLEMA DE RMC

WEB archivo
RMC

```
Objective Function Value =           1600.00

      Variable            Value           Reduced Costs
   --------------    ---------------    -----------------
         F                 25.000                0.000
         S                 20.000                0.000

     Constraint        Slack/Surplus         Dual Prices
   --------------    ---------------    -----------------
         1                  0.000               33.333
         2                  1.000                0.000
         3                  0.000               44.444

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable      Lower Limit      Current Value    Upper Limit
------------   -------------    ---------------  ---------------
     F               24.000             40.000           60.000
     S               20.000             30.000           50.000

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint     Lower Limit      Current Value    Upper Limit
------------   -------------    ---------------  ---------------
    1                14.000             20.000           21.500
    2                 4.000              5.000   No Upper Limit
    3                18.750             21.000           30.000
```

el valor de la variable de holgura para cada una de las tres restricciones. La información se resume como sigue:

Número de restricciones	Nombre de restricción	Valor de la variable de holgura
1	Material 1	0
2	Material 2	1
3	Material 3	0

Por tanto, vemos que las restricciones confinantes (las restricciones del material 1 y del material 3) tienen una holgura de cero en la solución óptima. La restricción del material 2 tiene 1 tonelada de holgura, o capacidad sin utilizar.

El resto del resultado en la figura 7.15 se puede utilizar para determinar cómo afecta a la solución óptima un cambio en un coeficiente de la función objetivo o un cambio en valor del lado derecho de una restricción. Veremos el uso de esta información en el capítulo 8 cuando se estudie el tema del análisis de sensibilidad.

NOTAS Y COMENTARIOS

Los solucionadores de programación lineal ahora son una función estándar de la mayoría de los paquetes de hoja de cálculo. Excel, Lotus 1-2-3 y Quattro Pro se venden con solucionadores integrados capaces de resolver problemas de optimización, incluidos programas lineales. El solucionador en cada uno de estos paquetes de hoja de cálculo fue desarrollado por Frontline Systems y proporciona una interfaz de usuario parecida. En el apéndice 7.3 se explica cómo se utilizan las hojas de cálculo para resolver programas lineales al solucionar el problema de RMC con Excel.

7.5 Un problema sencillo de minimización

M&D Chemicals fabrica dos productos que se venden como materias primas a empresas que elaboran jabones de baño y detergentes para lavar ropa. Con base en un análisis de los niveles de inventario actuales y la demanda potencial para el próximo mes, la gerencia de M&D ha especificado que la producción combinada de los productos A y B debe sumar un total de 350 galones como mínimo. Por otra parte, también debe surtirse el pedido de 125 galones del producto A con un cliente importante. El producto A requiere 2 horas de tiempo de procesamiento por galón, mientras que el producto B requiere 1 hora de tiempo de procesamiento por galón, y para el próximo mes, se cuenta con 600 horas de tiempo de procesamiento disponibles. El objetivo de M&D es satisfacer estos requerimientos con un costo de producción total mínimo. Los costos de producción son $2 por galón del producto A y $3 por galón del producto B.

Para elaborar el programa de producción con un costo mínimo, formularemos el problema de M&D Chemicals como un programa lineal. Siguiendo un procedimiento similar al que utilizamos en el problema de RMC, primero se definen las variables de decisión y la función objetivo para el problema. Sea

$$A = \text{número de galones del producto A}$$
$$B = \text{número de galones del producto B}$$

Debido a que los costos de producción son $2 por galón para el producto A, y $3 por galón para el producto B, la función objetivo que corresponde a la minimización del costo total de producción puede escribirse como

$$\text{Min } 2A + 3B$$

Enseguida, considere las restricciones impuestas al problema de M&D Chemicals. Para satisfacer la demanda del cliente importante de 125 galones del producto A, sabemos que A debe ser por lo menos 125. Por tanto, escribimos la restricción

$$1A \geq 125$$

Como la producción combinada de ambos productos debe sumar por lo menos 350 galones, escribimos la restricción

$$1A + 1B \geq 350$$

Por último, la limitación en el tiempo de procesamiento disponible de 600 horas significa que debemos añadir la restricción

$$2A + 1B \leq 600$$

Después de añadir las restricciones de no negatividad (A, $B \geq 0$) tenemos el siguiente programa lineal para el problema de M&D Chemicals:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Max} & 2A + 3B & \\
\text{s.a.} & & \\
 & 1A \qquad\quad \geq 125 & \text{Demanda del producto } A \\
 & 1A + 1B \geq 350 & \text{Producción total} \\
 & 2A + 1B \leq 600 & \text{Tiempo de procesamiento} \\
 & A, B \geq 0 &
\end{array}
$$

Dado que el modelo de programación lineal tiene sólo dos variables de decisión, se utiliza el procedimiento de solución gráfica para calcular las cantidades de producción óptimas. El método gráfico para este problema, al igual que en el problema de RMC, requiere que primero tracemos la gráfica de las rectas de restricción para hallar la región factible. Al trazar la gráfica de cada recta de restricción por separado y luego revisar los puntos en cada lado de dicha recta, se identifican las soluciones que satisfacen cada restricción. Al combinar las soluciones que satisfacen cada restricción en la misma gráfica, se obtiene la región factible mostrada en la figura 7.16.

Para encontrar la solución de costo mínimo, ahora trazamos la recta de la función objetivo que corresponde a un valor del costo total en particular. Por ejemplo, podríamos empezar trazando la recta $2A + 3B = 1200$, la cual se muestra en la figura 7.17. Desde luego algunos puntos en la región factible proporcionarían un costo total de \$1200. Para

FIGURA 7.16 REGIÓN FACTIBLE PARA EL PROBLEMA DE M&D CHEMICALS

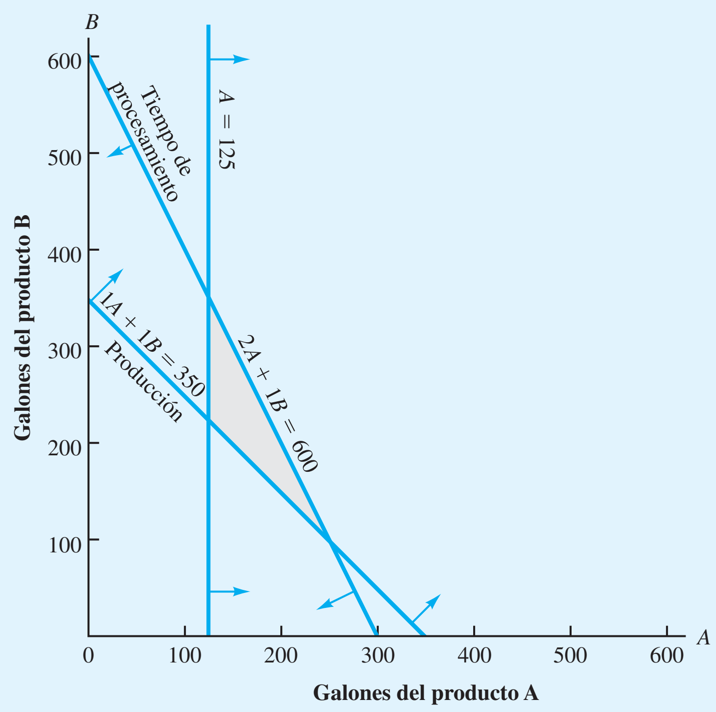
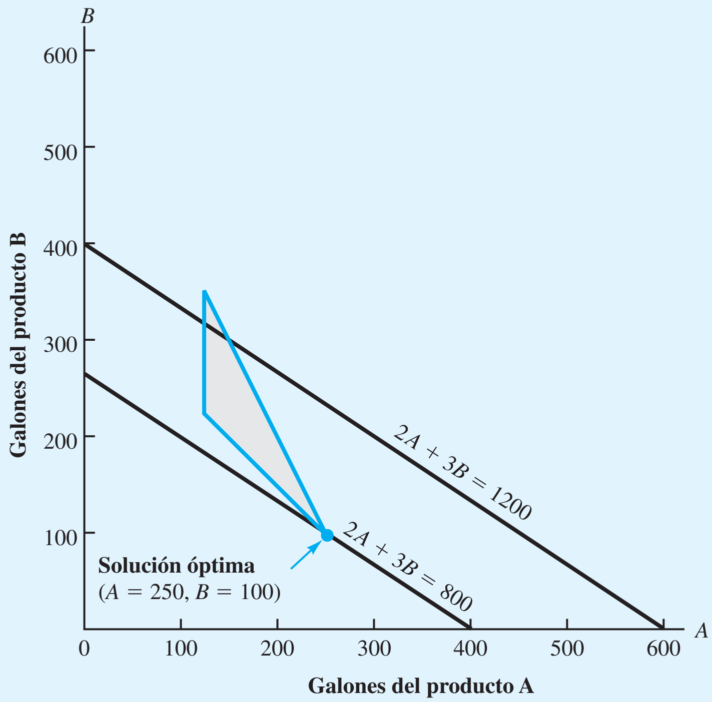


FIGURA 7.17 SOLUCIÓN GRÁFICA PARA EL PROBLEMA DE M&D CHEMICALS



calcular los valores de A y B que proporcionan los valores menores del costo total, movemos la recta de la función objetivo hacia la izquierda y hacia abajo hasta que, al seguir moviéndola, quede completamente fuera de la región factible. Observe que la recta de la función objetivo $2A + 3B = 800$ se interseca con la región factible en el punto extremo $A = 250$ y $B = 100$. Este punto extremo proporciona la solución de costo mínimo con un valor de la función objetivo de 800. A partir de las figuras 7.16 y 7.17, podemos ver que las restricciones de producción total y del tiempo de procesamiento están confinadas. Al igual que en todos los problemas de programación lineal, la solución óptima ocurre en un punto extremo de la región factible.

Resumen del procedimiento de solución gráfica para los problemas de minimización

¿Puede utilizar el procedimiento de solución gráfica para determinar la solución óptima para un problema de minimización? Resuelva el problema 31.

Los pasos del procedimiento de solución gráfica para un problema de minimización se resumen enseguida:

1. Prepare una gráfica para cada restricción que muestre las soluciones que satisfacen la restricción.
2. Determine la región factible al identificar las soluciones que satisfacen todas las restricciones de forma simultánea.
3. Trace una recta de la función objetivo que muestre los valores de las variables de decisión que producen un valor específico de la función objetivo.

4. Mueva las rectas paralelas de la función objetivo hacia valores menores de la función objetivo hasta que, al moverlas más, queden completamente fuera de la región factible.
5. Cualquier solución factible en la recta de la función objetivo con el valor menor es la solución óptima.

Variables de excedente

La solución óptima para el problema de M&D Chemicals muestra que la producción total deseada de $A + B = 350$ galones, se logra al utilizar todo el tiempo de procesamiento disponible de $2A + 1B = 2(250) + 1(100) = 600$ horas. Además, observe que la restricción que requiere que se cumpla la demanda del producto A se satisface con $A = 250$ galones. De hecho, la producción del producto A excede su nivel mínimo por $250 - 125 = 125$ galones. Este exceso de producción para el producto A se conoce como *excedente*. En la terminología de la programación lineal, cualquier cantidad que rebase la cantidad correspondiente a una restricción de $\geq$ se conoce como excedente.

Recuerde que con una restricción de $\leq$, una variable de holgura puede añadirse en el lado izquierdo de la desigualdad para convertir la restricción a la forma de igualdad. Con una restricción de $\geq$, una **variable de excedente** puede restarse del lado izquierdo de la desigualdad para convertir la restricción a la forma de igualdad. Al igual que con las variables de holgura, a las variables de excedente se les proporciona un coeficiente de cero en la función objetivo debido a que no tienen efecto sobre su valor. Después de incluir dos variables de excedente, S_1 y S_2, para las restricciones de $\geq$ y una variable de holgura, S_3, para la restricción de $\leq$, el modelo de programación lineal del problema de M&D Chemicals se vuelve

Resuelva el problema 35 con el fin de probar su capacidad para utilizar las variables de holgura y de excedente para escribir un programa lineal en forma estándar.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & 2A + 3B + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 \\
\text{s.a.} & \\
& 1A \qquad\quad - 1S_1 \qquad\qquad\qquad = 125 \\
& 1A + 1B \qquad\quad - 1S_2 \qquad\quad = 350 \\
& 2A + 1B \qquad\qquad\qquad + 1S_3 = 600 \\
& \quad A, B, S_1, S_2, S_3 \geq 0
\end{array}
$$

Todas las restricciones ahora son igualdades. Por consiguiente, la formulación anterior es la representación en forma estándar del problema de M&D Chemicals. En la solución óptima de $A = 250$ y $B = 100$, los valores de las variables de holgura y de excedente son los siguientes:

Restricción	Valor de la variable de holgura o de excedente
Demanda del producto A	$S_1 = 125$
Producción total	$S_2 = 0$
Tiempo de procesamiento	$S_3 = 0$

Vuelva a observar las figuras 7.16 y 7.17; advierta que las variables de holgura y de excedente con un valor de cero se asocian con las restricciones que están confinando la solución óptima, es decir, las restricciones de producción total y de tiempo de procesamiento. El excedente de 125 unidades se asocia con la restricción no confinante en la demanda del producto A.

En el problema de RMC todas las restricciones fueron del tipo $\leq$, y en el problema de M&D Chemicals las restricciones fueron una mezcla de los tipos $\geq$ y $\leq$. El número y los tipos de restricciones encontradas en un problema de programación lineal determinado

Resuelva el problema 34 para practicar la solución de un programa lineal con las tres formas de restricción.

dependen de las condiciones específicas que existen en el problema. Los problemas de programación lineal pueden tener algunas restricciones de $\leq$, otras de $\geq$ y algunas restricciones de $=$. Para una restricción de igualdad, las soluciones factibles deben estar justo en la recta de restricción.

Un ejemplo de un programa lineal con dos variables de decisión, G y H, y las tres formas de restricción se proporciona aquí:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & 2G + 2H \\
\text{s.a.} \quad & \\
& 1G + 3H \leq 12 \\
& 3G + 1H \geq 13 \\
& 1G - 1H = 13 \\
& G, H \geq 0
\end{aligned}
$$

La representación de la forma estándar de este problema es

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & 2G + 2H + 0S_1 + 0S_2 \\
\text{s.a.} \quad & \\
& 1G + 3H + 1S_1 \qquad\quad = 12 \\
& 3G + 1H \qquad\quad - 1S_2 = 13 \\
& 1G - 1H \qquad\qquad\quad\;\; = \;\;3 \\
& G, H, S_1, S_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

La forma estándar requiere una variable de holgura para la restricción de $\leq$ y una variable de excedente para la restricción de $\geq$. Sin embargo, ni una variable de holgura ni la de excedente se requieren para la tercera restricción debido a que ya está en forma de igualdad.

Cuando se resuelven gráficamente programas lineales, no es necesario escribir el problema en forma estándar. No obstante, es útil calcular los valores de las variables de holgura y de excedente, y entender qué significan. Un punto final: la forma estándar del problema de programación lineal es equivalente a la formulación original del problema. Es decir, la solución óptima para cualquier problema de programación lineal es la misma que la solución óptima para la forma estándar del problema. La forma estándar no cambia el problema básico, sólo cambia la forma de escribir las restricciones del problema.

Solución por computadora al problema de M&D Chemicals

La solución obtenida utilizando The Management Scientist se presenta en la figura 7.18. El resultado de la computadora muestra que la solución con costo mínimo produce un valor de \$800 en la función objetivo. Los valores de las variables de decisión muestran que 250 galones del producto A y 100 del producto B proporcionan la solución de costo mínimo.

La columna Slack/Surplus (Holgura/Excedente) muestra que la restricción de $\geq$ que corresponde a la demanda del producto A (vea la restricción 1) tiene un excedente de 125 unidades. Esta columna nos indica que la producción del producto A en la solución óptima excede la demanda por 125 galones. Los valores de la columna Slack/Surplus son cero para el requerimiento de producción total (restricción 2) y la limitación del tiempo de procesamiento (restricción 3), lo cual indica que estas restricciones son confinantes en la solución óptima. En el capítulo 8 estudiaremos el resto del resultado de la computadora que aparece en la figura 7.18 cuando abordemos el tema del análisis de sensibilidad.

FIGURA 7.18 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE M&D CHEMICALS

WEB archivo

M&D

Objective Function Value = 800.00

Variable	Value	Reduced Costs
A	250.000	0.000
B	100.000	0.000

Constraint	Slack/Surplus	Dual Prices
1	125.000	0.000
2	0.000	-4.000
3	0.000	1.000

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

Variable	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
A	No Lower Limit	2.000	3.000
B	2.000	3.000	No Upper Limit

RIGHT HAND SIDE RANGES

Constraint	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
1	No Lower Limit	125.000	250.000
2	300.000	350.000	475.000
3	475.000	600.000	700.000

7.6 Casos especiales

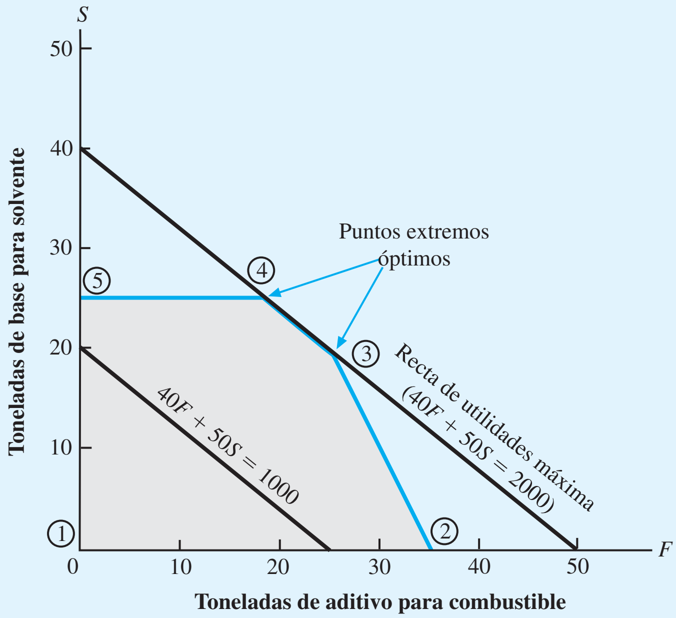
En esta sección se comentan tres situaciones especiales que pueden surgir cuando intentamos resolver problemas de programación lineal.

Soluciones óptimas alternas

A partir de nuestro análisis del procedimiento de solución gráfica, sabemos que la solución óptima puede encontrarse en puntos extremos de la región factible. Ahora considere el caso especial en que la recta de la función objetivo óptima coincide con una de las rectas de restricción confinantes. Esto puede conducir a **soluciones óptimas alternas** en las que más de una solución proporciona el valor óptimo para la función objetivo.

Para ilustrar el caso de las soluciones óptimas alternas, retomemos el problema de RMC. Sin embargo, suponga que la contribución a las utilidades de la base para solvente (S) se ha incrementado a \$50. La función objetivo modificada es $40F + 50S$. La figura 7.19 muestra la solución gráfica del problema. Observe que la solución óptima sigue ocurriendo en un punto extremo; de hecho, ocurre en dos puntos extremos: el punto extremo 3 ($F = 25$, $S = 20$) y el punto extremo 4 ($F = 18.75$, $S = 25$).

FIGURA 7.19 SOLUCIÓN ÓPTIMA PARA EL PROBLEMA DE RMC CON UNA FUNCIÓN OBJETIVO DE $40F + 50S$



Los valores de la función objetivo en estos dos puntos extremos son idénticos, es decir,

$$40F + 50S = 40(25) + 50(20) = 2000$$

y

$$40F + 50S = 40(18.75) + 50(25) = 2000$$

Además, cualquier punto en la recta que conecta los dos puntos extremos óptimos también proporciona una solución óptima. Por ejemplo, el punto de solución ($F = 21.875$, $S = 22.5$), que está justo en medio de los dos puntos extremos, también proporciona el valor de la función objetivo óptima de

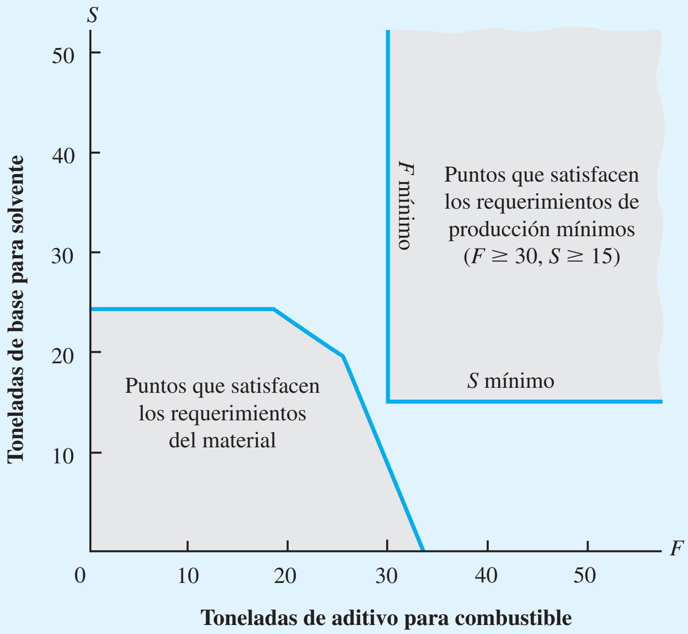
$$40F + 50S = 40(21.875) + 50(22.5) = 2000$$

Un problema de programación lineal con soluciones óptimas alternas, por lo general es una buena situación para el gerente o tomador de decisiones, ya que significa que varias combinaciones de las variables de decisión son óptimas y que el gerente puede seleccionar aquella más deseable. Por desgracia, no es sencillo determinar si un problema tiene soluciones óptimas alternas.

Infactibilidad

Infactibilidad significa que ninguna solución al problema de programación lineal satisface todas las restricciones, incluidas las restricciones de no negatividad. Gráficamente, la infactibilidad significa que no existe una región factible; es decir, no hay puntos que

FIGURA 7.20 REGIÓN NO FACTIBLE PARA EL PROBLEMA DE RMC CON REQUERIMIENTOS DE PRODUCCIÓN MÍNIMOS



satisfagan todas las ecuaciones de restricción y las condiciones de no negatividad de forma simultánea. Para ilustrar esta situación, volvamos al problema que enfrenta RMC.

Los problemas sin solución factible con frecuencia surgen en la práctica, debido a que las expectativas de la gerencia son demasiado grandes o porque se han impuesto muchas restricciones al problema.

Suponga que la gerencia especificó que deben producirse por lo menos 30 toneladas de aditivo para combustible y 15 toneladas de base para solvente. La figura 7.20 muestra la gráfica de la región de solución que refleja estos requerimientos. El área sombreada en la porción inferior izquierda de la gráfica representa aquellos puntos que satisfacen las restricciones de menor que o igual que sobre la cantidad de materiales disponibles. El área sombreada en la porción superior derecha representa aquellos puntos que satisfacen los requerimientos de producción mínimos de 30 toneladas de aditivo para combustible y 15 toneladas de base para solvente, pero ninguno de los puntos satisface ambos conjuntos de restricciones. Por tanto, si la gerencia impone estos requerimientos de producción mínimos, no es posible ninguna solución factible al problema de programación lineal.

¿Cómo debemos interpretar esta infactibilidad en función del problema actual? Primero tenemos que decir a la gerencia que, para las cantidades disponibles de los tres materiales, la producción de 30 toneladas de aditivo para combustible y 15 de base para solvente no es posible. Además, podemos decir a la gerencia exactamente cuánto más se necesita de cada material.

Material	Toneladas mínimas requeridas para $F = 30, S = 15$	Toneladas disponibles	Toneladas adicionales requeridas
Material 1	$0.4(30) + 0.5(15) = 19.5$	20	—
Material 2	$0.2(15) = 3$	5	—
Material 3	$0.6(30) + 0.3(15) = 22.5$	21	1.5

Por tanto, RMC tiene un suministro suficiente de los materiales 1 y 2 pero necesitará 1.5 toneladas adicionales del material 3 para cumplir con los requerimientos de producción de la gerencia de 30 toneladas de aditivo para combustible y 15 de base para solvente. Si, después de revisar el análisis anterior, la gerencia aún quiere este nivel de producción para los dos productos, RMC tendrá que obtener las 1.5 toneladas adicionales de material 3.

Con frecuencia la gerencia cuenta con muchas posibilidades para emprender acciones correctivas, una vez que descubrimos la falta de una solución factible. Lo importante es darse cuenta de que el análisis de programación lineal puede ayudar a determinar si los planes de la gerencia son factibles. Al analizar el problema utilizando la programación lineal, con frecuencia podemos señalar las condiciones inviables e iniciar la acción correctiva.

Siempre que intente resolver un problema infactible utilizando The Management Scientist, obtendrá un mensaje que dice “No Feasible Solution” (Sin solución factible). En este caso, sabe que ninguna solución al problema de programación lineal cumplirá con todas las restricciones. Es necesaria una inspección meticulosa de su formulación para identificar por qué el problema es infactible. En algunas situaciones el único método razonable es omitir una o más restricciones y resolver el problema. Si usted puede encontrar una solución óptima para este problema modificado, sabrá que la restricción o restricciones que se omitieron estaban causando que el problema fuera infactible.

Ilimitada

La solución para un problema de programación lineal de maximización es **ilimitada** si el valor de la solución puede alcanzar un valor infinitamente grande sin violar ninguna de las restricciones; para un problema de minimización, la solución es ilimitada si el valor puede tomar un valor infinitamente pequeño. Esta condición podría calificarse de *utopía administrativa*; por ejemplo, si esta condición fuera a ocurrir en un problema de maximización de utilidades, el gerente podría lograr una utilidad ilimitada.

Sin embargo, en los modelos de programación lineal de los problemas reales, la ocurrencia de una solución ilimitada significa que el problema ha sido formulado de forma impropia. Sabemos que es imposible incrementar las utilidades de manera indefinida, por lo que debemos concluir que si un problema de maximización de las utilidades da como resultado una solución ilimitada, el modelo matemático no representa el problema real lo suficientemente bien. Por lo general, un problema ilimitado resulta de la omisión involuntaria de una restricción durante la formulación del problema.

Como ilustración, considere el programa lineal siguiente con dos variables de decisión, X y Y:

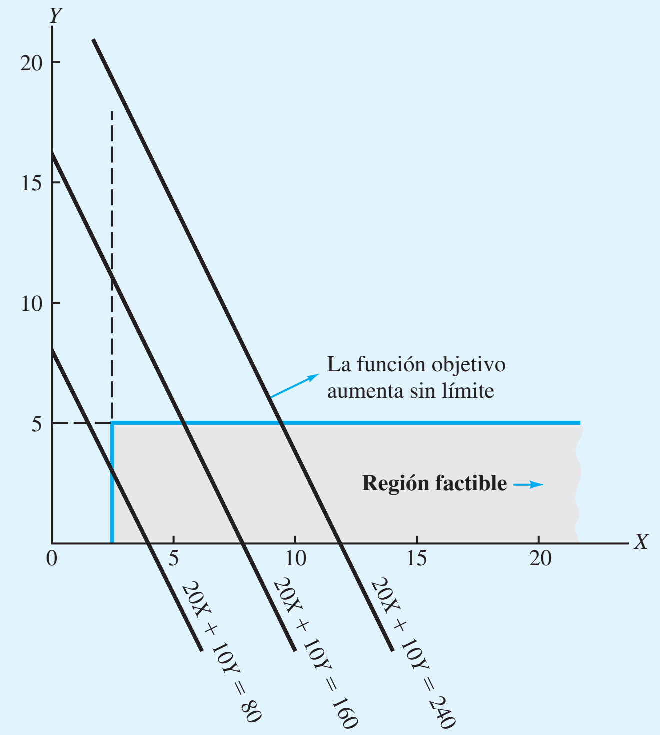
$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 20X + 10Y \\
\text{s.a.} \quad & \\
& 1X \qquad \geq 2 \\
& \qquad 1Y \leq 5 \\
& X, Y \geq 0
\end{aligned}
$$

Para reconocer si un problema lineal implica soluciones óptimas alternativas, no factibilidad o no acotado es tratar los problemas 42 y 43.

En la figura 7.21 trazamos la gráfica de la región factible asociada con este problema. Note que sólo indicamos parte de la región factible debido a que ésta se extiende de manera indefinida en la dirección del eje X. Al observar las rectas de la función objetivo de la figura 7.21, vemos que la solución a este problema puede volverse tan grande como deseemos. No importa cuál solución escojamos, siempre podremos llegar a una solución factible con un valor mayor. Por tanto, se dice que la solución a este programa lineal es *ilimitada.*

Siempre que intente resolver un problema ilimitado utilizando The Management Scientist, obtendrá un mensaje que dice, “Problem is unbounded” (El problema es ilimitado). Debido a que las soluciones ilimitadas no pueden ocurrir en los problemas reales, lo primero que debe hacer es revisar su modelo para determinar si usted ha formulado el problema de forma incorrecta.

FIGURA 7.21 EJEMPLO DE UN PROBLEMA ILIMITADO



NOTAS Y COMENTARIOS

1. La infactibilidad es independiente de la función objetivo. Existe porque las restricciones son tan limitantes que no permiten una región factible para el modelo de programación lineal. Por tanto, cuando encuentre un caso de infactibilidad, hacer cambios en los coeficientes de la función objetivo no ayudará, el problema seguirá siendo infactible.
2. La ocurrencia de una solución ilimitada con frecuencia es el resultado de una restricción faltante. Sin embargo, un cambio en la función objetivo puede causar que un problema antes ilimitado se vuelva limitado con una solución óptima. Por ejemplo, la gráfica de la figura 7.21 muestra una solución ilimitada para la función objetivo Max $20X + 10Y$. Sin embargo, cambiar la función objetivo a Max $-20X - 10Y$ proporcionará la solución óptima $X = 2$ y $Y = 0$ aun cuando no se hayan hecho cambios en las restricciones.

7.7 Notación general de la programación lineal

En este capítulo se estudia cómo formular modelos matemáticos para los problemas de programación lineal de RMC y M&D Chemicals. Para formular un modelo matemático del problema de RMC comenzamos con la definición de dos variables de decisión: F = número de toneladas de aditivo para combustible, y S = número de toneladas de base solvente. En el problema de M&D Chemicals, las dos variables se definieron como A = número de galones del producto A, y B = número de galones del producto B. Seleccionamos los nombres de F y S para las variables de decisión del problema de RMC, y A y B para las variables del problema de M&D Chemicals, con la finalidad de recordar con mayor facilidad lo que representan estas variables de decisión en los problemas. Aunque este enfoque funciona bien para programas lineales que involucran pocas variables de decisión, puede volverse difícil cuando lidiamos con problemas que incluyen muchas variables de decisión.

Una notación más general que se utiliza a menudo para programas lineales señala la letra x con un subíndice. Por ejemplo, en el problema de RMC, podríamos haber definido las variables de decisión como sigue:

$$x_1 = \text{número de toneladas de aditivo para combustible}$$
$$x_2 = \text{número de toneladas de solvente base}$$

En el problema de M&D Chemicals se utilizarían los mismos nombres de variable, pero sus definiciones cambiarían:

$$x_1 = \text{número de galones del producto A}$$
$$x_2 = \text{número de galones del producto B}$$

Una desventaja de utilizar la notación general para las variables de decisión es que ya no podemos identificar con facilidad lo que éstas representan en realidad en el modelo matemático. Sin embargo, la ventaja de la notación general es que la formulación de un modelo matemático para un problema que involucra un número grande de variables de decisión es mucho más fácil. Por ejemplo, para un problema de programación lineal con tres variables de decision, utilizaríamos los nombres de variable x_1, x_2 y x_3; para un problema con cuatro variables de decisión, utilizaríamos los nombres x_1, x_2, x_3 y x_4, etc. Está claro que si un problema involucra 1000 variables de decisión, tratar de identificar 1000 nombres únicos sería difícil, pero si utilizamos la notación general de la programación lineal, las variables de decisión se definirían como $x_1, x_2, x_3, \ldots x_{1000}$.

Para ilustrar el procedimiento de solución gráfica para un programa lineal escrito con la notación general de la programación lineal, considere el siguiente modelo matemático para un problema de maximización que involucra dos variables de decisión:

$$\begin{aligned}
\text{Max}\quad & 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a.}\quad & \\
& 2x_1 + 2x_2 \leq 8 \\
& 1x_1 + 0.5x_2 \leq 3 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

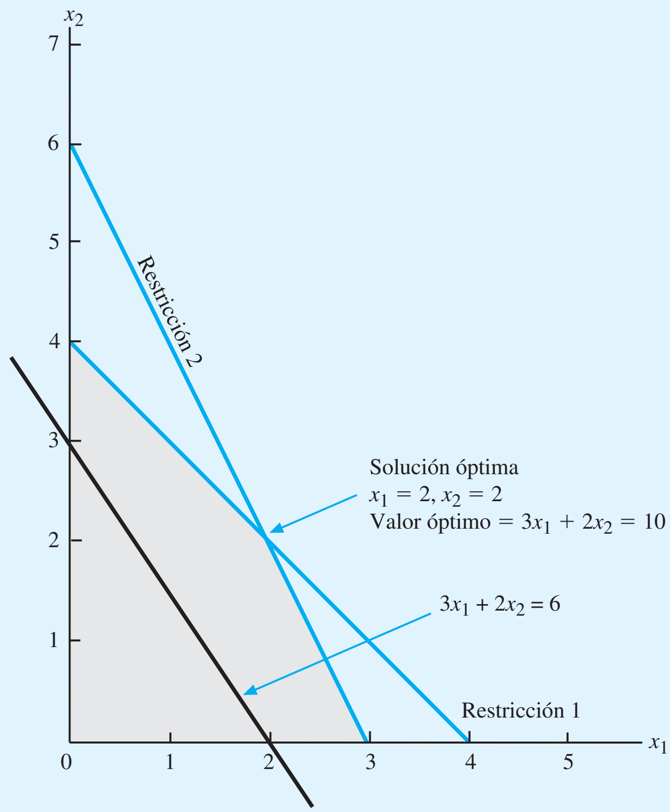
Primero debemos trazar una gráfica que muestre las soluciones posibles (valores de x_1 y x_2) para el problema. La convención usual es trazar los valores de x_1 a lo largo del eje horizontal y los valores de x_2 a lo largo del eje vertical. La figura 7.22 muestra la solución gráfica para este problema de dos variables. Observe que la solución óptima es $x_1 = 2$ y $x_2 = 2$, con un valor de la función objetivo de 10.

Con la notación general de la programación lineal podemos escribir la forma estándar del problema anterior como sigue:

$$\begin{aligned}
\text{Max}\quad & 3x_1 + 2x_2 + 0s_1 + 0s_2 \\
\text{s.a.}\quad & \\
& 2x_1 + 2x_2 + 1s_1 = 8 \\
& 1x_1 + 0.5x_2 + 1s_2 = 3 \\
& x_1, x_2, s_1, s_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Por tanto, en la solución óptima $x_1 = 2$ y $x_2 = 2$, los valores de las variables de holgura son $s_1 = s_2 = 0$.

FIGURA 7.22 SOLUCIÓN GRÁFICA DE UN PROGRAMA LINEAL DE DOS VARIABLES CON NOTACIÓN GENERAL



Resumen

Se formulan los modelos de programación lineal para el problema de maximización de RMC y para el de minimización de M&D Chemicals. Para ambos problemas mostramos cómo se utiliza tanto un procedimiento de solución gráfica como el software The Management Scientist para identificar una solución óptima. En la formulación del modelo de programación lineal de estos problemas, desarrollamos una definición general de un programa lineal.

Un programa lineal es un modelo matemático con las siguientes características:

1. Una función objetivo lineal que se va a maximizar o a minimizar
2. Una serie de restricciones lineales
3. Variables restringidas a valores no negativos

Las variables de holgura se utilizan para escribir restricciones de menor o igual que en forma de igualdad, y las variables de excedente se utilizan para escribir restricciones de mayor o igual que en forma de igualdad. Por lo general el valor de una variable de holgura se interpreta como la cantidad sin utilizar de un recurso, mientras que el valor de una variable de excedente indica la cantidad que rebasa y está por encima de algún requerimiento mínimo establecido. Cuando todas las restricciones se han expresado como igualdades, el programa lineal se ha escrito en su forma estándar.

Si la solución a un programa lineal es infactible o ilimitada no se puede encontrar una solución óptima para el problema. En el caso de infactibilidad, las soluciones factibles no son posibles. En el caso de una solución ilimitada, la función objetivo puede tomar un valor infinitamente grande para un problema de maximización e infinitamente pequeño para un problema de minimización. En el caso de las soluciones óptimas alternas, existen dos o más puntos extremos óptimos y todos los puntos que forman parte del segmento de recta que los une también son óptimos.

El capítulo concluye con una sección que muestra cómo escribir un modelo matemático utilizando la notación general de la programación lineal. El artículo de MC en Acción, "Programación lineal para el control de tráfico en Hanshin Expressway", constituye uno de los muchos ejemplos del uso extendido de la programación lineal. En los dos capítulos siguientes se verán muchas aplicaciones más de la programación lineal.

MC *en* ACCIÓN

*PROGRAMACIÓN LINEAL PARA EL CONTROL DEL TRÁFICO EN HANSHIN EXPRESSWAY**

Hanshin Expressway fue la primera autopista urbana de cuota en Osaka, Japón. Aunque en 1964 su longitud era de sólo 2.3 kilómetros, en la actualidad es una red de autopistas urbanas a gran escala que abarca 200 kilómetros. La autopista Hanshin Expressway proporciona servicio para el área de Hanshin (Osaka-Kobe), la segunda área más poblada de Japón. Un promedio de 828 000 vehículos utilizan la autopista cada día, con un tránsito diario que en ocasiones rebasa el millón de ellos. En 1990 Hanshin Expressway Public Corporation comenzó a utilizar un sistema automatizado de control de tráfico con el fin de maximizar el número de vehículos que fluye hacia la red de autopistas.

El sistema automatizado de control de tráfico se basa en dos métodos de control: 1) limitar la cantidad de automóviles que entran en la autopista por cada vía de acceso, y 2) proporcionar a los conductores información de tránsito actualizada y precisa, incluidos los tiempos de recorrido esperados e información sobre accidentes. El método utilizado para limitar la cantidad de vehículos depende de si la autopista está en un estado de operación normal o estable, o si ha ocurrido algún tipo de suceso inusual, como un accidente o una descompostura.

En la primera fase del caso del estado estable, el sistema Hanshin utiliza un modelo de programación lineal para maximizar la cantidad total de vehículos que entran en el sistema, mientras previene congestionamientos y efectos adversos en las redes de carreteras circundantes. Los datos que maneja el modelo de programación lineal se reúnen por medio de detectores instalados cada 500 metros a lo largo de la autopista y en todas las vías de entrada y salida. Cada cinco minutos se utilizan los datos reunidos en tiempo real de los detectores para actualizar los coeficientes del modelo, y un nuevo programa lineal calcula la cantidad máxima de vehículos que pueden transitar por la autopista.

El sistema automatizado de control de tráfico demostró tener éxito. Según las encuestas, el control del tráfico disminuyó 30% la longitud de los tramos congestionados de la autopista y 20% el tiempo de recorrido. Además de su rentabilidad extrema, los conductores lo consideran un servicio indispensable.

*Con base en T. Yoshino, T. Sosaki y T. Hasegawa, "The Traffic-Control System on the Hanshin Expressway", *Interfaces* (enero/febrero de 1995): 94-108.

Glosario

Restricción Ecuación o desigualdad que descarta ciertas combinaciones de variables de decisión como soluciones factibles.

Formulación del problema Proceso de traducir la definición verbal de un problema en un enunciado matemático llamado *modelo matemático*.

Modelo matemático Representación de un problema donde el objetivo y todas las condiciones de restricción se describen por medio de expresiones matemáticas.

Variable de decisión Insumo controlable para un modelo de programación lineal.

Función objetivo Expresión que define la cantidad que se maximizará o minimizará en un modelo de programación lineal.

Restricciones de no negatividad Conjunto de restricciones que requiere que todas las variables sean no negativas.

Programa lineal Modelo matemático con una función objetivo lineal, una serie de restricciones lineales y variables no negativas.

Funciones lineales Expresiones matemáticas en las cuales las variables aparecen en términos separados y se elevan a la primera potencia.

Solución factible Solución que satisface todas las restricciones de forma simultánea.

Región factible Conjunto de todas las soluciones factibles.

Variable de holgura Variable añadida en el lado izquierdo de una restricción de menor o igual que para convertir la restricción en una igualdad. El valor de esta variable por lo general se interpreta como la cantidad de un recurso sin utilizar.

Forma estándar Programa lineal en el cual todas las restricciones se expresan como igualdades. La solución óptima de la forma estándar de un programa lineal es la misma que la solución óptima de la formulación original del programa lineal.

Restricción redundante Restricción que no afecta la región factible. Si una restricción es redundante, puede eliminarse del problema sin afectar a la región factible.

Punto extremo En términos gráficos, los puntos extremos son los de solución factible que se encuentran en los vértices, o "esquinas", de la región factible. En los problemas de dos variables, los puntos extremos están determinados por la intersección de las rectas de restricción.

Variable de excedente Variable restada en el lado izquierdo de una restricción de mayor o igual que para convertir la restricción en una igualdad. El valor de esta variable por lo general se interpreta como la cantidad que rebasa y está por encima de algún nivel mínimo requerido.

Soluciones óptimas alternas Caso en el cual más de una solución proporciona el valor óptimo para la función objetivo.

Infactibilidad Situación en la cual ninguna solución para el problema de programación lineal satisface todas las restricciones.

Ilimitada Situación en la cual el valor de la solución puede ser infinitamente grande para un problema de programación lineal de maximización o infinitamente pequeño para un problema de minimización sin violar ninguna de las restricciones.

Problemas

AUTO evaluación

1. ¿De las relaciones matemáticas siguientes, cuáles podrían encontrarse en un modelo de programación lineal y cuáles no? Para las relaciones que son inaceptables para los programas lineales, explique las causas.
   a. $-1A + 2B \leq 70$
   b. $2A - 2B = 50$
   c. $1A - 2B^2 \leq 10$
   d. $3^2 A + 2B \geq 15$
   e. $1A + 1B = 6$
   f. $2A + 5B + 1AB \leq 25$

AUTO evaluación

2. Encuentre las relaciones que satisfacen las restricciones siguientes:
   a. $4A + 2B \leq 16$
   b. $4A + 2B \geq 16$
   c. $4A + 2B = 16$

3. Trace una gráfica separada de cada una de las restricciones siguientes, donde muestre las rectas de restricción y las soluciones que satisfacen:
   a. $3A + 2B \leq 18$
   b. $12A + 8B \geq 480$
   c. $5A + 10B = 200$
4. Trace una gráfica separada de cada una de las restricciones siguientes, donde muestre las rectas de restricción y las soluciones que satisfacen:
   a. $3A - 4B \geq 60$
   b. $-6A + 5B \leq 60$
   c. $5A - 2B \leq 0$
5. Trace una gráfica separada de cada una de las restricciones siguientes, donde muestre las rectas de restricción y las soluciones que satisfacen:
   a. $A \geq 0.25\,(A + B)$
   b. $B \leq 0.10\,(A + B)$
   c. $A \leq 0.50\,(A + B)$

AUTO evaluación

6. Tres funciones objetivo para problemas de programación lineal son $7A + 10B$, $6A + 4B$ y $-4A + 7B$. Muestre la gráfica de cada una para los valores de la función objetivo iguales a 420.

AUTO evaluación

7. Identifique la región factible para el conjunto de restricciones siguiente:

$$\begin{aligned} 0.5A + 0.25B &\geq 30 \\ 1A + 5B &\geq 250 \\ 0.25A + 0.5B &\leq 50 \\ A, B &\geq 0 \end{aligned}$$

8. Identifique la región factible para el conjunto de restricciones siguiente:

$$\begin{aligned} 2A - 1B &\leq 0 \\ -1A + 1.5B &\leq 200 \\ A, B &\geq 0 \end{aligned}$$

9. Identifique la región factible para el conjunto de restricciones siguiente:

$$\begin{aligned} 3A - 2B &\geq 0 \\ 2A - 1B &\leq 200 \\ 1A \quad &\leq 150 \\ A, B &\geq 0 \end{aligned}$$

AUTO evaluación

10. Para el programa lineal

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 2A + 3B \\ \text{s.a.} \quad & \\ & 1A + 3B \leq 6 \\ & 5A + 3B \leq 15 \\ & A, B \geq 0 \end{aligned}$$

encuentre la solución óptima mediante el procedimiento de solución gráfica. ¿Cuál es el valor de la función objetivo en la solución óptima?

11. Resuelva el programa lineal siguiente mediante el procedimiento de solución gráfica:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 5A + 5B \\ \text{s.a.} \quad & \\ & 1A \qquad \leq 100 \\ & \qquad 1B \leq 80 \\ & 2A + 4B \leq 400 \\ & A, B \geq 0 \end{aligned}$$

12. Considere el problema de programación lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 3A + 3B \\ \text{s.a.} \quad & \\ & 2A + 4B \leq 12 \\ & 6A + 4B \leq 24 \\ & A, B \geq 0 \end{aligned}$$

a. Encuentre la solución óptima mediante el procedimiento de solución gráfica.
b. Si la función objetivo se cambia a $2A + 6B$, ¿cuál será la solución óptima?
c. ¿Cuántos puntos extremos hay? ¿Cuáles son los valores de A y B en cada punto extremo?

AUTO evaluación

13. Considere el programa lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 1A + 2B \\ \text{s.a.} \quad & \\ & 1A \leq 5 \\ & 1B \leq 4 \\ & 2A + 2B = 12 \\ & A, B \geq 0 \end{aligned}$$

a. Muestre la región factible.
b. ¿Cuáles son los puntos extremos de la región factible?
c. Encuentre la solución óptima utilizando el procedimiento gráfico.

14. Par, Inc. es un pequeño fabricante de equipo y material de golf. El distribuidor de Par cree que existe un mercado tanto para una bolsa de golf de precio moderado, llamada modelo estándar, como para una bolsa de golf de un precio alto, llamada modelo de lujo. El distribuidor tiene tanta confianza en el mercado que, si Par puede fabricar las bolsas a un precio competitivo, comprará todas las bolsas que Par fabrique durante los tres meses siguientes. Un análisis detallado de los requerimientos de manufactura dio como resultado la tabla siguiente, la cual muestra los requerimientos de tiempo de producción para las cuatro operaciones de manufactura requeridas y la estimación que hizo el departamento de contabilidad de la contribución a las utilidades por bolsa:

	Tiempo de producción (horas)				
Producto	**Corte y teñido**	**Costura**	**Terminado**	**Inspección y empaque**	**Utilidad por bolsa**
Estándar	$7/10$	$1/2$	1	$1/10$	\$10
de lujo	1	$5/6$	$2/3$	$1/4$	\$ 9

El director de manufactura estima que se dispondrá de 630 horas de corte y teñido, 600 horas de costura, 708 horas de acabado y 135 horas de inspección y empaque para la producción de las bolsas de golf durante los tres meses siguientes.

a. Si la empresa quiere maximizar la contribución total a las utilidades, ¿cuántas bolsas de cada modelo debe fabricar?
b. ¿Qué contribución a las utilidades puede obtener Par con estas cantidades de producción?
c. ¿Cuántas horas de tiempo de producción se programarán para cada operación?
d. ¿Cuál es el tiempo de holgura en cada operación?

15. Suponga que la gerencia de Par (problema 14) se encuentra en las situaciones siguientes:
    a. El departamento de contabilidad revisa su estimación de la contribución a las utilidades para la bolsa de lujo en $18 por bolsa.
    b. Un nuevo material de bajo costo está disponible para la bolsa estándar y la contribución a las utilidades por bolsa estándar aumenta a $20 por bolsa. (Suponga que la contribución a las utilidades de la bolsa de lujo es el valor original de $9.)
    c. Se adquirió un equipo de costura nuevo que aumentará la capacidad de operación de costura a 750 horas. (Suponga que $10A + 9B$ es la función objetivo apropiada.)

    Si cada una de estas situaciones ocurre por separado, ¿cuál es la solución óptima y la contribución total a las utilidades?
16. Remítase a la región factible para Par, Inc. del problema 14.
    a. Desarrolle una función objetivo que haga del punto extremo (0, 540) el punto extremo óptimo.
    b. ¿Cuál es la solución óptima para la función objetivo que seleccionó en el inciso a?
    c. ¿Cuáles son los valores de las variables de holgura asociadas con esta solución?

AUTO evaluación

17. Escriba el programa lineal siguiente en forma estándar:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 5A + 2B \\
\text{s.a.} \quad & \\
& 1A - 2B \leq 420 \\
& 2A + 3B \leq 610 \\
& 6A - 1B \leq 125 \\
& A, B \geq 0
\end{aligned}
$$

18. Para el programa lineal

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 4A + 1B \\
\text{s.a.} \quad & \\
& 10A + 2B \leq 30 \\
& 3A + 2B \leq 12 \\
& 2A + 2B \leq 10 \\
& A, B \geq 0
\end{aligned}
$$

    a. Escriba este problema en forma estándar.
    b. Resuelva el problema utilizando el procedimiento de solución gráfica.
    c. ¿Cuáles son los valores de las tres variables de holgura en la solución óptima?
19. Dado el programa lineal

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 3A + 4B \\
\text{s.a.} \quad & \\
& -1A + 2B \leq 8 \\
& 1A + 2B \leq 12 \\
& 2A + 1B \leq 16 \\
& A, B \geq 0
\end{aligned}
$$

    a. Escriba este problema en forma estándar.
    b. Resuelva el problema utilizando el procedimiento de solución gráfica.
    c. ¿Cuáles son los valores de las tres variables de holgura en la solución óptima?

20. Para el programa lineal

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 3A + 2B \\ \text{s.a.} \quad & \\ & A + B \geq 4 \\ & 3A + 4B \leq 24 \\ & A \geq 2 \\ & A - B \leq 0 \\ & A, B \geq 0 \end{aligned}$$

a. Escriba este problema en forma estándar.
b. Resuelva el problema.
c. ¿Cuáles son los valores de las variables de holgura y de excedente en la solución óptima?

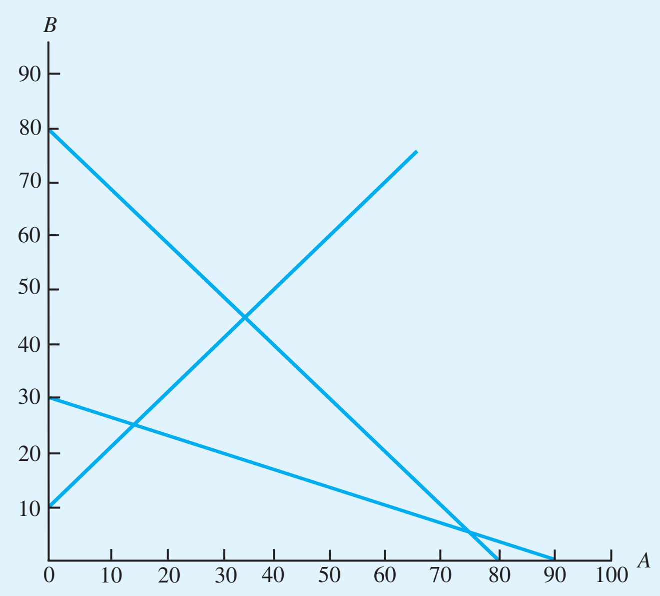
21. Considere el programa lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 2A + 3B \\ \text{s.t.} \quad & \\ & 5A + 5B \leq 400 \quad \text{Restricción 1} \\ & -1A + 1B \leq 10 \quad \text{Restricción 2} \\ & 1A + 3B \geq 90 \quad \text{Restricción 3} \\ & A, B \geq 0 \end{aligned}$$

La figura 7.23 muestra una gráfica de las rectas de restricción.

a. Coloque un número (1, 2 o 3) al lado de cada recta de restricción para identificar a cuál restricción representa.
b. Sombree la región factible de la gráfica.

FIGURA 7.23 GRÁFICA DE LAS RECTAS DE RESTRICCIÓN PARA EL EJERCICIO 21



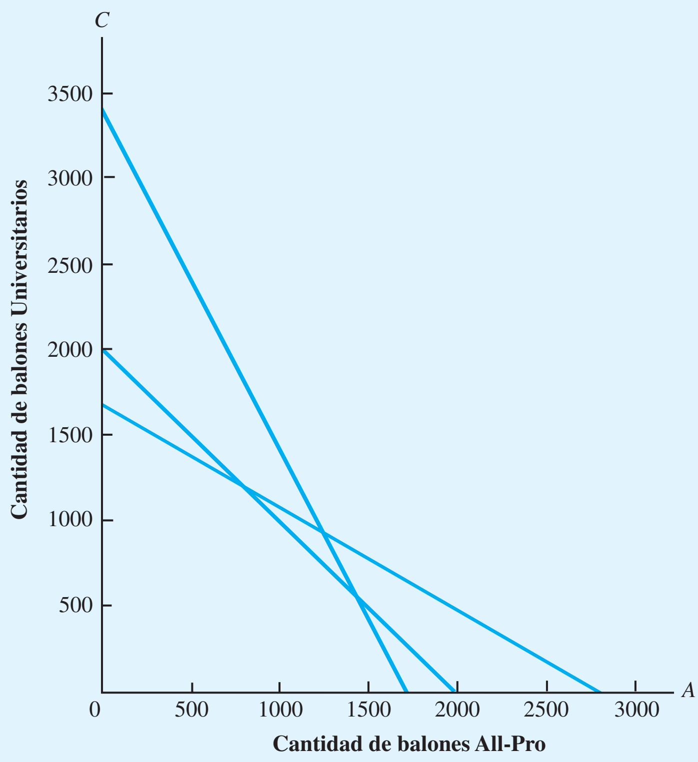
c. Identifique el punto extremo óptimo. ¿Cuál es la solución óptima?
d. ¿Cuáles restricciones son confinantes? Explique por qué.
e. ¿Cuánta holgura o exceso se asocia con la restricción confinante?

22. Reiser Sports Products quiere determinar la cantidad de balones de futbol de All-Pro (A) y Universitario (U) a producir con el fin de maximizar las utilidades durante el siguiente horizonte de planeación de cuatro semanas. Las restricciones que afectan las cantidades de producción son las capacidades de producción en tres departamentos: corte y teñido, costura e inspección y empaque. Para el periodo de planeación de cuatro semanas se dispone de 340 horas de corte y teñido, 420 horas de costura y 200 horas de inspección y empaque. Los balones de futbol All-Pro producen utilidades de \$5 por unidad y los balones Universitarios producen una utilidad de \$4 por unidad. El modelo de programación lineal con los tiempos de producción expresados en minutos es el siguiente:

$$
\begin{array}{lrll}
\text{Max} & 5A + 4U & & \\
\text{s.t.} & & & \\
& 12A + 6U \leq & 20{,}400 & \text{Corte y teñido} \\
& 9A + 15U \leq & 25{,}200 & \text{Costura} \\
& 6A + 6U \leq & 12{,}000 & \text{Inspección y empaque} \\
& A, U \leq 0 & &
\end{array}
$$

Una parte de la solución gráfica al problema de Reiser se muestra en la figura 7.24.

FIGURA 7.24 PARTE DE LA SOLUCIÓN GRÁFICA PARA EL EJERCICIO 22



a. Sombree la región factible para este problema.
b. Determine las coordenadas de cada punto extremo y las utilidades correspondientes. ¿Cuál punto extremo genera mayores utilidades?
c. Trace la recta de utilidades correspondiente a una utilidad de $4 000. Mueva la recta de utilidades lo más lejos posible del origen con el fin de determinar cuál punto extremo proporcionará la solución óptima.
d. ¿Cuáles restricciones son confinantes? Explique por qué.
e. Suponga que los valores de los coeficientes de la función objetivo son $4 para cada modelo All-Pro y $5 para cada modelo Universitario producidos. Utilice el procedimiento de solución gráfica para determinar la solución óptima y el valor correspondiente de las utilidades.

23. Embassy Motorcycles (EM) fabrica dos motocicletas ligeras diseñadas para un manejo fácil y seguro. El modelo EZ-Rider tiene un motor nuevo y un perfil bajo que facilitan el equilibrio. El modelo Lady-Sport es ligeramente mayor, utiliza un motor más tradicional y se diseñó especialmente para las mujeres motociclistas. Embassy fabrica los motores para ambos modelos en su planta de Des Moines, Iowa. Cada motor de EZ-Rider requiere 6 horas de tiempo de manufactura y cada motor Lady-Sport requiere 3 horas. La planta de Des Moines tiene 2100 horas de tiempo de manufactura disponibles para el siguiente periodo de producción. El proveedor de cuadros de motocicleta de la empresa puede suministrar todos los cuadros para la EZ-Rider que solicite la empresa. Sin embargo, el cuadro de la Lady-Sport es más complejo y el proveedor sólo puede suministrar hasta 280 cuadros de ésta para el siguiente periodo de producción. El ensamblaje final y las pruebas requieren 2 horas para cada modelo EZ-Rider y 2.5 horas para cada modelo Lady-Sport. Se dispone de un máximo de 1000 horas de tiempo de ensamblaje y pruebas para el siguiente periodo de producción. El departamento de contabilidad de la empresa proyecta una contribución a las utilidades de $2 400 por cada EZ-Rider producida y $1800 por cada Lady-Sport producida.
a. Formule un modelo de programación lineal que se utilice para determinar la cantidad de unidades de cada modelo que debe producirse con el fin de maximizar la contribución total a las utilidades.
b. Resuelva el problema gráficamente. ¿Cuál es la solución óptima?
c. ¿Cuáles restricciones son confinantes?

AUTO evaluación

24. Kelson Sporting Equipment, Inc. fabrica dos tipos diferentes de guantes de beisbol: un modelo regular y un modelo para catcher. La empresa dispone de 900 horas de tiempo de producción en su departamento de corte y confección, 300 horas en su departamento de acabados y 100 horas en su departamento de empaque y envío. Los requerimientos de tiempo de producción y la contribución a las utilidades por guante se proporcionan en la tabla siguiente:

	Tiempo de producción (horas)			
Modelo	**Corte y confección**	**Acabados**	**Empaque y envío**	**Utilidad por guante**
Modelo regular	1	$^1/_2$	$^1/_8$	$5
Modelo para catcher	$^3/_2$	$^1/_3$	$^1/_4$	$8

Suponiendo que la empresa está interesada en maximizar la contribución total a las utilidades, responda lo siguiente:
a. ¿Cuál es el modelo de programación lineal para este problema?
b. Encuentre la solución óptima utilizando el procedimiento de solución gráfica. ¿Cuántos guantes de cada modelo debe fabricar Kelson?
c. ¿Qué contribución total a las utilidades puede obtener Kelson con las cantidades de producción dadas?
d. ¿Cuántas horas de tiempo de producción se programarán en cada departamento?
e. ¿Cuál es el tiempo de holgura en cada departamento?

25. Hace poco, George Johnson heredó una gran suma de dinero; quiere utilizar una parte de su dinero para establecer un fideicomiso para sus dos hijos. El fideicomiso tiene dos opciones de inversión: 1) un fondo de bonos y 2) un fondo de acciones. Los rendimientos proyectados durante el periodo de vigencia de las inversiones son 6% para el fondo de bonos y 10% para el fondo de acciones. Sin importar qué parte de la herencia decida finalmente asignar al fideicomiso, quiere invertir por lo menos 30% de ese monto al fondo de bonos. También quiere seleccionar una combinación que le permita obtener un rendimiento total de por lo menos 7.5%.
   a. Elabore un modelo de programación que se utilice para determinar el porcentaje que debe asignarse a cada una de las alternativas de inversión posibles.
   b. Resuelva el problema mediante el procedimiento de solución gráfica.

26. Al restaurante Sea Wharf le gustaría determinar la mejor manera de asignar un presupuesto de publicidad mensual de $1000 entre los periódicos y la radio. La gerencia decidió que debe invertir por lo menos 25% del presupuesto en cada tipo de medio y que la cantidad de dinero gastada en la publicidad en los periódicos locales debe ser por lo menos del doble de la publicidad invertida en radio. Un consultor de marketing elaboró un índice que mide la penetración en la audiencia por dólar de publicidad en una escala de 0 a 100, en el que los valores más altos implican una mayor penetración. Si el valor del índice para la publicidad en los periódicos locales es 50 y el valor del índice para el espacio publicitario en la radio es 80, ¿cómo debe asignar el restaurante su presupuesto de publicidad para maximimizar el valor de la penetración total en la audiencia?
   a. Formule un modelo de programación lineal que pueda utilizarse para determinar cómo debe asignar el restaurante su presupuesto de publicidad con la finalidad de maximizar el valor de la penetración total en la audiencia.
   b. Resuelva el problema mediante el procedimiento de solución gráfica.

27. Blair & Rosen, Inc. (B&R) es una firma de corretaje que se especializa en portafolios de inversión diseñados para cumplir con las tolerancias al riesgo específicas de sus clientes. Un cliente que contactó a B&R la semana pasada tiene un monto máximo de $50,000 para invertir. El asesor de inversiones de B&R decide recomendar un portafolio que consta de dos fondos de inversión: uno de Internet y uno Blue Chip. El fondo de Internet tiene un rendimiento anual proyectado de 12%, mientras que el Blue Chip tiene un rendimiento anual proyectado de 9%. El asesor de inversiones sugiere que como máximo se inviertan $35,000 de los fondos del cliente en el fondo de Internet. Los servicios de B&R incluyen una tasa de riesgo para cada alternativa de inversión. El fondo de Internet, que es la más riesgosa de las dos alternativas de inversión, tiene una tasa de riesgo de 6 por cada mil dólares invertidos. El fondo Blue Chip tiene una tasa de riesgo de 4 por cada mil dólares invertidos. Por ejemplo, si se invierten $10,000 en cada uno de los dos fondos de inversión, la tasa de riesgo de B&R para el portafolio sería $6(10) + 4(10) = 100$. Por último, B&R desarrolló un cuestionario para medir la tolerancia al riesgo de cada cliente. Con base en las respuestas, los clientes se clasifican como inversionistas conservadores, moderados o agresivos. Suponga que los resultados del cuestionario clasifican al cliente actual como un inversionista moderado. B&R recomienda que un inversionista moderado limite su portafolio a una de riesgo máxima de 240.
   a. ¿Cuál es el portafolio de inversión recomendado para este cliente? ¿Cuál es el rendimiento anual para el portafolio?
   b. Imagine que un segundo cliente con $50,000 para invertir se clasifica como inversionista agresivo. B&R recomienda que la tasa de riesgo máxima del portafolio para un inversionista agresivo sea 320. ¿Cuál es el portafolio de inversión recomendado para este inversionista agresivo? Explique qué sucede con el portafolio bajo la estrategia del inversionista agresivo.
   c. Suponga que un tercer cliente con $50,000 para invertir se clasifica como un inversionista conservador. B&R recomienda que la tasa de riesgo máxima del portafolio para un inversionista conservador sea 160. Elabore el portafolio de inversión recomendada para el inversionista conservador. Comente la interpretación de la variable de holgura para la restricción del fondo de inversión total.

28. Tom's, Inc. elabora varios productos de comida mexicana y los vende a Western Foods, una cadena de tiendas de abarrotes localizadas en Texas y Nuevo México. Tom's produce dos tipos de salsa: la salsa Western Foods y la salsa Mexico City. Básicamente, las dos contienen una mezcla diferente de tomates enteros, salsa y puré de jitomate. La salsa Western Foods contiene una mezcla de 50% de tomates enteros, 30% de salsa de tomate y 20% de puré de tomate, mientras que la Mexico City, que tiene una consistencia más espesa y en trozos, incluye 70% de tomates enteros, 10% de salsa de tomate y 20% de puré de tomate. Cada frasco de salsa producido pesa 10 onzas. Para el periodo de producción actual Tom's, Inc. puede comprar hasta 280 libras de tomates enteros, 130 libras de salsa de tomate y 100 libras de puré de tomate; el precio por libra de estos ingredientes es \$0.96, \$0.64 y \$0.56, respectivamente. El costo de las especias y otros ingredientes es aproximadamente \$0.10 por frasco. La empresa compra frascos de vidrio vacíos por \$0.02 cada uno y los costos de etiquetado y llenado se estiman en \$0.03 por cada frasco de salsa producido. El contrato de Tom's con Western Foods produce ingresos por ventas de \$1.64 por cada frasco de salsa Western Foods y \$1.93 por cada frasco de salsa México City.
    a. Elabore un modelo de programación lineal que permita a Tom's determinar la mezcla de productos de salsa que maximizará la contribución total a las utilidades.
    b. Encuentre la solución óptima.

29. AutoIgnite produce sistemas de encendido electrónico para automóviles en una planta de Cleveland, Ohio. Cada sistema de encendido se ensambla con dos componentes producidos en las plantas de AutoIgnite de Buffalo, Nueva York y Dayton, Ohio. La planta de Buffalo puede producir 2000 unidades del componente 1, 1000 unidades del componente 2 o cualquier combinación de los dos componentes cada día. Por ejemplo, 60% del tiempo de producción se podría dedicar a producir el componente 1 y 40% del tiempo de producción para producir el componente 2; en este caso, la planta de Buffalo sería capaz de producir $0.6(2000) = 1200$ unidades del componente 1 y $0.4(1000) = 400$ unidades del componente 2 diariamente. La planta de Dayton puede producir 600 unidades del componente 1, 1400 unidades del componente 2 o cualquier combinación de los dos componentes diario. Al final de cada día, la producción de componentes de Buffalo y Dayton se envía a Cleveland para ensamblar los sistemas de encendido al día hábil siguiente.
    a. Elabore un modelo de programación lineal que pueda utilizarse para hacer un programa de producción diaria para las plantas de Buffalo y Dayton que maximice la producción diaria de los sistemas de encendido en la planta Cleveland.
    b. Encuentre la solución óptima.

30. Un asesor financiero de Diehl Investments identificó dos empresas que son probables candidatos para una adquisición en el futuro cercano. Eastern Cable es un fabricante importante de sistemas de cable flexible utilizados en la industria de la construcción, y ComSwitch es una empresa nueva especializada en sistemas de conmutación digital. Eastern Cable cotiza en la actualidad a \$40 por acción y ComSwitch a \$25. Si ocurre la adquisición, el asesor financiero estima que el precio de Eastern Cable aumentará a \$55 por acción y de ComSwitch a \$43. En este momento el asesor financiero ha identificado a esta última como la alternativa de mayor riesgo. Suponga que un cliente mostró una disposición a invertir un máximo de \$50,000 en las dos empresas. El cliente desea invertir por lo menos \$15,000 en Eastern Cable y \$10,000 en ComSwitch. Debido al mayor riesgo asociado con ComSwitch, el asesor financiero ha recomendado que se inviertan cuando mucho \$25,000 en esta empresa.
    a. Elabore un modelo de programación lineal que se utilice para determinar el número de acciones de Eastern Cable y el de ComSwitch que cumplan con las restricciones de la inversión y maximicen el rendimiento total sobre la inversión.
    b. Trace la gráfica de la región factible.
    c. Determine las coordenadas de cada punto extremo.
    d. Encuentre la solución óptima.

AUTO evaluación

31. Considere el programa lineal siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & 3A + 4B \\
\text{s.a.} & \\
& 1A + 3B \geq 6 \\
& 1A + 1B \geq 4 \\
& A, B \geq 0
\end{array}
$$

Identifique la región factible y encuentre la solución óptima mediante el procedimiento de solución gráfica. ¿Cuál es el valor de la función objetivo?

32. Identifique las tres soluciones del punto extremo para el problema de M&D Chemicals (vea la sección 7.5). Identifique el valor de la función objetivo y los valores de las variables de holgura y excedente en cada punto extremo.

33. Considere el problema de programación lineal siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & A + 2B \\
\text{s.a.} & \\
& A + 4B \leq 21 \\
& 2A + B \geq 7 \\
& 3A + 1.5B \leq 21 \\
& -2A + 6B \geq 0 \\
& A, B \geq 0
\end{array}
$$

a. Encuentre la solución óptima mediante el procedimiento de solución gráfica y el valor de la función objetivo.
b. Determine la cantidad de holgura o excedente para cada restricción.
c. Suponga que la función objetivo cambia a Max $5A + 2B$. Encuentre la solución óptima y el valor de la función objetivo.

AUTO evaluación

34. Considere el programa lineal siguiente:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & 2A + 2B \\
\text{s.a.} & \\
& 1A + 3B \leq 12 \\
& 3A + 1B \geq 13 \\
& 1A - 1B = 3 \\
& A, B \geq 0
\end{array}
$$

a. Muestre la región factible.
b. ¿Cuáles son los puntos extremos de la región factible?
c. Encuentre la solución óptima mediante el procedimiento de solución gráfica.

AUTO evaluación

35. Para el programa lineal

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & 6A + 4B \\
\text{s.a.} & \\
& 2A + 1B > 12 \\
& 1A + 1B \geq 10 \\
& 1B \leq 4 \\
& A, B \geq 0
\end{array}
$$

a. Escriba el problema en forma estándar.
b. Resuelva el problema mediante el procedimiento de solución gráfica.
c. ¿Cuáles son los valores de las variables de holgura y excedente?

36. Como parte de una iniciativa de mejora de la calidad, los empleados de Consolidated Electronics completan un programa de capacitación de tres días sobre trabajo en equipo y otro de dos días sobre solución de problemas. El gerente de mejoramiento de la calidad ha solicitado que se ofrezcan por lo menos 8 programas de capacitación sobre trabajo en equipo y 10 sobre solución de problemas durante los seis meses siguientes. Además, el equipo directivo ha especificado que se deben ofrecer por lo menos 25 programas de capacitación durante este periodo. Consolidated Electronics contrata a un consultor para que imparta dichos programas. Durante el trimestre siguiente, el consultor dispone de 84 días de tiempo de capacitación. Cada programa sobre trabajo en equipo cuesta $10,000 y cada programa sobre solución de problemas $8,000.
    a. Elabore un modelo de programación lineal que se utilice para determinar el número de programas de capacitación sobre trabajo en equipo y sobre solución de problemas que deben ofrecerse para minimizar el costo total.
    b. Trace la gráfica de la región factible.
    c. Determine las coordenadas de cada punto extremo.
    d. Encuentre la solución de costo mínimo.

37. New England Cheese produce dos quesos untables al mezclar queso cheddar suave con cheddar extra fino. Los quesos untables se empacan en envases de 12 onzas que se venden a distribuidores de todo el noreste. La mezcla Regular contiene 80% de queso cheddar suave y 20% de cheddar extra fino, y la mezcla Zesty contiene 60% de cheddar suave y 40% de extra fino. Este año la cooperativa lechera ofreció proporcionar hasta 8100 libras de queso cheddar suave por $1.20 la libra y hasta 3 000 libras de queso cheddar extra fino por $1.40 la libra. El costo de mezclar y empacar los quesos untables, sin incluir el costo del queso, es $0.20 por envase. Si cada envase de queso Regular se vende en $1.95 y cada envase de queso Zesty se vende en $2.20, ¿cuántos envases de cada producto debe producir New England Cheese?

38. Applied-Technology, Inc. (ATI) fabrica cuadros para bicicleta utilizando dos materiales de fibra de vidrio que mejoran la razón fuerza a peso de los cuadros. El costo del material de calidad estándar es $7.50 por yarda y el costo del material de calidad profesional es $9.00 por yarda. Los materiales de ambas calidades contienen diferentes cantidades de fibra de vidrio, fibra de carbón y Kevlar, como muestra la tabla siguiente:

	Calidad estándar	**Calidad profesional**
Fibra de vidrio	84%	58%
Fibra de carbón	10%	30%
Kevlar	6%	12%

ATI firmó un contrato con un fabricante de bicicletas para producir un cuadro nuevo con por lo menos 20% de contenido de fibra de carbón y no más de 10% de contenido Kevlar. Para cumplir con la especificación de peso requerida, se debe utilizar un total de 30 yardas de material para cada cuadro.
    a. Formule un programa lineal para determinar el número de yardas de cada calidad de material de fibra de vidrio que ATI debe utilizar en cada cuadro para minimizar el costo total. Defina las variables de decisión e indique el propósito de cada restricción.
    b. Utilice el procedimiento de solución gráfica para determinar la región factible. ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos extremos?
    c. Calcule el costo total en cada punto extremo. ¿Cuál es la solución óptima?

d. El distribuidor de material de fibra de vidrio actualmente tiene un exceso de artículos almacenados del material de calidad profesional. Para reducir el inventario, el distribuidor ofreció a ATI la oportunidad de comprar material de calidad profesional a $8 la yarda. ¿Cambiará la solución óptima?
e. Suponga que el distribuidor reduce aún más el precio del material de calidad profesional a $7.40 por yarda. ¿La solución óptima cambia? ¿Qué efecto tendrá en la solución óptima el precio aún más bajo del material de calidad profesional? Explique por qué.

39. Innis Investments administra fondos para varias empresas y clientes adinerados. La estrategia de inversión se adapta a las necesidades de cada cliente. Para los clientes nuevos, Innis autoriza una inversión de hasta $1.2 millones en dos fondos de inversión: un fondo de acciones y uno de mercado de dinero. Cada unidad del fondo de acciones cuesta $50 y proporciona una tasa de rendimiento anual de 10%, mientras que cada unidad del fondo de mercado de dinero cuesta $100 y proporciona una tasa de rendimiento anual de 4%.

    El cliente quiere minimizar el riesgo sujeto al requerimiento de que el ingreso anual de la inversión sea por lo menos de $60,000. De acuerdo con el sistema de medición de riesgos de Innis, cada unidad invertida en el fondo de acciones tiene un índice de riesgo de 8, y cada unidad invertida en el fondo de mercado de dinero tiene un índice de riesgo de 3; el índice de riesgo más alto asociado con el fondo de acciones indica que ésta es la inversión más riesgosa. El cliente de Innis también especificó que se deben invertir por lo menos $300,000 en el fondo de mercado de dinero.

    a. Determine cuántas unidades de cada fondo debe comprar Innis para que el cliente minimice el índice de riesgo total del portafolio.
    b. ¿Cuántos ingresos anuales generará esta estrategia de inversión?
    c. Suponga que el cliente desea maximizar el rendimiento anual, ¿cómo deben invertirse los fondos de inversión?

40. Photo Chemicals produce dos tipos de líquidos para revelado fotográfico. La producción de los dos artículos le cuesta a Photo Chemicals $1 por galón. Con base en un análisis de los niveles de inventario actuales y los pedidos importantes para el mes siguiente, la gerencia de Photo Chemicals especificó que deben producirse por lo menos 30 galones del producto 1 y 20 galones del producto 2 durante los dos meses siguientes. La gerencia también estableció que debe utilizarse un inventario existente de materias primas muy perecederas requeridas en la producción de ambos fluidos dentro de las dos semanas siguientes. El inventario actual de la materia prima perecedera es 80 libras. Aunque se puede ordenar más de esta materia prima si es necesario, el inventario actual que no se use dentro de las siguientes dos semanas se echará a perder, de ahí que la gerencia requiera que se usen por lo menos 80 libras en las dos semanas siguientes. Además, se sabe que el producto 1 requiere 1 libra de esta materia prima perecedera por galón y el producto 2 requiere 2 libras de la materia prima por galón. Como el objetivo de Photo Chemicals es mantener sus costos de producción en el nivel mínimo posible, la gerencia de la empresa busca un plan de producción de costo mínimo que utilice las 80 libras de materia prima perecedera y proporcione por lo menos 30 galones del producto 1 y 20 galones del producto 2. ¿Cuál es la solución de costo mínimo?

41. Southern Oil produce gasolina de dos grados: regular y premium. La contribución a las utilidades es $0.30 por galón para la gasolina regular y $0.50 por galón para la gasolina premium. Cada galón de gasolina regular contiene 0.3 galones de petróleo crudo de grado A y el galón de gasolina premium contiene 0.6 galones de petróleo crudo de grado A. Para el siguiente periodo de producción, Southern cuenta con 18,000 galones de petróleo crudo de grado A. La refinería que produce la gasolina tiene una capacidad de producción de 50,000 galones para el periodo de producción siguiente. Los distribuidores de Southern Oil han indicado que la demanda de gasolina premium para el siguiente periodo de producción será como mínimo de 20,000 galones.

    a. Formule un modelo de programación lineal que se pueda utilizar para determinar el número de galones de gasolina regular y el número de galones de gasolina premium que deben producirse para maximizar la contribución total a las utilidades.
    b. ¿Cuál es la solución óptima?
    c. ¿Cuáles son los valores e interpretaciones de las variables de holgura?
    d. ¿Cuáles son las restricciones confinantes?

AUTO evaluación

42. ¿El siguiente programa lineal involucra infactibilidad, ilimitación o soluciones óptimas alternas? Explique por qué.

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 4A + 8B \\
\text{s.a.} \quad & \\
& 2A + 2B \leq 10 \\
& -1A + 1B \geq 8 \\
& A, B \geq 0
\end{aligned}$$

AUTO evaluación

43. ¿El siguiente programa lineal involucra infactibilidad, no limitación o soluciones óptimas alternas? Explique por qué.

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & 1A + 1B \\
\text{s.a.} \quad & \\
& 8A + 6B \geq 24 \\
& 2B \geq 4 \\
& A, B \geq 0
\end{aligned}$$

44. Considere el programa lineal siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & 1A + 1B \\
\text{s.a.} \quad & \\
& 5A + 3B \leq 15 \\
& 3A + 5B \leq 15 \\
& A, B \geq 0
\end{aligned}$$

a. ¿Cuál es la solución óptima para este problema?
b. Suponga que la función objetivo cambia a $1A + 2B$. Encuentre la nueva solución óptima.

45. Considere el programa lineal siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 1A - 2B \\
\text{s.a.} \quad & \\
& -4A + 3B \leq 3 \\
& 1A - 1B \leq 3 \\
& A, B \geq 0
\end{aligned}$$

a. Trace la gráfica de la región factible para el problema.
b. ¿La región factible es ilimitada? Explique por qué.
c. Encuentre la solución óptima.
d. ¿Una región factible ilimitada implica que la solución óptima al programa lineal será ilimitada?

46. El gerente de una pequeña tienda de abarrotes independiente trata de aprovechar mejor el espacio en los estantes para bebidas refrescantes. La tienda vende marcas nacionales y genéricas y actualmente cuenta con 200 pies cuadrados de espacio disponible en los estantes. El gerente quiere asignar por lo menos 60% del espacio a las marcas nacionales y, sin importar la rentabilidad, por lo menos 10% del espacio a las marcas genéricas. ¿Cuántos pies cuadrados de espacio debe asignar la gerente a las marcas nacionales y a las genéricas bajo las siguientes circunstancias?

a. Las marcas nacionales son más rentables que las genéricas.
b. Las dos marcas son igual de rentables.
c. La marca genérica es más rentable que la nacional.

47. Comente lo que ocurre con el problema de M&D Chemicals (vea la sección 7.5) si el costo por galón para el producto A se incrementa a $3.00. ¿Qué recomendaría usted? Explique por qué.

48. Para el problema de M&D Chemicals en la sección 7.5, comente el efecto de que la gerencia requiera una producción total de 500 galones para ambos productos. Liste de dos o tres acciones que M&D debe considerar para corregir la situación que usted encontró.

49. PharmaPlus opera una cadena de 30 farmacias. El personal de las farmacias está integrado por farmacéuticos y técnicos autorizados. La empresa actualmente emplea 85 farmacéuticos de tiempo completo (combinación de tiempo completo y tiempo parcial) y 175 técnicos equivalentes de tiempo completo. Cada primavera la gerencia revisa los niveles de personal actuales y elabora planes de contratación para el año. Un pronóstico reciente de la cantidad de recetas para el año siguiente muestra que se requerirán por lo menos 250 de los empleados equivalentes de tiempo completo (farmacéuticos y técnicos) para dotar de personal a las farmacias. El departamento de personal espera que queden 10 farmacéuticos y 30 técnicos para el año siguiente. Para tener en cuenta el desgaste esperado y prepararse para el crecimiento futuro, la gerencia estableció que deben contratarse por lo menos 15 farmacéuticos. Asimismo, los nuevos lineamientos de la calidad en el servicio de PharmaPlus especifican no más de dos técnicos por farmacéuticos autorizados. El sueldo promedio por hora de los farmacéuticos autorizados son $40 y el de los técnicos $10.
    a. Determine un plan de dotación de personal de costo mínimo para PharmaPlus. ¿Cuántos farmacéuticos se necesitan?
    b. Dados los niveles de dotación de personal actuales y el desgaste esperado, ¿cuántas contrataciones nuevas (si es que hay) deben hacerse para alcanzar el nivel recomendado en el inciso a? ¿Qué impacto tendrá esto en la nómina?

50. Expedition Outfitters fabrica una variedad de ropa especial para excursionismo, esquí y alpinismo. Han decidido comenzar la producción de dos nuevos parkas diseñados para utilizar en un clima extremadamente frío: Mount Everest y Rocky Mountain. Su planta de manufactura tiene 120 horas de tiempo de corte y 120 horas de tiempo de costura disponibles para producir estos dos parkas. Cada parka Mount Everest requiere 30 minutos de tiempo de corte y 45 de tiempo de costura, y cada parka Rocky Mountain requiere 20 minutos de corte y 15 de costura. El costo de la mano de obra y del material es $150 para cada parka Mount Everest y $50 para cada parka Rocky Mountain, y los precios al menudeo en el catálogo de pedidos por correo de la empresa son $250 por el parka Mount Everest y $200 por el parka Rocky Mountain. Como la gerencia considera que Mount Everest es un abrigo único que mejorará la imagen de la empresa, especificaron que la producción de este modelo debe ser por lo menos 20% de la producción total. Suponiendo que Expedition Outfitters puede vender todos los abrigos de cada tipo que pueda producir, ¿cuántas unidades de cada modelo debe fabricar para maximizar la contribución total a las utilidades?

51. English Motors, Ltd. (EML), desarrolló un nuevo vehículo SUV de tracción permanente en las cuatro ruedas. Como parte de la campaña de marketing, EML elaboró una presentación de ventas en video para enviarla tanto a los propietarios actuales de los vehículos de tracción permanente de EML como a los de vehículos todo terreno de tracción 4×4 que ofrecen los competidores; EML se refiere a estos dos mercados meta como el mercado de clientes actuales y el mercado de clientes nuevos. Las personas que reciben el nuevo video de promoción también recibirán un cupón para una prueba de manejo del nuevo modelo EML por un fin de semana. Un factor importante en el éxito de la nueva promoción es la tasa de respuesta, es decir, el porcentaje de personas que recibe la promoción y hace una prueba de manejo del modelo nuevo. EML estima que la tasa de respuesta para el mercado de los clientes actuales es 25% y para el mercado de clientes nuevos 20%. Para los clientes que hacen la prueba de manejo del modelo nuevo, el índice de ventas es el

porcentaje de personas que realiza una compra. Los estudios de investigación de mercados indican que el índice de ventas es 12% para el mercado de los clientes actuales y 20% para el de clientes nuevos. El costo de cada promoción, excluidos los costos de las pruebas de manejo, es de $4 por cada promoción enviada al mercado de los clientes actuales, y $6 por cada promoción enviada al mercado de clientes nuevos. La gerencia también especificó que un mínimo de 30 000 clientes actuales y 10 000 recientes deben hacer una prueba de manejo del modelo nuevo. Asimismo, el número de clientes actuales que realice la prueba de manejo del vehículo nuevo debe ser por lo menos el doble de los clientes recién incluidos que realicen la misma prueba. Si el presupuesto de marketing, excluidos los costos de las pruebas de manejo, es $1.2 millones, ¿cuántas promociones deben enviarse a cada grupo de clientes con el fin de maximizar las ventas totales?

52. Creative Sports Design (CSD) fabrica una raqueta de tamaño estándar y una de tamaño grande. Las raquetas de la empresa son sumamente ligeras debido a que se fabrican con una aleación de magnesio y grafito que inventó el fundador de la empresa. Cada raqueta tamaño estándar utiliza 0.125 kilogramos de la aleación y cada raqueta grande 0.4 kilogramos; para el siguiente periodo de producción de dos semanas sólo se cuenta con 80 kilogramos de la aleación. Para cada raqueta estándar se emplean 10 minutos de tiempo de manufactura y para cada raqueta grande 12 minutos. Las contribuciones a las utilidades son de $10 para cada raqueta estándar y de $15 para cada raqueta grande, y se dispone de 40 horas de tiempo de manufactura cada semana. La gerencia especificó que la raqueta estándar debe constituir por lo menos 20% de la producción total. ¿Cuántas raquetas de cada tipo debe fabricar CSD durante las dos semanas siguientes para maximizar la contribución total a las utilidades? Suponga que debido a la naturaleza única de sus productos, CSD puede vender todas las raquetas que produzca.

53. A la gerencia de High Tech Services (HTS) le gustaría desarrollar un modelo que ayude a asignar el tiempo que los técnicos tienen disponible entre las llamadas de servicio a los clientes por contrato regulares y a los clientes nuevos. Se dispone de un máximo de 80 horas del tiempo de los técnicos durante un periodo de planeación de dos semanas. Para satisfacer los requerimientos de flujo de efectivo, deben generarse por lo menos $800 en ingresos por técnico durante dicho periodo. El tiempo de los técnicos para los clientes regulares genera $25 por hora, pero el tiempo de los técnicos para los clientes recién adscritos sólo genera un promedio de $8 por hora debido a que en muchos casos un contacto de estos clientes no proporciona servicios facturables. Para asegurar que se mantienen los contactos de los clientes nuevos, el tiempo de los técnicos invertido en ellos debe ser por lo menos de 60% del tiempo invertido en los contactos de clientes regulares. Dados estos requerimientos de ingresos y políticas, a HTS le gustaría determinar cómo asignar el tiempo de los técnicos a los clientes regulares y a los nuevos de modo que se maximice el número total de clientes contactados durante el periodo de dos semanas. Los técnicos requieren un promedio de 50 minutos para cada contacto de cliente regular y 1 hora para cada contacto de cliente nuevo.
    a. Desarrolle un modelo de programación lineal que permita a HTS asignar el tiempo de los técnicos entre los clientes regulares y los nuevos.
    b. Encuentre la solución óptima.

54. Jackson Hole Manufacturing es un pequeño fabricante de productos de plástico utilizados en las industrias automotriz y de cómputo. Uno de sus contratos importantes es con una empresa grande de computadoras y consiste en la fabricación de fundas de plástico para las impresoras portátiles de la empresa, las cuales se producen en dos máquinas de moldeo por inyección. La máquina M-100 tiene una capacidad de producción de 25 fundas por hora y la M-200 40 fundas por hora. Ambas máquinas utilizan el mismo material químico para producir las fundas para impresora; la M-100 utiliza 40 libras de materia prima por hora y la M-200 50 libras por hora. La empresa de computadoras pidió a Jackson Hole que produjera el mayor número de fundas posible durante la próxima semana; pagará $18 por cada funda que Jackson Hole le entregue. Sin embargo, la semana siguiente es un periodo vacacional programado regularmente para la mayoría de los empleados de producción de Jackson Hole; durante este tiempo se realiza el mantenimiento anual de todo el equipo de la planta. Debido al periodo de inactividad por mantenimiento, la M-100

estará disponible sólo por 15 horas y la M-200 sólo por 10 horas. No obstante, debido al alto costo involucrado en las dos máquinas, la gerencia requiere que, si la producción se programa en cualquiera de las máquinas, la máquina debe operarse por lo menos durante 5 horas. El proveedor del material químico utilizado en el proceso de producción informó a Jackson Hole que dispondrá de un máximo de 1000 libras de material para la producción de la semana siguiente; el costo de esta materia prima es $6 por libra. Además del costo de la materia prima, Jackson Hole estima que los costos por hora de operación de la M-100 y la M-200 son $50 y $75, respectivamente.

a. Formule un modelo de programación lineal que pueda utilizarse para maximizar la contribución a las utilidades.
b. Encuentre la solución óptima.

Caso de estudio 1 Equilibrio de la carga de trabajo

Digital Imaging (DI) fabrica impresoras fotográficas para los mercados profesional y de consumo. La división consumo de DI recientemente introdujo dos impresoras fotográficas que producen impresiones a color que rivalizan con aquellas hechas en un laboratorio de procesamiento profesional. El modelo DI-910 puede producir una impresión a hoja completa de 4″ × 6″ en aproximadamente 37 segundos. La DI-950, más sofisticada y rápida, puede producir incluso una impresión a hoja completa de 13″ × 19″. Las proyecciones financieras muestran una contribución a las utilidades de $42 por cada DI-910 y $87 por cada DI-950.

Las impresoras se ensamblan, prueban y empacan en la planta de DI localizada en New Bern, Carolina del Norte, la cual está muy automatizada y utiliza dos líneas de manufactura para fabricar las impresoras. La línea 1 realiza la operación de ensamblaje con un tiempo de 3 minutos por impresora DI-910 y 6 minutos por impresora DI-950. La línea 2 realiza las operaciones de prueba y empaque. Los tiempos son 4 minutos por impresora DI-910 y 2 minutos por impresora DI-950. El tiempo más corto para esta impresora es resultado de la mayor rapidez de impresión. Ambas líneas de manufactura están en operación un turno de 8 horas por día.

Informe gerencial

Realice un análisis para Digital Imaging con el fin de determinar cuántas unidades de cada impresora fabricar. Prepare un informe para el presidente de DI que exponga sus hallazgos y recomendaciones. Incluya (sin limitarse a ello) una consideración de lo siguiente:

1. El número recomendado de unidades de cada impresora a producir para maximizar la contribución total a las utilidades para un turno de 8 horas. ¿Qué razones podría tener la gerencia para no implementar su recomendación?
2. Imagine que la gerencia establece también que la cantidad de impresoras DI-910 fabricadas debe ser por lo menos igual que el número de unidades DI-950 fabricadas. Suponiendo que el objetivo es maximizar la contribución total a las utilidades para un turno de 8 horas, ¿cuántas unidades de cada impresora deben producirse?
3. ¿La solución que usted desarrolló en el inciso 2 equilibra el tiempo total invertido en la línea 1 y el tiempo total invertido en la línea 2? ¿Por qué este equilibrio o falta del mismo podría ser una inquietud para la gerencia?
4. La gerencia solicitó una expansión del modelo del inciso 2 que proporcione un mejor equilibrio entre el tiempo total en la línea 1 y el tiempo total en la línea 2. La gerencia quiere limitar la diferencia entre el tiempo total en la línea 1 y el tiempo total en la línea 2 a 30 minutos o menos. Si el objetivo sigue siendo maximizar la contribución total a las utilidades, ¿cuántas unidades de cada impresora deben fabricarse? ¿Qué efecto tiene este equilibrio en la carga de trabajo sobre las utilidades totales en el inciso 2?

5. Suponga que en el inciso 1 la gerencia especificó el objetivo de maximizar el número de impresoras fabricadas en cada turno en vez de la contribución total a las utilidades. Dentro de este objetivo, ¿cuántas unidades de cada impresora deben fabricarse por turno? ¿Qué efecto tiene este objetivo en las utilidades totales y en el equilibrio de la carga de trabajo?

Para cada solución que desarrolle, incluya una copia de su modelo de programación lineal y solución gráfica en el apéndice de su informe.

Caso de estudio 2 Estrategia de producción

Better Fitness, Inc. (BFI) fabrica equipo para ejercicio en su planta de Freeport, Long Island. Hace poco diseñó dos máquinas de pesas para el mercado de ejercicio en el hogar, las máquinas utilizan tecnología BFI patentada que proporciona al usuario un rango de capacidad de movimiento sumamente amplio para cada tipo de ejercicio realizado. Hasta ahora, estas capacidades habían estado disponibles sólo en las máquinas de pesas costosas que utilizan principalmente los terapeutas físicos.

En una exposición comercial reciente, las demostraciones de las máquinas despertaron un gran interés por parte de los distribuidores. De hecho, el número de pedidos que BFI recibió en la exposición comercial excedía por mucho sus capacidades de manufactura para el periodo de producción actual. Como resultado, la gerencia decidió comenzar la fabricación de las dos máquinas, las cuales BFI nombró Body-Plus 100 y BodyPlus 200, y requieren para su producción diferentes cantidades de recursos.

La BodyPlus 100 consta de una unidad de estructura, una estación de prensa y una pec-dec. En cada estructura producida se invierten 4 horas de tiempo de mecanizado y sujeción, y 2 de pintura y acabado. Cada estación de prensa requiere 2 horas de mecanizado y sujeción, y 1 de pintura y acabado; en cada estación pec-dec se invierten 2 horas de mecanizado y sujeción, y 2 de pintura y acabados. Además, se dedican 2 horas al ensamblaje, las pruebas y el empaque de cada BodyPlus 100. Los costos de las materias primas son \$450 por cada estructura, \$300 por cada estación de prensa y \$250 por cada estación de pec-dec; el empaque se estima en \$50 por unidad.

La BodyPlus 200 se compone de una unidad de estructura, una estación de prensa, una pec-dec y una de prensa para piernas. En cada estructura producida se invierten 5 horas de tiempo de mecanizado y sujeción, y 4 horas de pintura y acabado. Cada estación de prensa requiere 3 horas de mecanizado y sujeción, y 2 horas de pintura y acabados; en cada estación pec-dec se invierten 2 horas de mecanizado y sujeción, y 2 de pintura y acabado; y cada estación de prensa para piernas requiere 2 horas de mecanizado y sujeción, y 2 de pintura y acabado. Además, se dedican 2 horas al ensamblaje, las pruebas y el empaque de cada BodyPlus 200. Los costos de las materias primas son \$650 por cada estructura, \$400 por cada estación de prensa, \$250 por cada estación pec-dec y \$300 por cada estación de prensa para piernas; el empaque se estima en \$75 por unidad.

Para el siguiente periodo de producción, la gerencia estima que se dispondrá de 600 horas de tiempo de mecanizado y sujeción, 450 de pintura y acabado, y 140 horas de ensamblaje. Los costos de mano de obra actuales son \$20 por hora de mecanizado y sujeción, \$15 por hora de pintura y acabado, y \$12 por hora de ensamblaje, pruebas y empaque. El mercado en el cual deben competir las dos máquinas sugiere un precio al detalle o menudeo de \$2 400 para la BodyPlus 100 y \$3500 para la BodyPlus 200, aunque puede haber flexibilidad por parte de BFI debido a las capacidades únicas de las nuevas máquinas. Los distribuidores autorizados de BFI pueden comprar las máquinas por 70% del precio de menudeo sugerido.

El presidente de BFI considera que las capacidades únicas de la BodyPlus 200 pueden posicionar a BFI como uno de los líderes en equipo para ejercicio de alta calidad. En consecuencia, se estableció que el número de unidades BodyPlus 200 producidas debe ser como mínimo 25% de la producción total.

Informe gerencial

Analice el problema de producción que enfrenta Better Fitness, Inc. y prepare un informe para el presidente de BFI donde exponga sus hallazgos y recomendaciones. Incluya (sin limitarse a ello) una consideración de los puntos siguientes:

1. La cantidad recomendada de máquinas BodyPlus 100 y BodyPlus 200 a producir.
2. El efecto sobre las utilidades del requerimiento de que la cantidad de unidades de la BodyPlus 200 producidas sea por lo menos 25% de la producción total.
3. Si se deben incrementar los esfuerzos para aumentar la contribución a las utilidades.

Incluya una copia de su modelo de programación lineal y solución gráfica en el apéndice de su informe.

Caso de estudio 3 Hart Venture Capital

Hart Venture Capital (HVC) se especializa en capital de riesgo para el desarrollo de software y aplicaciones para Internet. Actualmente HVC tiene dos oportunidades de inversión: 1) Security Systems, una empresa que necesita capital adicional para desarrollar un programa de seguridad en Internet, y 2) Market Analysis, una firma de investigación de mercados que requiere capital adicional para desarrollar un programa para realizar encuestas de satisfacción del cliente. A cambio de sus acciones de Security Systems, la empresa pidió a HVC que proporcionara \$600,000 en el año 1, \$600,000 en el año 2 y \$250,000 en el año 3 durante el periodo de tres años siguiente. A cambio de sus acciones, Market Analysis pidió a HVC que proporcionara \$500,000 en el año 1, \$350,000 en el año 2 y \$400,000 en el año 3, durante el periodo de tres años siguiente. HVC cree que las dos oportunidades de inversión valen la pena. Sin embargo, debido a las demás inversiones, están dispuestos a asignar como máximo \$800,000 a ambos proyectos en el primer año, cuando mucho \$700,000 en el segundo año y \$500,000 en el tercer año.

El equipo de análisis financiero revisó ambos proyectos y recomendó que el objetivo de la empresa sea maximizar el valor presente neto de la inversión total en Security Systems y Market Analysis. El valor presente neto toma en cuenta el valor estimado de las acciones al final del periodo de tres años, así como los flujos de capital necesarios durante cada uno de los tres años. Con una tasa de rendimiento de 8%, el equipo de análisis financiero de HVC estima que 100% de los fondos del proyecto de Security Systems tiene un valor presente neto de \$1,800,000, y 100% de los fondos del proyecto de Market Analysis tiene un valor presente neto de \$1,600,000.

HVC tiene la opción de financiar cualquier porcentaje de los proyectos de Security Systems y Market Analysis. Por ejemplo, si HVC decide financiar 40% del proyecto de Security Systems, se requerirían inversiones de 0.40(\$600,000) = \$240,000 en el año 1, 0.40(\$600,000) = \$240,000 en el año 2 y 0.40(\$250,000) = \$100,000 en el año 3. En este caso, el valor presente neto del proyecto de Security Systems sería 0.40(\$1,800,000) = \$720,000. Los montos de inversión y el valor presente neto para el financiamiento parcial del proyecto de Market Analysis se calcularían de la misma manera.

Informe gerencial

Realice un análisis del problema de inversión de HVC y prepare un informe donde exponga sus hallazgos y recomendaciones. Asegúrese de incluir información sobre lo siguiente:

1. El porcentaje recomendado de cada proyecto que HVC debe financiar y el valor presente neto de la inversión total.
2. Un plan de asignación de capital para Security Systems y Market Analysis para el periodo de tres años siguiente y la inversión total de HVC cada año.

3. El efecto, si lo hay, sobre el porcentaje recomendado de cada proyecto que HVC debe financiar si está dispuesto a asignar $100 000 adicionales durante el primer año.
4. Un plan de asignación de capital si se cuenta con $100 000 adicionales.
5. Su recomendación respecto a si HVC debe asignar los $100 000 adicionales en el primer año.

Proporcione detalles del modelo y el resultado relevante de la computadora en un apéndice del informe.

Apéndice 7.1 Solución de programas lineales con The Management Scientist

En este apéndice se describe cómo se utiliza el software The Management Scientist para resolver el problema de programación lineal de RMC. Después de abrir The Management Scientist siga estos pasos:

Paso 1. Seleccione el módulo **Linear Programming (Programación lineal)**.
Paso 2. Seleccione el menú **File (Archivo)**. Luego seleccione **New (Nuevo)**.
Paso 3. Cuando aparezca el cuadro de diálogo **Problem Features (Características del problema)**:
Introduzca 2 en el cuadro **Number of Decision Variables (Número de variables de decisión)**.
Introduzca 3 en el cuadro **Number of Constraints (Cantidad de restricciones)**.
Seleccione **Maximize (Maximizar)** en el cuadro **Optimization Type (Tipo de optimización)**.
Haga clic en **OK (Aceptar)**.
Paso 4. Cuando aparezca la hoja de trabajo donde introducirá los datos (figura 7.25):
Cambie el nombre de variable en **Variable Names (Nombres de variables)** de XI y X2 para F y S, respectivamente.
Introduzca the **Objective Function Coefficients (Coeficientes de la función objetivo)**.
Para cada restricción:
Introduzca los coeficientes en **Coefficients**.
Introduzca la relación en **Relation** (<, =, >).
Introduzca el valor del lado derecho en **Right-Hand-Side**.
Paso 5. Seleccione el menú **Solution (Solución)**.
Seleccione **Solve (Resolver)**.

The Management Scientist interpreta el símbolo < como ≤ y el símbolo > como ≥.

Los datos que introdujo el usuario en la hoja de trabajo se muestran en la figura 7.25. El resultado de The Management Scientist aparece en la figura 7.15. El problema original

FIGURA 7.25 HOJA DE TRABAJO DE ENTRADA DE DATOS PARA EL PROBLEMA DE RMC UTILIZANDO THE MANAGEMENT SCIENTIST

Optimization Type: Max

	Objective Function	
Variable Names:	F	S
Coefficients:	40	30

	Constraints			
Subject To:	F	S	Relation(<,=,>)	Right-Hand-Side
Constraint 1	0.4	0.5	<	20
Constraint 2		0.2	<	5
Constraint 3	0.6	0.3	<	21

puede editarse o cambiarse al seleccionar el menú **Edit** (Edición). Por último, se puede imprimir el resultado al seleccionar el menú **Solution (Solución)** y luego seleccionar la opción **Print (Imprimir)**.

Apéndice 7.2 Solución de programas lineales con LINGO

En este apéndice se describe cómo utilizar LINGO para resolver el problema de RMC. Cuando se inicia LINGO, aparecen de inmediato dos ventanas. La ventana exterior, o principal, contiene todos los menús y la barra de herramientas de comandos. La ventana pequeña es la ventana del modelo, la cual se utiliza para introducir datos y editar el modelo de programación lineal que usted quiere resolver.

Al igual que con cualquier modelo, se recomienda documentar su modelo LINGO con comentarios. Un comentario en un modelo LINGO comienza con un signo de exclamación y termina con punto y coma. Si así lo desea, un comentario puede abarcar varias líneas.

El primer elemento que se introduce es un comentario que describa la función objetivo. Recuerde que esta función para el problema de RMC es maximizar las utilidades, así que introducimos el comentario siguiente:

```
! MAXIMIZE PROFIT;
```

Para la información más reciente sobre el software LINGO visite el sitio http://www.lindo.com

A continuación se presiona la tecla Enter y luego tecleamos la función objetivo. La función objetivo para el problema de RMC es Max $40F + 30S$. Por tanto, en la segunda línea de la ventana del modelo LINGO, se introduce la expresión siguiente:

```
MAX = 40*F + 30*S;
```

Observe que en LINGO el símbolo * se utiliza para denotar la multiplicación y que la función objetivo, al igual que un comentario, termina con un punto y coma. En general, en LINGO cada expresión matemática (función objetivo y restricciones) termina con un punto y coma.

A continuación se presiona la tecla Enter para desplazarnos a una línea nueva. La primera restricción en el problema de RMC es $0.4F + 0.5S \leq 20$, para el material 1. Por tanto, en la tercera y cuarta líneas de la ventana del modelo LINGO se introducen las expresiones siguientes:

```
!MATERIAL 1 CONSTRAINT;
0.4*F + .5*S <= 20;
```

Note que LINGO interpreta el símbolo <= como ≤. De manera opcional, podríamos introducir < en vez de <=. Como era el caso cuando se introdujo la función objetivo, se requiere un punto y coma al final de la primera restricción. Al presionar la tecla Enter nos desplazamos a una línea nueva y continuamos con el proceso al introducir los comentarios y restricciones restantes como se muestra aquí:

```
!MATERIAL 2 CONSTRAINT;
.2*S <= 5;
!MATERIAL 3 CONSTRAINT;
0.6*F + .3*S <= 21;
```

La ventana del modelo ahora aparece como sigue:

```
! MAXIMIZE PROFIT;
MAX = 40*F + 30*S;
!MATERIAL 1 CONSTRAINT;
0.4*F + .5*S <= 20;
!MATERIAL 2 CONSTRAINT;
.2*S <= 5;
!MATERIAL 3 CONSTRAINT;
0.6*F + .3*S <= 21;
```

FIGURA 7.26 SOLUCIÓN AL PROBLEMA DE RMC UTILIZANDO LINGO

```
Global optimal solution found.
Objective value:                                1600.000
Total solver iterations:                               2

                     Variable           Value        Reduced Cost
                            F        25.00000            0.000000
                            S        20.00000            0.000000

                          Row    Slack or Surplus      Dual Price
                            1        1600.000            1.000000
                            2        0.000000            33.33333
                            3        1.000000            0.000000
                            4        0.000000            44.44444
```

Si usted comete un error al introducir el modelo, puede corregirlo en cualquier momento con sólo posicionar el cursor donde se equivocó y hacer la corrección necesaria.

Para resolver el modelo, seleccione el comando Solve (Resolver) del menú LINGO o presione el botón Solve (Resolver) en la barra de herramientas de la parte superior de la ventana principal. LINGO comenzará el proceso de solución al determinar si el modelo cumple con todos los requerimientos de sintaxis. Si el modelo LINGO no pasa esta prueba, se le informará por medio de un mensaje de error. Si LINGO no encuentra ningún error en los datos introducidos, comenzará a resolver el modelo. Como parte del proceso de solución, LINGO muestra una ventana Solver Status (Estado del solucionador) que permite monitorear el avance del solucionador. LINGO muestra la solución en una ventana nueva titulada "Solution Report" (Informe de solución). El resultado que aparece en esta última ventana para el problema de RMC se muestra en la figura 7.26.

La primera parte del resultado mostrado en la figura 7.26 indica que se ha encontrado una solución óptima y que el valor de la función objetivo es 1600. Vemos que la solución óptima es $F = 25$ y $S = 20$, y que las variables de holgura para las tres restricciones (filas 2 a 4) son 0, 1 y 0. En el capítulo 8 se estudiará el uso de la información en las columnas Reduced Cost (Costo reducido) y Dual Price (Precio dual).

Apéndice 7.3 Solución de programas lineales con Excel

En este apéndice se utiliza una hoja de trabajo de Excel para resolver el problema de programación lineal de RMC. Los datos del problema de RMC se introducen en la parte superior de la hoja de trabajo y el modelo de programación lineal se desarrolla en la parte inferior de la misma.

Formulación

Siempre que formulemos un modelo de programación lineal en una hoja de trabajo, seguimos estos pasos:

Paso 1. Introduzca los datos del problema en la parte superior de la hoja de trabajo.
Paso 2. Especifique las ubicaciones de las celdas para las variables de decisión.
Paso 3. Seleccione una celda e introduzca una fórmula para calcular el valor de la función objetivo.
Paso 4. Seleccione una celda e introduzca una fórmula para calcular el lado izquierdo de cada restricción.
Paso 5. Seleccione una celda e introduzca una fórmula para calcular el lado derecho de cada restricción.

FIGURA 7.27 HOJA DE TRABAJO DE FÓRMULAS PARA EL PROBLEMA DE RMC

WEB archivo

RMC

	A	B	C	D
1	**RMC**			
2				
3		**Requerimientos de material**		
4	**Material**	**Aditivo para combustible**	**Base para solvente**	**Cantidad disponible**
5	Material 1	0.4	0.5	20
6	Material 2	0	0.2	5
7	Material 3	0.6	0.3	21
8	**Utilidad por tonelada**	40	30	
9				
10				
11	**Modelo**			
12				
13		**Variable de decisión**		
14		**Aditivo para combustible**	**Base para solvente**	
15	**Toneladas producidas**	25	20	
16				
17	**Maximizar la utilidad total**	=B8*B15+C8*C15		
18				
19	**Restricciones**	**Cantidad empleada (LHS)**		**Cantidad disponible (RHS)**
20	Material 1	=B5*B15+C5*C15	<=	=D5
21	Material 2	=B6*B15+C6*C15	<=	=D6
22	Material 3	=B7*B15+C7*C15	<=	=D7

La hoja de trabajo de fórmulas que desarrollamos para el problema de RMC utilizando estos cinco pasos se muestra en la figura 7.27. Revisemos cada uno de ellos mientras los aplicamos al problema de RMC.

Paso 1. Introduzca los datos del problema en la parte superior de la hoja de trabajo.
Las celdas B5 a C7 muestran los requerimientos de material por tonelada de cada producto.
Las celdas B8 y C8 muestran la contribución a las utilidades por tonelada para los dos productos.
Las celdas D5 a D7 muestran las cantidades máximas disponibles para cada uno de los materiales.

Paso 2. Especifique las ubicaciones de las celdas para las variables de decisión.
La celda B15 contendrá el número de toneladas de aditivo para combustible producidas y la C15 indicará el número de toneladas producidas de base para solvente.

Paso 3. Seleccione una celda e introduzca una fórmula para calcular el valor de la función objetivo.
Celda B17: = B8*B15+C8*C15

Paso 4. Seleccione una celda e introduzca una fórmula para calcular el lado izquierdo de cada restricción. Con tres restricciones tenemos:
Celda B20: = B5*B15+C5*C15
Celda B21: = C6*C15
Celda B22: = B7*B15+C7*C15

Paso 5. Seleccione una celda e introduzca una fórmula para calcular el lado derecho de cada restricción. Con tres restricciones tenemos:
Celda D20: =D5
Celda D2l: =D6
Celda D22: =D7

Observe que las etiquetas descriptivas facilitan la lectura y comprensión de la sección del modelo en la hoja de trabajo. Por ejemplo, añadimos “Fuel Additive” (Aditivo para combustible), “Solvent Base” (Solvente base) y “Tons Produced” (Toneladas producidas) en las filas 14 y 15 de modo que los valores de las variables de decisión que aparecen en las celdas B15 y C15 se pueden interpretar con facilidad. Asimismo, introducimos “Maximize Total Profit” (Maximizar las utilidades totales) en la celda A11 para indicar que el valor de la función objetivo que aparece en la celda B17 es la contribución máxima a las utilidades. En la sección de restricción de la hoja de trabajo añadimos los nombres de restricciones así como los símbolos “<=” para mostrar la relación que existe entre el lado izquierdo y el lado derecho de cada restricción. Aunque estas etiquetas restrictivas no son necesarias para utilizar el solucionador de Excel con el fin de encontrar una solución al problema de RMC, las etiquetas facilitan al usuario la comprensión e interpretación de la solución.

Solución con Excel

El solucionador estándar de Excel desarrollado por Frontline Systems, llamado Solver, se utiliza para resolver todos los problemas de programación lineal presentados en este libro. Sin embargo, Premium Solver, disponible en el sitio web que acompaña esta obra incluye una versión poderosa conocida como Premium Solver for Education. Cuando se abre el programa por primera vez, Premium Solver se ve y se comporta exactamente como el solucionador estándar de Excel, pero cuando se selecciona el botón Premium en el cuadro de diálogo principal Solver Parameters (Parámetros de Solver), esta versión proporciona una variedad de funciones nuevas, incluida una guía del usuario en línea. Premium Solver for Education tiene los mismos límites de tamaño para los problemas que el solucionador estándar de Excel: 200 variables de decisión y 100 restricciones. Le recomendamos que instale la nueva versión y utilice la opción del modo Premium cuando desarrolle y resuelva modelos de programas lineales en la hoja de cálculo.

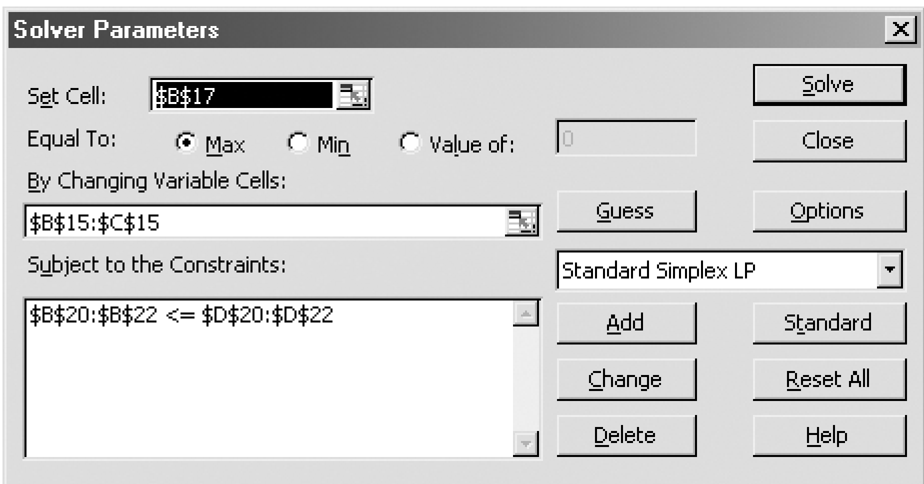
Los pasos siguientes describen cómo se utiliza Premium Solver for Education de Frontline Systems para obtener la solución óptima al problema de RMC:

Paso 1. Seleccione la ficha **Add-ins (Complementos)** en la cinta.

Paso 2. Seleccione **Premium Solver** en el grupo **Menu Commands (Comandos de menú)**.

Paso 3. Cuando aparezca el cuadro de diálogo **Solver Parameters (Parámetros de Solver)** (figura 7.28):
Introduzca B17 en el cuadro **Set Target Cell (Establecer la celda objetivo)**.

FIGURA 7.28 CUADRO DE DIÁLOGO DE PARÁMETROS DEL SOLUCIONADOR PARA EL PROBLEMA DE RMC



Seleccione la opción **Equal To: Max (Igual a: Max)**.
Introduzca B15:C15 en el cuadro **By Changing Cells (Al cambiar las celdas)**.
Seleccione **Add (Añadir)**.

Paso 4. Cuando aparece el cuadro de diálogo **Add Constraint (Añadir restricción)**:
Introduzca B20:B22 en el cuadro **Cell Reference (Referencia de celda)**.
Seleccione <=.
Introduzca D20:D22 en el cuadro de diálogo **Constraint (Restricción)**.
Haga clic en **OK (Aceptar)**.

Paso 5. Cuando aparezca el cuadro de diálogo **Solver Parameters (Parámetros de Solver)**:
Elija **Options (Opciones)**.

Paso 6. Cuando aparezca el cuadro de diálogo **Solver Options (Opciones de Solver)**:
Seleccione **Assume Non-Negative (Asumir valor no negativo)**.
Haga clic en **OK (Aceptar)**.

Paso 7. Cuando aparezca el cuadro de diálogo **Solver Parameters (Parámetros de Solver)**:
Elija **Solve (Resolver)**.

Paso 8. Cuando aparezca el cuadro de diálogo **Solver Results (Resultados de Solver)**:
Seleccione **Keep Solver Solution (Mantener la solución de Solver)**.
Haga clic en **OK (Aceptar)**.

Si no aparecen el botón Standard y la opción Standard Simplex LP, haga clic en el botón Premium y seleccione Simplex LP

La figura 7.28 refleja el cuadro de diálogo de los parámetros de Solver terminado y la figura 7.29 muestra la solución óptima en la hoja de trabajo. La solución óptima de 25 toneladas de aditivo para combustible y de 20 toneladas de base para solvente es la misma que obtuvimos mediante el procedimiento de solución gráfica.

FIGURA 7.29 SOLUCIÓN DE EXCEL PARA EL PROBLEMA DE RMC

	A	B	C	D
1	**RMC**			
2				
3		**Requerimientos de material**		
4	**Material**	**Aditivo para combustible**	**Base para solvente**	**Cantidad disponible**
5	Material 1	0.4	0.5	20
6	Material 2	0	0.2	5
7	Material 3	0.6	0.3	21
8	**Utilidad por tonelada**	40	30	
9				
10				
11	**Modelo**			
12				
13		**Variable de decisión**		
14		**Aditivo para combustible**	**Base para solvente**	
15	**Toneladas producidas**	25	20	
16				
17	**Maximizar la utilidad total**	1600		
18				
19	**Restricciones**	**Cantidad empleada (LHS)**		**Cantidad disponible (RHS)**
20	Material 1	20	<=	20
21	Material 2	4	<=	5
22	Material 3	21	<=	21

Además de la información de salida mostrada en la figura 7.29, Solver tiene una opción para proporcionar información del análisis de sensibilidad. En el capítulo 8 se estudia el análisis de sensibilidad.

En el paso 6 seleccionamos la opción **Assume Non-Negative** (**Asumir valor no negativo**) en el cuadro de diálogo **Solver Options (Opciones de Solver)** para evitar tener que introducir restricciones de no negatividad para las variables de decisión. En general, siempre que queramos resolver un modelo de programación lineal en el cual todas las variables de decisión estén restringidas a ser no negativas, seleccionaremos esta opción. Asimismo, en el paso 4 se introdujeron las tres restricciones de menor o igual que simultáneamente al introducir B20:B22 en el cuadro de diálogo **Cell Reference** (**Referencia de celda**), seleccionar <= e introducir D20:D22 en el cuadro **Constraint** (**Restricción**). De manera opcional, podríamos haber introducido una a la vez, las cuatro restricciones.

CAPÍTULO 8

Programación lineal: Análisis de sensibilidad e interpretación de la solución

CONTENIDO

El **análisis de sensibilidad** es el estudio de cómo los cambios en los coeficientes de un problema de programación lineal afectan a la solución óptima. Mediante el análisis de sensibilidad, podemos responder preguntas como las siguientes:

1. ¿Cómo afectará el cambio de un *coeficiente de la función objetivo* a la solución óptima?
2. ¿Cómo afectará el cambio de un *valor del lado derecho* de una restricción a la solución óptima?

Debido a que el análisis de sensibilidad se ocupa de cómo estos cambios afectan a la solución óptima, este análisis comienza hasta que se obtiene la solución óptima para el problema de programación lineal. Por esta razón, el análisis de sensibilidad con frecuencia se conoce como *análisis de postoptimalidad.*

Nuestro enfoque para el análisis de sensibilidad se equipara al enfoque que utilizamos para presentar la programación lineal en el capítulo 7. Este tipo de análisis se presenta utilizando el método gráfico para el problema de programación lineal con dos variables de decisión; luego mostramos cómo se usa el software The Management Scientist para proporcionar información más completa sobre el análisis de sensibilidad.

Por último, ampliamos la exposición de la formulación del problema que iniciamos en el capítulo 7 al formular y resolver tres problemas de programación lineal más grandes. Al estudiar la solución para cada uno de estos problemas, nos concentramos en la interpretación administrativa de la solución óptima y en la información del análisis de sensibilidad.

El análisis de sensibilidad y la interpretación de la solución óptima son aspectos importantes de la aplicación de la programación lineal. El artículo de MC en acción, “Asignación de productos a las instalaciones mundiales de Eastman Kodak”, muestra algunos de los problemas del análisis de sensibilidad y la interpretación encontrados en Kodak al determinar las asignaciones óptimas de productos. Más adelante, en este capítulo, otros artículos de MC en Acción ilustran cómo Analysis Corporation utiliza el análisis de sensibilidad como parte de un modelo de evaluación para una cadena de restaurantes de comida rápida; cómo General Electric Plastics aplica un modelo de programación lineal que involucra miles de variables y restricciones para determinar las cantidades de producción óptimas; también el caso del Centro de Coordinación de Nutrición de la Universidad de Minnesota que utiliza un modelo de programación lineal para estimar las cantidades de nutrientes en los nuevos productos alimenticios, y cómo el modelo de programación lineal de Duncan Industries Limited para la distribución de té, convenció a la gerencia de los beneficios de las técnicas del análisis cuantitativo para apoyar el proceso de toma de decisiones.

MC *en* ACCIÓN

*ASIGNACIÓN DE PRODUCTOS A LAS INSTALACIONES MUNDIALES DE EASTMAN KODAK**

Uno de los problemas de planeación más importantes en Eastman Kodak consiste en determinar cuáles productos deben fabricarse en las instalaciones de Kodak localizadas en todo el mundo. La asignación de los productos a las instalaciones se conoce como “carga mundial”. En la determinación de la carga mundial, Kodak enfrenta una serie de situaciones interesantes. Por ejemplo, no todas las instalaciones de manufactura son igualmente eficientes para todos los productos, y los márgenes por los cuales algunas instalaciones son mejores varían de un producto a otro. Además de los costos de manufactura, los de transporte y los efectos de los impuestos aduanales y la devolución de los mismos afectan de forma considerable la decisión de asignación.

Para ayudar a determinar la carga mundial, Kodak desarrolló un modelo de programación lineal que representa la naturaleza física del problema de distribución y los diversos costos (manufactura, transporte e impuestos aduanales) involucrados. El objetivo del modelo es minimizar el costo total sujeto a restricciones tales como las de satisfacción de la demanda y de la capacidad para cada instalación.

*Con base en información proporcionada por Greg Sampson de Eastman Kodak.

(*continuación*)

El modelo de programación lineal es una representación estática de la situación del problema y la realidad siempre está cambiando, por tanto, el modelo de programación lineal debe utilizarse en forma dinámica. Por ejemplo, cuando las expectativas de la demanda cambian, el modelo se utiliza para determinar el efecto que este cambio tendrá en la carga mundial. Imagine que la moneda del país A aumenta en comparación con la moneda del país B. ¿Cómo cambiaría la carga mundial? Además de utilizar el modelo de programación lineal para determinar "cómo reaccionar" ante los cambios, el modelo también es útil en una forma más activa al considerar preguntas como las siguientes: ¿Vale la pena que la instalación F gaste d dólares para reducir el costo unitario de manufactura del producto P de x a y? El modelo de programación lineal ayuda a Kodak a evaluar el efecto general de los posibles cambios en cualquier instalación.

En el análisis final, los gerentes reconocen que no pueden utilizar el modelo sólo con ponerlo a funcionar, leer los resultados y ejecutar la solución. La recomendación del modelo, combinada con el juicio gerencial, proporciona la solución final.

8.1 Introducción al análisis de sensibilidad

El análisis de sensibilidad es importante para los tomadores de decisiones debido a que los problemas reales ocurren en un entorno en constante cambio. Los precios de las materias primas, la demanda de productos, las capacidades de producción, los precios de las acciones, todo ello cambia. Si un modelo de programación lineal se utiliza en un entorno como éste, podemos esperar que algunos de los coeficientes del modelo cambien con el tiempo y tal vez queramos determinar cómo afectan estos cambios a la solución óptima. El análisis de sensibilidad proporciona la información necesaria para responder a estos cambios sin requerir una solución radical de un programa lineal modificado.

Recuerde el problema de RMC presentado en el capítulo 7. RMC quería determinar el número de toneladas de aditivo para combustible (F) y el número de toneladas de base solvente (S) con el fin de maximizar la contribución total a las utilidades para los dos productos. Tres restricciones de las materias primas limitan las cantidades de los dos productos que se pueden fabricar. El modelo de programación lineal de RMC se replantea aquí:

$$
\begin{array}{lrcrl}
\text{Max} & 40F + 30S & & & \\
\text{s.a.} & & & & \\
 & 0.4F + 0.5 & \leq & 20 & \text{Material 1} \\
 & 0.2S & \leq & 5 & \text{Material 2} \\
 & 0.6F + 0.3S & \leq & 21 & \text{Material 3} \\
 & F, S \geq 0 & & & \\
\end{array}
$$

La solución óptima, $F = 25$ toneladas y $S = 20$ toneladas, proporcionó una contribución máxima a las utilidades de \$1600.

La solución óptima se basó en las contribuciones a las utilidades de \$40 por tonelada para el aditivo para combustible y \$30 por toneladas para la base solvente. Sin embargo, suponga que después nos enteramos de que una reducción en los precios provoca que la contribución a las utilidades del aditivo para combustible disminuya de \$40 a \$30 por tonelada. El análisis de sensibilidad se utiliza para determinar si la producción de 25 toneladas de aditivo para combustible y 20 toneladas de base para solvente sigue siendo lo mejor. Si es así, no es necesario resolver un problema de programación lineal con $30F + 30S$ como la nueva función objetivo.

El análisis de sensibilidad también se utiliza para determinar cuáles coeficientes en un modelo de programación lineal son cruciales. Por ejemplo, suponga que la gerencia cree que la contribución a las utilidades de \$30 por tonelada de la base para solvente es sólo una estimación aproximada de la contribución a las utilidades que en realidad se obtendrá. Si el análisis de sensibilidad muestra que la solución óptima serán 25 toneladas de aditivo para combustible y 20 toneladas de base para solvente cuando la contribución a las utilidades para la base para solvente esté entre \$20 y \$50, la gerencia debe sentirse cómoda con la estimación de \$30 por tonelada y las cantidades de producción recomendadas. Sin embargo, si el análisis de sensibilidad muestra que 25 toneladas de aditivo para combustible y 20 toneladas de base para solvente son la solución óptima sólo si la contribución a las utilidades de la base para solvente está entre \$29.90 y \$30.20 por tonelada, quizás la gerencia quiera revisar la precisión de la estimación de \$30 por tonelada.

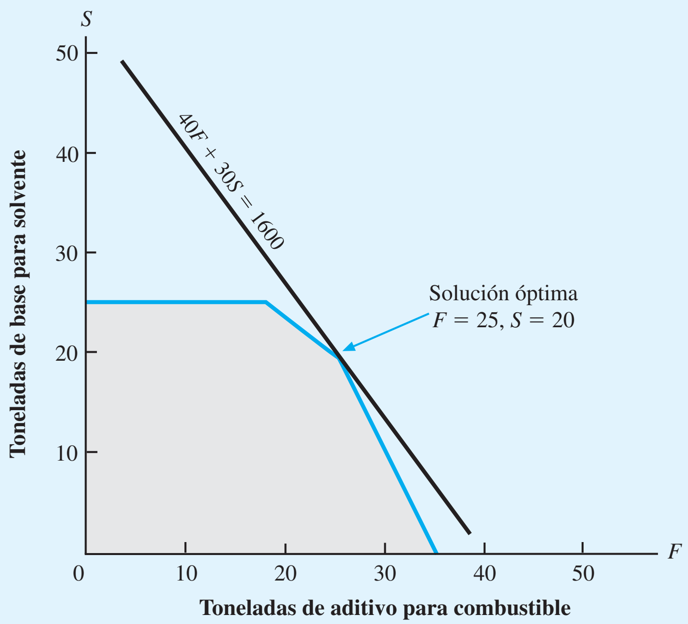
Otro aspecto del análisis de sensibilidad se refiere a los cambios en los valores del lado derecho de las restricciones. Recuerde que en el problema de RMC la solución óptima utilizaba todo el material 1 y todo el material 3 disponibles. ¿Qué le pasaría a la solución óptima y a la contribución total a las utilidades si RMC pudiera obtener cantidades adicionales de cualquiera de estos recursos? El análisis de sensibilidad puede ayudar a determinar cuánto vale cada tonelada de material adicional y cuántas toneladas se pueden añadir antes de que disminuyan los rendimientos establecidos.

8.2 Coeficientes de la función objetivo

Comencemos el análisis de sensibilidad utilizando el procedimiento de solución gráfica para demostrar cómo un cambio en un coeficiente de la función objetivo puede afectar a la solución óptima para un problema de programación lineal. Comencemos con la solución gráfica al problema de RMC original mostrada en la figura 8.1. La región factible está sombreada. La función objetivo $40F + 30S$ toma su valor máximo en el punto extremo $F = 25$ y $S = 20$. Por tanto, $F = 25$ y $S = 20$ es la solución óptima y $40(25) + 30(20) = 1600$ es el valor de la solución óptima.

Ahora suponga que RMC se entera de que una reducción en el precio del aditivo para combustible ha disminuido su contribución a las utilidades a \$30 por tonelada. Con esta

FIGURA 8.1 SOLUCIÓN ÓPTIMA AL PROBLEMA DE RMC ORIGINAL



reducción, la gerencia de RMC puede preguntar la conveniencia de mantener la solución óptima original de $F = 25$ toneladas y $S = 20$ toneladas. Tal vez ahora la solución óptima sea diferente. El programa lineal de RMC con la función objetivo modificada es el siguiente:

$$
\begin{array}{lrll}
\text{Max} & 30F + 30S & & \\
\text{s.a.} & & & \\
& 0.4F + 0.5S \leq & 20 & \text{Material 1} \\
& 0.2S \leq & 5 & \text{Material 2} \\
& 0.6F + 0.3S \leq & 21 & \text{Material 3} \\
& F, S \geq 0 & &
\end{array}
$$

Observe que sólo se ha modificado la función objetivo. Debido a que las restricciones no han cambiado, la región factible para el problema de RMC modificado sigue siendo la misma que la del problema original. La solución gráfica para el problema de RMC con la función objetivo $30F + 30S$ se muestra en la figura 8.2. Note que el punto extremo que proporciona la solución óptima aún es $F = 25$ y $S = 20$. Por tanto, aun cuando la contribución total a las utilidades disminuyó a $30(25) + 30(20) = 1350$, la disminución en la contribución a las utilidades del aditivo para combustible de \$40 a \$30 por tonelada no cambia la solución óptima $F = 25$ y $S = 20$.

Ahora suponga que una reducción posterior en el precio provoca que la contribución total a las utilidades del aditivo para combustible se reduzca a \$20 por tonelada. ¿$F = 25$ y $S = 20$ sigue siendo la solución óptima? La figura 8.3 muestra la solución gráfica al problema de RMC con la función objetivo modificada a $20F + 30S$. El punto extremo que proporciona la solución óptima ahora es $F = 18.75$ y $S = 25$. La contribución total a las utilidades disminuyó a $20(18.75) + 30(25) = 1125$. No obstante, en este caso vemos que la disminución en la contribución a las utilidades del aditivo para combustible a \$20 por tonelada cambia la solución óptima. La solución $F = 25$ toneladas y $S = 20$ ya no

FIGURA 8.2 SOLUCIÓN ÓPTIMA MODIFICADA CON LA FUNCIÓN OBJETIVO DE RMC $30F + 30S$

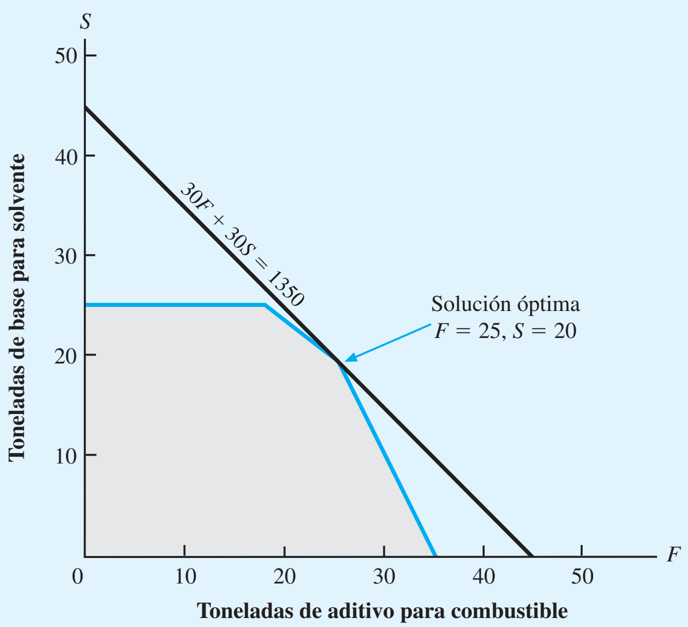
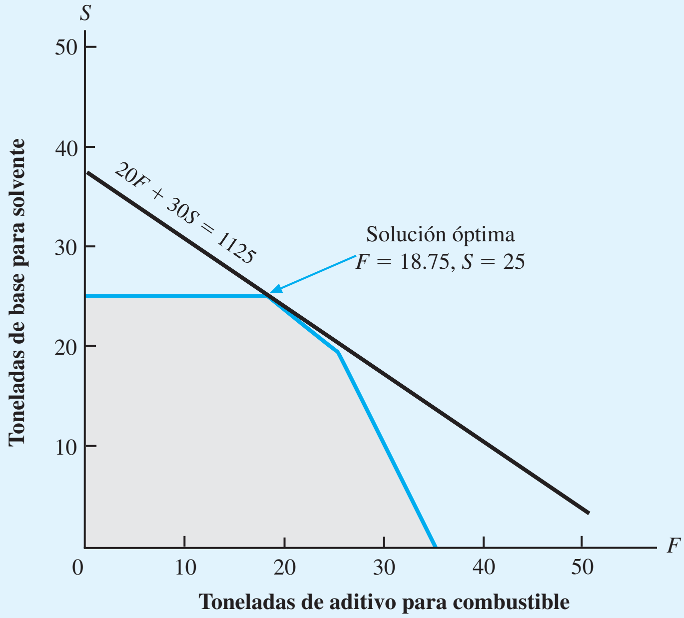


FIGURA 8.3 SOLUCIÓN ÓPTIMA MODIFICADA CON LA FUNCIÓN OBJETIVO DE RMC $20F + 20S$



La solución gráfica se utiliza aquí para ayudar al lector a visualizar cómo los cambios en un coeficiente de una función objetivo pueden modificar o no la solución óptima.

Las soluciones por computadora por lo general proporcionan información del análisis de sensibilidad. El usuario no tiene que resolver varios problemas de programación lineal modificados para obtener información del análisis de sensibilidad.

es óptima. La solución $F = 18.75$ y $S = 25$ ahora proporciona las cantidades de producción óptimas para RMC.

¿Qué aprendemos de las soluciones gráficas de las figuras 8.1, 8.2 y 8.3? Al cambiar un coeficiente de una función objetivo se modifica la pendiente de la recta de la función objetivo, pero la región factible permanece inalterada. Si el cambio en el coeficiente de la función objetivo es pequeño, el punto extremo que proporcionó la solución óptima para el problema original tal vez proporcione aún la solución óptima. Sin embargo, si el cambio en el coeficiente de la función objetivo es muy grande, un punto extremo diferente proporcionará una solución óptima nueva.

Por fortuna, la solución por computadora para el problema original de programación lineal proporciona información del análisis de sensibilidad sobre los coeficientes de la función objetivo. *Usted no tiene que reformular y resolver el problema de programación lineal para obtener información del análisis de sensibilidad.* La solución por computadora para el problema de programación lineal original de RMC se muestra en la figura 8.4. Remítase a la sección sombreada etiquetada OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES (Rangos del coeficiente objetivo). Considere la fila para el aditivo para combustible F. El límite inferior (Lower Limit) es \$24, el valor actual (Current Value) es \$40 y el límite superior (Upper Limit) es \$60. El rango \$24 a \$60 es el del coeficiente objetivo para el aditivo para combustible. Por tanto, suponiendo que todos los demás aspectos del problema de RMC original no cambian, la contribución a las utilidades del aditivo para combustible puede variar de \$24 a \$60 por tonelada y la solución $F = 25$ y $S = 20$ sigue siendo la solución óptima. De hecho, este resultado es lo que observamos con la solución gráfica en las figuras 8.2 y 8.3. Cuando la contribución a las utilidades del aditivo para combustible se redujo a \$30 por toneladas (dentro del rango del coeficiente objetivo de \$24 a \$60), la solución $F = 25$ y $S = 20$ aún es óptima. Sin embargo, cuando la contribución a las utilidades del aditivo para combustible se redujo a \$20 por tonelada (fuera del rango de \$24 a \$60), la solución $F = 25$ y $S = 20$ ya no es óptima. En resumen, si el coeficiente de la función

FIGURA 8.4 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE RMC

WEB archivo

RMC

```
Objective Function Value =           1600.00

      Variable              Value              Reduced Costs
   --------------      ---------------      ------------------
         F                  25.000                   0.000
         S                  20.000                   0.000

     Constraint         Slack/Surplus          Dual Prices
   --------------      ---------------      ------------------
         1                   0.000                  33.333
         2                   1.000                   0.000
         3                   0.000                  44.444

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable       Lower Limit     Current Value     Upper Limit
------------  ---------------  ---------------  ---------------
     F               24.000           40.000           60.000
     S               20.000           30.000           50.000

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint      Lower Limit     Current Value     Upper Limit
------------  ---------------  ---------------  ---------------
     1               14.000           20.000           21.500
     2                4.000            5.000   No Upper Limit
     3               18.750           21.000           30.000
```

objetivo del aditivo para combustible está dentro del rango del coeficiente objetivo, $24 a $60, y todos los demás aspectos del problema de RMC original permanecen sin cambios, la solución óptima para el problema de RMC seguirá siendo $F = 25$ toneladas y $S = 20$ toneladas.

Al rango del coeficiente objetivo a menudo se le llama rango de optimalidad.

Ahora utilicemos la información del análisis de sensibilidad de la figura 8.4 para interpretar lo que nos dice sobre los cambios en el coeficiente de la función objetivo para la base solvente. Suponiendo que la contribución a las utilidades del aditivo para combustible es $40 por tonelada y que todos los demás aspectos del problema de RMC original permanecen inalterados, el rango del coeficiente objetivo para la base solvente es de $20 a $50. Por tanto, concluimos que siempre que la contribución a las utilidades para la base solvente esté dentro del rango de $20 a $50, la solución $F = 25$ y $S = 20$ seguirá siendo óptima. Si esta contribución para la base solvente queda fuera de este rango, un punto extremo diferente y una solución distinta se volverán óptimos.

Cambios simultáneos

La información del análisis de sensibilidad proporcionada por los coeficientes de la función objetivo se basa en el supuesto de que sólo cambia un coeficiente de la función objetivo a la vez y que todos los demás aspectos del problema original permanecen sin cambios. De ahí que el rango del coeficiente objetivo sea aplicable a cambios en un solo coeficiente objetivo. Sin embargo, en algunos casos nos podría interesar lo que ocurre si dos o más coeficientes de la función objetivo cambian simultáneamente. Como demostraremos, es

TABLA 8.1 RANGOS DEL COEFCIENTE OBJETIVO, DISMINUCIONES Y AUMENTOS PERMISIBLES PARA EL PROBLEMA DE RMC

	Rango del coeficiente objetivo				
Variable de decisión	**Límite inferior**	**Valor actual**	**Límite superior**	**Disminución permisible**	**Incremento permisible**
F	24	40	60	16	20
S	20	30	50	10	20

posible hacer un análisis de los cambios simultáneos con la ayuda de la **regla del 100 por ciento**.

Al referirnos a la solución por computadora de la figura 8.4, replanteamos los rangos del coeficiente objetivo para el problema de RMC en la tabla 8.1. Las columnas Allowable Decrease (Disminución permisible) y Allowable Increase (Aumento permisible) indican cuánto puede disminuir o aumentar el valor actual del coeficiente de la función objetivo sin que cambie la solución óptima. Los valores de disminución y aumento permisibles se calculan como sigue:

$$\text{Disminución permisible} = \text{Valor actual} - \text{Límite inferior}$$
$$\text{Aumento permisible} = \text{Límite superior} - \text{Valor actual}$$

Suponga que el departamento de contabilidad de RMC revisa los datos tanto del precio como del costo de los dos productos. Como resultado, la contribución a las utilidades del aditivo para combustible se incrementa a \$48 por tonelada y la contribución a las utilidades de la base para solvente disminuye a \$27 por tonelada. Por tanto, el aditivo para combustible tiene un incremento de $\$48 - \$40 = \$8$ por tonelada. En la tabla 8.1 vemos que el aumento permisible para el coeficiente del aditivo para combustible es $\$60 - \$40 = \$20$. Por tanto, el incremento de \$8 en el coeficiente de la función objetivo del aditivo para combustible es $8/20 = 0.40$, o 40%, de su aumento permisible. Del mismo modo, la base solvente tiene un decremento de $\$30 - \$27 = \$3$ por tonelada. Con una disminución permisible de $\$30 - \$20 = \$10$, la disminución de \$3 en el coeficiente de la función objetivo de la base para solvente es $3/10 = 0.30$, o 30%, de su disminución permisible. La suma del incremento porcentual para el aditivo para combustible y la disminución porcentual para la base para solvente es $40\% + 30\% = 70\%$.

Definamos ahora la regla del 100 por ciento cuando se aplica a cambios simultáneos en los coeficientes de la función objetivo.

REGLA DEL 100 POR CIENTO PARA LOS COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Para todos los coeficientes de la función objetivo que cambian, sume los porcentajes de los aumentos y las disminuciones permisibles; si la suma es menor o igual que 100%, la solución óptima no cambiará.

Al aplicar la regla del 100 por ciento al problema de RMC, vemos que la suma de los porcentajes de los aumentos y los decrementos permisibles es 70%. Por tanto, la regla del 100 por ciento indica que si la contribución a las utilidades del aditivo para combustible aumenta a \$48 por tonelada y la contribución a las utilidades de la base para solvente disminuye a \$27 por tonelada, la solución $F = 25$ toneladas y $S = 20$ toneladas sigue siendo óptima. Por tanto, con los coeficientes de la función objetivo modificados y la misma solución óptima, la contribución total a las utilidades se vuelve $48(25) + 27(20) = \$1740$.

Por último, observe que la regla del 100 por ciento *no* afirma que la solución óptima cambiará si la suma de los porcentajes de los aumentos y las disminuciones permisibles es mayor que 100%. Todo lo que podemos asegurar es que si la suma de los porcentajes es mayor que 100%, *puede existir* una solución óptima diferente. Por tanto, siempre que la suma de los cambios porcentuales sea mayor que 100%, el problema modificado debe resolverse para determinar la solución óptima.

NOTAS Y COMENTARIOS

Si dos coeficientes de la función objetivo cambian de forma simultánea, ambos pueden moverse fuera de sus respectivos rangos del coeficiente objetivo sin afectar a la solución óptima. Por ejemplo, en un programa lineal con dos variables, la pendiente de la función objetivo no cambiará en lo absoluto si los dos coeficientes se modifican en el mismo porcentaje.

8.3 Lados derechos

Ampliemos la exposición del análisis de sensibilidad al considerar cómo un cambio en el lado derecho de la restricción afecta a la región factible y a la solución óptima de un problema de programación lineal. Al igual que con el análisis de sensibilidad para los coeficientes de la función objetivo, consideramos lo que ocurre cuando hacemos *un cambio a la vez.* Por ejemplo, suponga que en el problema de RMC se dispone de 4.5 toneladas adicionales de material 3. En este caso, el lado derecho de la tercera restricción se incrementa de 21 a 25.5 toneladas. El modelo de programación lineal de RMC modificado es el siguiente:

$$
\begin{array}{llr}
\text{Max} & 40F + 30S & \\
\text{s.a.} & & \\
& 0.4F + 0.5S \leq 20 & \text{Material 1} \\
& \phantom{0.4F +{}} 0.2S \leq 5 & \text{Material 2} \\
& 0.6F + 0.3S \leq 25.5 & \text{Material 3} \\
& & \\
& F, S \geq 0 &
\end{array}
$$

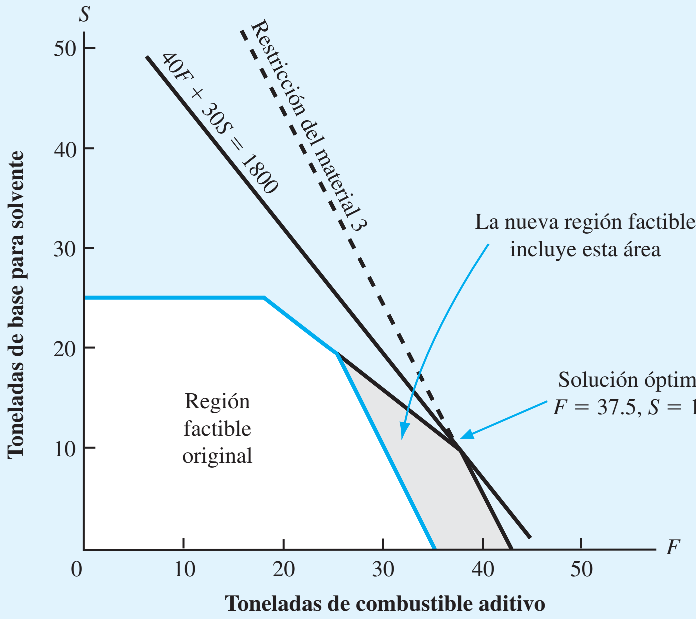
El análisis de sensibilidad para los lados derechos se basa en el supuesto de que sólo un lado derecho cambia a la vez. Se supone que todos los demás aspectos del problema permanecen como se plantearon en el problema original.

La solución gráfica a este problema se muestra en la figura 8.5. Observe cómo se expande la región factible debido a las 4.5 toneladas adicionales de material 3. La aplicación del procedimiento de solución gráfica muestra que el punto extremo $F = 37.5$ toneladas y $S = 10$ toneladas es la nueva solución óptima. El valor de la solución óptima es $40(37.5) + 30(10) = \$1800$. Recuerde que la solución óptima al problema original de RMC era $F = 25$ toneladas y $S = 20$ toneladas, y el valor de la solución óptima era \$1600. Por tanto, las 4.5 toneladas adicionales de material 3 en el problema modificado proporcionan una nueva solución óptima e incrementan el valor de esta solución a $\$1800 - \$1600 = \$200$. Sobre una base por tonelada, las 4.5 toneladas adicionales de material 3 incrementan el valor de la solución óptima a una razón de $\$200/4.5 = \$44.44$ por tonelada.

Los precios duales a menudo proporcionan la información económica que ayuda a tomar decisiones respecto a adquirir recursos adicionales.

El **precio dual** es la *mejora* en el valor de la solución óptima por incremento unitario en el lado derecho de una restricción. Por consiguiente, el precio dual para la restricción del material 3 es \$44.44 por tonelada. En otras palabras, si se incrementa 1 tonelada en el lado derecho de la restricción del material 3, el valor de la solución óptima mejorará \$44.44. Por el contrario, si se disminuye 1 tonelada en el lado derecho de la restricción del material 3, el valor de la solución óptima empeorará \$44.44. En general, el precio dual indica lo que ocurrirá al valor de la solución óptima si se hace un cambio de una unidad en el lado derecho de una restricción.

FIGURA 8.5 SOLUCIÓN GRÁFICA AL PROBLEMA DE RMC CON LA RESTRICCIÓN DEL MATERIAL 3 $0.6F + 0.5S \leq 24.5$



Por fortuna, la solución por computadora para el problema de programación lineal original proporciona los precios duales para todas las restricciones. *Usted no tiene que reformular y resolver el problema de programación lineal para obtener la información del precio dual.* La solución por computadora para el problema de programación lineal de RMC se muestra en la figura 8.6. La columna etiquetada Dual Prices (Precios duales) proporciona la información siguiente:

Las soluciones por computadora por lo general proporcionan información sobre el precio dual y el lado derecho de cada restricción.

Restricción	Precio dual
Material 1	\$33.33
Material 2	\$ 0.00
Material 3	\$44.44

Observe que el precio dual para el material 3, \$44.44 por tonelada, concuerda con los cálculos que hicimos utilizando el procedimiento de solución gráfica. También observamos que el precio dual para la restricción del material 1 indica que el valor de la solución óptima mejorará a una razón de \$33.33 por tonelada de material 1. Por último, note que el precio dual para la restricción del material 2 es \$0.00. Al observar de nuevo la figura 8.6, vemos que la solución óptima para el problema de RMC muestra que el material 2 tiene una holgura de una tonelada, por lo que en la solución óptima 1 tonelada de material 2 no se usa. El precio dual de \$0.00 nos indica que las toneladas adicionales del material 2 se añadirán a la cantidad de holgura para la restricción 2 y no cambiarán el valor de la solución óptima.

Advertimos aquí que el valor de un precio dual sólo se aplica a incrementos pequeños en el lado derecho. A medida que se obtienen más recursos y conforme el lado derecho continúa aumentando, otras restricciones se volverán confinantes y limitarán el cambio en

FIGURA 8.6 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE RMC

WEB archivo

RMC

Objective Function Value = 1,600.00

Variable	Value	Reduced Costs
F	25.000	0.000
S	20.000	0.000

Constraint	Slack/Surplus	Dual Prices
1	0.000	33.333
2	1.000	0.000
3	0.000	44.444

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

Variable	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
F	24.000	40.000	60.000
S	20.000	30.000	50.000

RIGHT HAND SIDE RANGES

Constraint	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
1	14.000	20.000	21.500
2	4.000	5.000	No Upper Limit
3	18.750	21.000	30.000

el valor de la solución óptima. En algún punto, el precio dual no se puede utilizar ya para determinar la mejora en el valor de la solución óptima. Para determinar el rango en que el precio dual es aplicable, remítase a la sección etiquetada RIGHT HAND SIDE RANGES (Rangos del lado derecho) de la figura 8.6. Siempre que el lado derecho de una restricción permanezca dentro de su rango correspondiente, el precio dual es aplicable. Por ejemplo, al referirnos a la restricción 3 vemos que el precio dual de $44.44 por tonelada del material 3 se aplica, siempre y cuando el lado derecho de la restricción 3 esté entre 18.75 y 30 toneladas. Este rango indica que para cada tonelada adicional de material 3 que RMC pueda obtener, hasta un total de 30 toneladas, el valor de la solución óptima mejoraría $44.44 por cada tonelada añadida. Sin embargo, si se dispusiera de más de 30 toneladas, RMC no podría esperar que el precio dual de $44.44 por tonelada fuera aplicable; asimismo, el precio dual para la restricción 1 es $33.33 por tonelada, siempre y cuando la cantidad de material 1 disponible esté entre 14 y 21.5 toneladas. Note también que el precio dual de $0.00 para la restricción 2 es aplicable, siempre y cuando la cantidad de material 2 disponible sea por lo menos 4 toneladas.

El rango del lado derecho con frecuencia se conoce como rango de factibilidad.

El artículo de MC en Acción, "Evaluación de la eficiencia en Performance Analysis Corporation", ilustra el uso de los precios duales como parte de un modelo de evaluación para una cadena de restaurantes de comida rápida. Este tipo de modelo se verá con más detalle en el capítulo siguiente cuando estudiemos una aplicación conocida como *análisis de datos adjuntos*.

MC *en* ACCIÓN

*EVALUACIÓN DE LA EFICIENCIA EN PERFORMANCE ANALYSIS CORPORATION**

Performance Analysis Corporation se especializa en el uso de las ciencias administrativas para diseñar operaciones más eficientes y efectivas para una amplia variedad de tiendas de una cadena comercial. Una de estas aplicaciones utiliza la metodología de la programación lineal para proporcionar un modelo de evaluación para una cadena de restaurantes de comida rápida.

Según el concepto de optimalidad de Pareto, un restaurante de una cadena dada es relativamente ineficiente si otros restaurantes de la misma cadena exhiben las características siguientes:

1. Operan en el mismo entorno o en uno peor.
2. Producen por lo menos el mismo nivel de *todos* los resultados.
3. Utilizan no más de *algún* recurso y *menos* de uno de los recursos como mínimo.

Para detectar los restaurantes ineficientes según Pareto, Performance Analysis Corporation elaboró y resolvió un modelo de programación lineal. Las restricciones del modelo involucran requerimientos relativos a los niveles mínimos aceptables de resultados y a las condiciones impuestas por elementos incontrolables en el entorno, y la función objetivo exige la minimización de los recursos necesarios para producir el resultado. La solución del modelo da el resultado siguiente para cada restaurante:

1. Una puntuación que evalúa el nivel de la llamada eficiencia técnica relativa alcanzada por el restaurante particular en el periodo en cuestión.
2. La reducción de los recursos controlables o el incremento de los resultados durante el periodo en cuestión, necesarios para que un restaurante ineficiente sea calificado como eficiente.
3. Un grupo igual de otros restaurantes con el cual pueda compararse cada restaurante en el futuro.

El análisis de sensibilidad proporciona información gerencial importante. Por ejemplo, para cada restricción concerniente a un nivel de resultado mínimo aceptable, el precio dual indica al gerente cuánto aumentaría la medida de la eficiencia una unidad adicional de resultados.

El análisis por lo general identifica que 40% a 50% de los restaurantes tiene un rendimiento menor que el esperado, dadas las condiciones previamente establecidas respecto a los insumos disponibles y los resultados producidos. Performance Analysis Corporation encuentra que si se eliminan todas las ineficiencias relativas identificadas al mismo tiempo, las utilidades corporativas aumentarán aproximadamente de 5% a 10%. Este incremento es realmente considerable, dada la gran escala de las operaciones involucradas.

*Con base en información proporcionada por Richard C. Morey de Performance Analysis Corporation.

NOTAS Y COMENTARIOS

En algunos libros se asocia el término *precio sombra* con cada restricción y se relaciona de manera estrecha con el concepto de precio dual. El precio sombra asociado con una restricción es el *cambio* en el valor del incremento unitario de la solución óptima en el lado derecho de la restricción; el precio dual y el precio sombra son los *mismos* para todos los programas lineales de *maximización*. En los programas lineales de *minimización*, el precio sombra es el *negativo* del precio dual correspondiente.

Cambios simultáneos

Tenga en mente que la información del análisis de sensibilidad del lado derecho se basa en el supuesto de que sólo un lado derecho cambia a la vez. Sin embargo, en algunos casos, nos puede llegar a interesar lo que ocurre si dos o más lados derechos cambian de forma simultánea. Es posible realizar un análisis de cambios simultáneos con la ayuda de la regla del 100 por ciento.

Respecto a la solución por computadora de la figura 8.6, replanteamos la información del rango del lado derecho para el problema de RMC en la tabla 8.2. Las columnas Allowa-

TABLA 8.2 RANGOS DEL LADO DERECHO, DISMINUCIONES Y AUMENTOS PERMISIBLES PARA EL PROBLEMA DE RMC

	Rangos del lado derecho				
Restricción	**Límite inferior**	**Valor actual**	**Límite superior**	**Disminución permisible**	**Aumento permisible**
Material 1	14	20	21.5	6	1.5
Material 2	4	5	Sin límite superior	1	Sin límite superior
Material 3	18.75	21	30	2.25	9

ble Decrease (Disminución permisible) y Allowable Increase (Aumento permisible) indican cuánto puede disminuir o aumentar el valor actual del lado derecho sin que cambie el precio dual. Los valores de la disminución permisible y el aumento permisible se calculan como sigue:

$$\text{Disminución permisible} = \text{Valor actual} - \text{Límite inferior}$$

$$\text{Aumento permisible} = \text{Límite superior} - \text{Valor actual}$$

Ahora suponga que la gerencia de RMC decide comprar 0.5 toneladas adicionales de material 1 y 4.5 toneladas adicionales de material 3. Como muestra la tabla 8.2, el material 1 tiene un aumento permisible de 1.5 toneladas; por consiguiente, el incremento del lado derecho de dicho material es $0.5/1.5 = 0.333$, o 33.3%, de su aumento permisible. De manera similar, como el material 3 tiene un aumento permisible de 9 toneladas, el incremento del lado derecho de dicho material es $4.5/9 = 0.50$, o 50%, de su aumento permisible. La suma de los porcentajes para los dos lados derechos es $33.3\% + 50\% = 83.3\%$.

Establezcamos ahora la regla del 100 por ciento cuando se aplica a los cambios simultáneos en los lados derechos de un problema de programación lineal.

REGLA DEL 100 POR CIENTO PARA LOS LADOS DERECHOS

Para todos los lados derechos que cambian, sume los porcentajes de los aumentos y las disminuciones permisibles. Si la suma de los porcentajes es menor o igual que 100%, los precios duales no cambian.

Al aplicar la regla del 100 por ciento al problema de RMC, vemos que la suma de los porcentajes de los aumentos y las disminuciones permisibles es 83.3%. Por tanto, la regla del 100 por ciento indica que el precio dual para la restricción del material 1 aún es \$33.33 por tonelada, y el precio dual para la restricción del material 3 sigue siendo \$44.44 por tonelada. De ahí que las 0.5 toneladas adicionales de material 1 y las 4.5 toneladas adicionales de material 3 mejoren el valor de la función objetivo $0.5(33.33) + 4.5(44.44) = \$216.65$. Sin embargo, observe que el programa lineal modificado tendrá que resolverse para determinar las cantidades de producción F y S que proporcionan la nueva solución óptima.

La regla del 100 por ciento *no* establece que los precios duales cambiarán si la suma de los porcentajes de los aumentos y las disminuciones permisibles es mayor que 100%. Todo lo que podemos decir es que si la suma de los porcentajes es mayor que 100%, *pueden existir* precios duales diferentes. Por tanto, siempre que la suma de los cambios porcentuales sea mayor que 100%, se debe resolver un problema modificado con el propósito de determinar la nueva solución óptima y los nuevos precios duales.

Un segundo ejemplo

Como otro ejemplo, considere el problema de minimización de M&D Chemicals presentado en la sección 7.5. Las variables de decisión son A = número de galones del producto A, y B = número de galones del producto B. El modelo de programación lineal es el siguiente:

$$
\begin{array}{lll}
\text{Min} & 2A + 3B & \\
\text{s.a.} & & \\
& 1A \qquad\quad \geq 125 & \text{Demanda del producto} \\
& 1A + 1B \geq 350 & \text{Producción total} \\
& 2A + 1B \leq 600 & \text{Tiempo de procesamiento} \\
& A, B \geq 0 &
\end{array}
$$

La solución obtenida usando The Management Scientist se presenta en la figura 8.7. El resultado de la computadora muestra que el valor de la solución óptima es $800. Los valores de las variables de decisión muestran que 250 galones del producto A y 100 galones del producto B proporcionan la solución del costo mínimo.

FIGURA 8.7 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE M&D CHEMICALS

WEB archivo M&D

```
Objective Function Value =             800.00

      Variable               Value              Reduced Costs
   --------------      ---------------     -----------------
         A                   250.000                  0.000
         B                   100.000                  0.000

     Constraint          Slack/Surplus          Dual Prices
   --------------      ---------------     -----------------
         1                   125.000                  0.000
         2                     0.000                 -4.000
         3                     0.000                  1.000

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable      Lower Limit     Current Value     Upper Limit
------------  ---------------  ---------------  ---------------
     A         No Lower Limit            2.000            3.000
     B                 20.000            3.000   No Upper Limit

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint     Lower Limit     Current Value     Upper Limit
------------  ---------------  ---------------  ---------------
     1         No Lower Limit          125.000          250.000
     2                300.000          350.000          475.000
     3                475.000          600.000          700.000
```

La columna Slack/Surplus (Holgura/Excedente) muestra que la restricción de ≥ correspondiente a la demanda del producto A (restricción 1) tiene un excedente de 125 unidades. En otras palabras, la producción del producto A en la solución óptima excede la demanda por 125 galones. Los valores de holgura/excedente son cero para las restricciones correspondientes a la producción total (restricción 2) y el tiempo de procesamiento (restricción 3); por tanto, estas restricciones son confinantes en la solución óptima.

El precio dual muestra la *mejora* en el valor de la solución óptima por incremento unitario en el lado derecho de la restricción. Al enfocarnos primero en el precio dual de 1.00 para la restricción del tiempo de procesamiento (restricción 3), vemos que si podemos incrementar el tiempo de procesamiento de 600 a 601 horas, el valor de la solución óptima *mejorará* \$1. Debido a que el objetivo es minimizar los costos, la mejora en este caso significa reducir los costos. Por tanto, si se dispone de 601 horas de tiempo de procesamiento, el valor de la solución óptima mejorará a $\$800 - \$1 = \$799$. La sección RIGHT HAND SIDE RANGES (Rangos del lado derecho, RHS), del resultado de la computadora, muestra que el límite superior para el tiempo de procesamiento (restricción 3) es 700 horas. Por tanto, el precio dual de \$1 por unidad sería aplicable por cada hora adicional de tiempo de procesamiento hasta un total de 700 horas.

Volvamos a la sección Dual Prices (Precios duales) del resultado y consideremos el precio dual para la producción total (restricción 2). El *precio dual negativo* indica que el valor de la solución óptima *no mejorará* si el lado derecho aumenta una unidad. De hecho, el precio dual de \$24.00 significa que si el lado derecho de la restricción de la producción total aumenta de 350 a 351 unidades, el valor de la solución óptima empeorará por la cantidad de \$4. Como empeorar significa un incremento en el costo, el valor de la solución óptima se volverá $\$800 + \$4 = \$804$ si se hace un incremento de una unidad en el requerimiento de la producción total.

Dado que el precio dual se refiere a la mejora en el valor de la solución óptima por incremento unitario en el lado derecho, una restricción con un precio dual negativo no debe tener aumento en su lado derecho. Si el lado derecho de la restricción de la producción total fuera a disminuir de 350 a 349 unidades, el precio dual indica que el costo total podría reducirse \$4 a $\$800 - \$4 = \$796$.

Aun cuando el precio dual es la mejora en el valor de la solución óptima por incremento unitario en el lado derecho de una restricción, la interpretación de una *mejora* en el valor de una función objetivo depende de si estamos resolviendo un problema de maximización o de minimización. El precio dual para una restricción de ≤ siempre será mayor o igual que cero debido a que el incremento en el lado derecho no puede empeorar el valor de la función objetivo. Del mismo modo, el precio dual para una restricción de ≥ siempre será menor o igual que cero debido a que el incremento en el lado derecho no puede mejorar el valor de la solución óptima.

Por último, considere los rangos del lado derecho proporcionados en la figura 8.7. Los rangos para el problema de M&D se resumen aquí:

Restricción	**Min RHS**	**Max RHS**
Demanda del producto A	No hay límite inferior	250
Producción total	300	475
Tiempo de procesamiento	475	700

Resuelva el problema 10 para probar su capacidad e interpretar el resultado de la computadora en un problema de minimización.

Los precios duales mostrados en el resultado de la computadora son aplicables siempre que los lados derechos estén dentro de estos rangos.

Nota precautoria sobre la interpretación de los precios duales

Como se mencionó antes, el precio dual es la mejora en el valor de la solución óptima por incremento unitario en el lado derecho de una restricción. Cuando el lado derecho de una restricción representa la cantidad de un recurso disponible, el precio dual asociado con frecuencia se interpreta como la cantidad máxima que uno debería estar dispuesto a pagar por una unidad adicional del recurso. Sin embargo, esta interpretación no siempre es correcta. Para saber por qué, debemos entender la diferencia entre costos hundidos y costos relevantes. Un **costo hundido** es aquel que no se ve afectado por la decisión tomada; se incurrirá en él sin importar cuáles valores asuman las variables de decisión. Un **costo relevante** es aquel que depende de la decisión tomada; el monto de un costo relevante variará dependiendo de los valores de las variables de decisión.

Reconsideremos el problema de RMC. La cantidad de material 1 disponible es 20 toneladas. El costo del material 1 es un costo hundido si debe pagarse sin importar el número de toneladas de aditivo para combustible y de base solvente producidas. Sería un costo relevante si RMC sólo tuviera que pagar el número de toneladas de material 1 empleado en realidad para producir aditivo para combustible y base solvente. Todos los costos relevantes deben incluirse en la función objetivo de un programa lineal; los costos hundidos no deben incluirse en la misma. Para RMC hemos supuesto que la empresa ya ha pagado por los materiales 1, 2 y 3. Por consiguiente, el costo de las materias primas para RMC es un costo hundido y no se ha incluido en la función objetivo.

Sólo los costos relevantes deben incluirse en la función objetivo.

Cuando el costo de un recurso es *hundido,* el precio dual puede interpretarse como los montos máximos que la empresa debe estar dispuesta a pagar una unidad adicional del recurso. Cuando el costo de un recurso empleado es relevante, el precio dual puede interpretarse como la cantidad por la cual el valor del recurso excede su costo. Así que cuando el costo del recurso es relevante, el precio dual puede interpretarse como la prima máxima sobre el costo normal que la empresa debe estar dispuesta a pagar por una unidad del recurso.

NOTAS Y COMENTARIOS

1. El software para resolver programas lineales se puede conseguir con facilidad. La mayoría proporciona la solución óptima, información sobre precios duales o sombra, los rangos del coeficiente objetivo y los rangos del lado derecho. Las etiquetas usadas para estos rangos pueden variar, pero el significado es el mismo que se describe aquí.
2. Siempre que uno de los lados derechos está en un punto final de su rango, los precios duales y de sombra sólo proporcionan información de un lado. En este caso sólo predicen el cambio en el valor óptimo de la función objetivo para los cambios hacia el interior del rango.
3. Una condición llamada *degeneración* puede provocar una diferencia sutil en la manera de interpretar los cambios en los coeficientes de la función objetivo más allá de los puntos finales del rango de la función objetivo. La degeneración ocurre cuando el precio dual es igual a cero para una de las restricciones de confinamiento. La degeneración no afecta a la interpretación de los cambios hacia el interior del rango del coeficiente del objetivo. Sin embargo, cuando la degeneración está presente, los cambios más allá de los puntos finales de los rangos no necesariamente significan que una solución diferente será óptima. Desde un punto de vista práctico, los cambios más allá de los puntos finales del rango necesitan resolver el problema.
4. La regla del 100 por ciento permite un análisis de los múltiples cambios en los lados derechos o múltiples cambios en el coeficiente de la función objetivo *y* los lados derechos al mismo tiempo. Pero la regla del 100 por ciento no puede aplicarse a los cambios de los coeficientes de la función objetivo *y* los lados derechos al mismo tiempo. Con el fin de considerar los cambios simultáneos para los valores del lado derecho y los coeficientes de la función objetivo, el problema debe resolverse.
5. Con frecuencia se pide a los gerentes que proporcionen una justificación económica para la nueva tecnología, la cual a menudo se desarrolla, o compra, para conservar recursos. El precio dual puede ser útil en estos casos debido a que puede emplearse para determinar los ahorros atribuibles a la nueva tecnología al mostrar los ahorros por unidad del recurso conservado.

8.4 Más sobre dos variables de decisión

El procedimiento de solución gráfica es útil sólo para programas lineales que involucran dos variables de decisión. En la práctica, los problemas resueltos por medio de la programación lineal involucran una gran cantidad de variables y restricciones. Por ejemplo, el artículo de MC en Acción, "Determinación de las cantidades óptimas de producción en GE Plastics", describe cómo un modelo de programación lineal, con 3100 variables y 1100 restricciones, se resolvió en menos de 10 segundos para determinar las cantidades óptimas de producción en GE Plastics. En esta sección estudiamos la formulación y la solución por computadora de dos programas lineales con tres variables de decisión. Al hacerlo, se muestra cómo interpretar la parte del costo reducido del resultado de la computadora y también se ilustra la interpretación de los precios duales para restricciones que involucran porcentajes.

Problema de RMC modificado

El problema de programación lineal de RMC se presentó en la sección 7.1. La formulación del problema original se replantea aquí:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Max} & 40F + 30S & \\
\text{s.a.} & & \\
 & 0.4F + 0.5S \leq 20 & \text{Material 1} \\
 & 0.2S \leq 5 & \text{Material 2} \\
 & 0.6F + 0.3S \leq 21 & \text{Material 3} \\
 & F, S \geq 0 &
\end{array}
$$

Recuerde que F es el número de toneladas de aditivo para combustible producidas y S es el número de toneladas de base solvente producidas. Suponga que la gerencia también está considerando producir un limpiador de alfombras líquido. Las estimaciones son que cada tonelada de limpiador de alfombras requerirá 0.6 toneladas de material 1, 0.1 toneladas de material 2, y 0.3 toneladas de material 3. Debido a las capacidades únicas del nuevo producto, la gerencia de RMC considera que la empresa obtendrá una contribución a las utilidades de $50 por cada tonelada de limpiador de alfombras producido durante el periodo de producción actual.

MC *en* ACCIÓN

*DETERMINACIÓN DE LAS CANTIDADES ÓPTIMAS DE PRODUCCIÓN EN GE PLASTICS**

General Electric Plastics (GEP) es un proveedor global, con ingresos de 5,000 millones de dólares, que abastece materiales de plástico y materias primas a numerosas industrias (como la automotriz, cómputo y la de equipo médico), y tiene plantas en todo el mundo. En el pasado, GEP siguió un enfoque de manufactura centrado en regiones en que cada producto se fabricaba en el área geográfica (América, Europa o el Pacífico) donde también se entregaba. Cuando muchos de los clientes de GEP comenzaron a trasladar sus operaciones de manufactura al Pacífico, se creó un desequilibrio geográfico entre la capacidad de la empresa y la demanda que se manifestó en un exceso de capacidad en América y una falta de capacidad en el Pacífico.

Al reconocer que un enfoque centrado en regiones ya no era eficaz, GEP adoptó un enfoque global para sus operaciones de manufactura. El trabajo inicial se concentró en la división de polímeros de alta calidad

(*continuación*)

*Con base en R. Tyagi, P. Kalish y K. Akbay, "GE Plastics Optimizes the Two-Echelon Global Fulfillment Network at Its High-Performance Polymers Division", *Interfaces* (septiembre/octubre de 2004): 359–366.

(PAC). Utilizando un modelo de programación lineal, GEP pudo determinar las cantidades óptimas de producción en cada planta de PAC con el fin de maximizar el margen de contribución total para la división. El modelo incluía las restricciones de la demanda, de la capacidad de manufactura y las que modelaban el flujo de los materiales producidos en las plantas de resinas hacia las plantas de acabados y a los almacenes en tres regiones (América, Europa y el Pacífico). El modelo matemático para un problema de un año tiene 3100 y 1100 restricciones, y puede resolverse en menos de 10 segundos. Como el nuevo sistema demostró ser exitoso en la división de PAC, otras divisiones de GE Plastics están adaptándolo a su planeación de la cadena de suministro.

Consideremos las modificaciones en el modelo de programación lineal original que se requieren para incorporar el efecto de esta variable de decisión adicional. Sea C el número de toneladas de limpiador de alfombras producido. Después de añadir C a la función objetivo y a cada una de las tres restricciones, obtenemos el programa lineal para el problema modificado:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 40F + 30S + 50C \\
\text{s.a.} \quad & \\
& 0.4F + 0.5S + 0.6C \leq 20 \quad \text{Material 1} \\
& \qquad\quad 0.2S + 0.1C \leq 5 \quad \text{Material 2} \\
& 0.6F + 0.3S + 0.3C \leq 21 \quad \text{Material 3} \\
& F, S, C \geq 0
\end{aligned}$$

La figura 8.8 muestra la solución de The Management Scientist para el problema de RMC modificado. La solución óptima exige la producción de 27.5 toneladas de aditivo para combustible, 0 toneladas de base solvente y 15 toneladas de limpiador de alfombras. El valor de la solución óptima es $1850.

Observe la información contenida en la columna Reduced Costs (Costos reducidos). El **costo reducido** indica cuánto tendría que mejorar el coeficiente de la función objetivo para una variable en particular antes de que la variable de decisión asuma un valor positivo en la solución óptima. Como muestra el resultado de la computadora, los costos reducidos para las variables de decisión F y C son cero, debido a que estas variables ya tienen valores positivos en la solución óptima. El costo reducido de $12.50 para la variable de decisión S indica que la contribución a las utilidades para la base solvente tendría que aumentar al menos $30 + $12.50 = $42.50 antes de que *S pueda* tomar un valor positivo en la solución óptima.[1] En otras palabras, a menos que la contribución a las utilidades para S se incremente por lo menos $12.50, el valor de S seguirá siendo cero en la solución óptima.

Suponga que el coeficiente de S $12.50 aumenta y luego resolvemos el problema utilizando The Management Scientist. La figura 8.9 muestra la nueva solución. Aunque S tome un valor positivo en la nueva solución (S = 20.000), el valor de la solución óptima ($1850.020) sólo se ha incrementado dos centavos. Note que la diferencia de los dos centavos es sólo 20, el número de unidades de S producidas en la nueva solución, multiplicado por 0.001, la cantidad que incrementamos el coeficiente de S por encima de $12.50. En algún software, aumentar el coeficiente de la función objetivo de *S exactamente* $12.50 dará como resultado una solución en la cual S asume un valor positivo y el valor de la función

[1]En el caso de la degeneración, una variable de decisión tal vez no tome un valor positivo en la solución óptima, aun cuando la mejora en la contribución a las utilidades exceda el valor de los costos reducidos. Nuestra definición de costos reducidos, planteada como "…pueda tomar un valor positivo…" es válida para estos casos especiales. Los libros más avanzados sobre programación matemática estudian estos tipos especiales de situaciones.

FIGURA 8.8 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE RMC MODIFDICADO

```
Objective Function Value =           1850.00

      Variable               Value            Reduced Costs
   --------------      ---------------      -----------------
         F                     27.500                  0.000
         S                      0.000                 12.500
         C                     15.000                  0.000

     Constraint         Slack/Surplus          Dual Prices
   --------------      ---------------      -----------------
         1                      0.000                 75.000
         2                      3.500                  0.000
         3                      0.000                 16.667

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable      Lower Limit     Current Value     Upper Limit
------------  ---------------  ---------------  ---------------
     F                 33.333           40.000          100.000
     S         No Lower Limit           30.000           42.500
     C                 33.333           50.000           60.000

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint     Lower Limit     Current Value     Upper Limit
------------  ---------------  ---------------  ---------------
     1                 14.000           20.000           34.000
     2                  1.500            5.000   No Lower Limit
     3                 10.000           21.000           30.000
```

objetivo sigue siendo \$1,850. En otras palabras, incrementar la contribución a las utilidades de *S,* exactamente la cantidad del costo reducido, dará como resultado soluciones óptimas alternas. Sin embargo, siempre que la contribución a las utilidades de *S* aumente *más de* \$12.50, *S* no permanecerá en cero en la solución óptima.

La figura 8.8 también muestra que los precios duales para las restricciones 1 y 3 son \$75.000 y \$16.667, respectivamente, lo que indica que estas dos restricciones son confinantes en la solución óptima. Por tanto, cada tonelada adicional de material 1 incrementaría el valor de la solución óptima \$75, y cada tonelada adicional de material 3 incrementaría el valor de la solución óptima \$16.667.

Suponga que después de revisar la solución mostrada en la figura 8.8, la gerencia decide añadir el requerimiento de que el número de toneladas de base solvente debe ser por lo menos 25% del número de toneladas de aditivo para combustible producidas. Al escribir este requerimiento utilizando las variables de decisión *F* y *S,* se obtiene:

$$S \geq 0.25F \quad \text{o} \quad -0.25F + S \geq 0$$

FIGURA 8.9 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE RMC MODIFICADO CON UN INCREMENTO DE $12.50 EN EL COEFICIENTE DE S

```
Objective Function Value =          1850.020

      Variable              Value            Reduced Costs
   --------------      ---------------     -----------------
         F                      25.000                 0.000
         S                      20.000                 0.000
         C                       0.000                 0.001

     Constraint          Slack/Surplus          Dual Prices
   --------------      ---------------     -----------------
         1                       0.000                75.003
         2                       1.000                 0.000
         3                       0.000                16.664

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable      Lower Limit      Current Value     Upper Limit
------------  ---------------  ---------------  ---------------
     F                 34.001           40.000           40.008
     S                 42.500           42.501           50.000
     C         No Lower Limit           50.000           50.001

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint     Lower Limit      Current Value     Upper Limit
------------  ---------------  ---------------  ---------------
     1                 14.000           20.000           21.500
     2                  4.000            5.000   No Lower Limit
     3                 18.750           21.000           30.000
```

Al añadir esta nueva restricción al programa lineal de RMC modificado y resolver el problema usando The Management Scientist, se obtiene la solución óptima mostrada en la figura 8.10.

Interpretemos el precio dual para la restricción 4, es decir, el requerimiento de que el número de toneladas de base solvente producidas debe ser por lo menos 25% del número de toneladas de aditivo para combustible producidas. El precio dual de $-\$12.121$ indica que un incremento de una unidad en el lado derecho de la restricción reducirá las utilidades \$12.121. Por tanto, lo que en realidad indica el precio dual de $-\$12.121$ es lo que ocurrirá con el valor de la solución óptima si la restricción cambia a

$$S \geq 0.25F + 1$$

La interpretación correcta del precio dual de $-\$12.121$ ahora puede plantearse como sigue: si producimos 1 tonelada de base solvente por encima del requerimiento mínimo de 25%, la utilidad total disminuirá \$12.121. Por el contrario, si relajamos el requerimiento mínimo de 25% por 1 tonelada ($S \geq 0.25F - 1$), las utilidades totales aumentarán \$12.121.

El precio dual para una restricción de porcentaje (o razón) como ésta no proporciona respuestas directas a las preguntas concernientes al incremento o la disminución en el lado

FIGURA 8.10 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE RMC MODIFICADO CON EL REQUERIMIENTO DE 25% DE BASE SOLVENTE

```
Objective Function Value =            1766.667

     Variable                Value               Reduced Costs
   --------------       ---------------       -----------------
         F                  26.667                    0.000
         S                   6.667                    0.000
         C                  10.000                    0.00

    Constraint           Slack/Surplus             Dual Prices
   --------------       ---------------       -----------------
         1                   0.000                   78.788
         2                   2.667                    0.000
         3                   0.000                    9.091
         4                   0.000                  -12.121

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable       Lower Limit       Current Value       Upper Limit
------------  -----------------  ---------------   ---------------
     F              36.250             40.000            105.000
     S              15.000             30.000             42.500
     C              33.333             50.000             54.286

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint      Lower Limit      Current Value       Upper Limit
------------  -----------------  ---------------   ---------------
     1              16.333             20.000             32.571
     2               2.333              5.000      No Upper Limit
     3              10.000             21.000             25.714
     4              -6.875              0.000             13.750
```

derecho de la restricción. Por ejemplo, ¿qué le pasaría al valor de la solución óptima si el número de toneladas de base solvente producidas tuviera que ser como mínimo 26% del número total de toneladas de aditivo para combustible? Para responder a esta pregunta, resolveríamos el problema utilizando la restricción $-0.26S + F \geq 0$.

Debido a que las restricciones de porcentaje (o razón) con frecuencia ocurren en los modelos de programación lineal, debemos considerar otro ejemplo. Imagine que la gerencia de RMC establece que el número de toneladas de limpiador de alfombras producidas no puede exceder de 20% de la producción total. Como la producción total es $F + S + C$, podemos escribir esta restricción como

$$C \leq 0.2(F + S + C)$$

$$C \leq 0.2F + 0.2S + 0.2C$$

$$-0.2F - 0.2S + 0.8C \leq 0$$

FIGURA 8.11 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE RMC MODIFICADO CON LOS REQUERIMIENTOS DE 25% DE BASE SOLVENTE Y 20% DE LIMPIADOR DE ALFOMBRAS

```
Objective Function Value =            1745.161

      Variable                Value              Reduced Costs
   --------------       ---------------       -----------------
         F                     26.452                   0.000
         S                      8.387                   0.000
         C                      8.710                   0.000

     Constraint             Slack/Surplus           Dual Prices
   --------------       ---------------       -----------------
         1                      0.000                  38.710
         2                      2.452                   0.000
         3                      0.000                  46.237
         4                      1.774                   0.000
         5                      0.000                  16.129

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable       Lower Limit         Current Value      Upper Limit
------------  -----------------    ---------------    ---------------
     F                23.462              40.000           64.000
     S                16.667              30.000           42.500
     C                33.333              50.000     No Upper Limit

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint        Lower Limit        Current Value       Upper Limit
------------  -----------------    ---------------    ---------------
     1                 19.463              20.000            24.000
     2                  2.548               5.000      No Upper Limit
     3                 15.698              21.000            21.579
     4            No Lower Limit            0.000             1.774
     5                 -9.000               0.000             1.333
```

La solución obtenida utilizando The Management Scientist para el modelo que incorpora tanto los efectos de este nuevo requerimiento porcentual como del requerimiento previo ($-0.25F + S \geq 0$) se muestra en la figura 8.11. Después de redondear, el precio dual que corresponde a la nueva restricción (restricción S) es \$16.13. De ahí que cada tonelada adicional de limpiador de alfombras que podamos producir sobre el límite de 20% actual aumentará el valor de la función objetivo \$16.13; además, el rango del lado derecho para esta restricción muestra que esta interpretación es válida para incrementos de hasta 1.333 toneladas.

Problema de Bluegrass Farms

Como práctica adicional en la formulación e interpretación de la solución por computadora para los programas lineales que involucran más de dos variables de decisión, considere un problema de minimización que incluye tres variables de decisión. Bluegrass Farms, localizada en Lexington, Kentucky, ha experimentado con una dieta especial para sus caballos de carreras. Los componentes alimentarios disponibles para la dieta son un alimento para caballos estándar, un producto de avena enriquecida y un nuevo aditivo alimentario con vitaminas y minerales. Los valores nutricionales en unidades por libra y los costos de los tres componentes alimentarios se resumen en la tabla 8.3; por ejemplo, cada libra del componente alimentario estándar contiene 0.8 unidades del ingrediente A, 1 unidad del ingrediente B y 0.1 unidades del ingrediente C. La dieta mínima diaria para cada caballo son tres unidades del ingrediente A, seis del ingrediente B y cuatro del ingrediente C. Asimismo, para controlar el peso de los caballos, la alimentación diaria total de cada uno no debe exceder de 6 libras. A Bluegrass Farms le gustaría determinar la mezcla de costo mínimo que satisfará los requerimientos dietéticos diarios.

Para formular un modelo de programación lineal para el problema de Bluegrass Farms, se presentan tres variables de decisión:

S = número de libras del alimento para caballos estándar

E = número de libras del producto de avena enriquecida

A = número de libras del aditivo alimentario con vitaminas y minerales

Utilizando los datos de la tabla 8.3, la función objetivo que minimizará el costo total asociado con la alimentación diaria puede escribirse como sigue:

$$\text{Min } 0.25S + 0.5E + 3A$$

Dado que el requerimiento mínimo para el ingrediente A es tres unidades, obtenemos la restricción

$$0.8S + 0.2E \geq 3$$

La restricción para el ingrediente B es

$$1.0S + 1.5E + 3.0A \geq 6$$

y la restricción para el ingrediente C es

$$1.0S + 0.6E + 2.0A \geq 4$$

Por último, la restricción que limita la mezcla a por lo menos 6 libras es

$$S + E + A \leq 6$$

TABLA 8.3 DATOS DEL VALOR NUTRICIONAL Y DEL COSTO PARA EL PROBLEMA DE BLUEGRASS FARMS

Componente alimentario	Estándar	Avena enriquecida	Aditivo
Ingrediente A	0.8	0.2	0.0
Ingrediente B	1.0	1.5	3.0
Ingrediente C	0.1	0.6	2.0
Costo por libra	$0.25	$0.50	$3.00

La combinación de todas las restricciones con los requerimientos no negativos permite escribir el modelo de programación lineal para el problema de Bluegrass Farms como sigue:

$$
\begin{array}{llr}
\text{Min} & 0.25S + 0.50E + \quad 3A & \\
\text{s.a.} & & \\
& 0.8S + \ \ 0.2E \qquad\qquad \geq 3 & \text{Ingrediente A} \\
& 1.0S + \ \ 1.5E + 3.0A \geq 6 & \text{Ingrediente B} \\
& 0.1S + \ \ 0.6E + 2.0A \geq 4 & \text{Ingrediente C} \\
& S + \quad E + \quad A \leq 6 & \text{Peso} \\
& S, E, A \geq 0 &
\end{array}
$$

El resultado obtenido utilizando The Management Scientist para resolver el problema de Bluegrass Farms se muestra en la figura 8.12. Después de redondear, vemos que la solución óptima exige que la dieta diaria consista en 3.51 libras del alimento para caballos estándar, 0.95 libras del producto de avena enriquecida y 1.54 libras del aditivo alimentario con vitaminas y minerales. Por tanto, si los costos del componente alimentario son \$0.25, \$0.50 y \$3.00, el costo total de la dieta óptima es

$$
\begin{aligned}
3.51 \text{ libras @ \$0.25 por libra} &= \$0.88 \\
0.95 \text{ libras @ \$0.50 por libra} &= \ \ 0.47 \\
1.54 \text{ libras @ \$3.00 por libra} &= \ \ \underline{4.62} \\
\text{Costo total} &= \$5.97
\end{aligned}
$$

Al observar la sección Slack/Surplus (Holgura/Excedente) del resultado de la computadora, encontramos un valor de 3.554 para la restricción 2. Dado que esta restricción es una de mayor o igual que, 3.554 es el excedente; la solución óptima rebasa el requerimiento de la dieta diaria mínima para el ingrediente B (6 unidades) por 3.554 unidades. Debido a que los valores de excedente para las restricciones 1 y 3 son cero en ambos casos, vemos que la dieta óptima sólo cumple con los requerimientos mínimos para los ingredientes A y C; además, un valor de holgura de cero para la restricción 4 muestra que la solución óptima proporciona un peso del alimento diario total de 6 libras.

El precio dual (después de redondear) para la restricción 1 (ingrediente A) es -1.22. Para interpretar este valor de manera adecuada, primero vemos el signo: es negativo. Por tanto, un incremento en el lado derecho de la restricción 1 provocará que el valor de la solución empeore. En este problema de minimización, “empeorar” significa que aumentará el costo diario total. Por tanto, un incremento de una unidad en el lado derecho de la restricción 1 incrementará el costo total de la dieta diaria por \$1.22. Por el contrario, también es correcto concluir que una disminución de una unidad en el lado derecho disminuirá el costo total \$1.22. Al estudiar la sección RIGHT HAND SIDE RANGES (Rangos del lado derecho) del resultado de la computadora, vemos que estas interpretaciones son correctas siempre y cuando el lado derecho de la restricción 1 esté entre 1.143 y 3.368.

Suponga que la gerencia de Bluegrass está dispuesta a reconsiderar su posición respecto al peso máximo de la dieta diaria. El precio dual de \$0.92 (después de redondear) para la restricción 4 muestra que un incremento de una unidad en el lado derecho de la restricción 4 reducirá el costo total \$0.92. La sección RIGHT HAND SIDE RANGES del resultado muestra que esta interpretación es correcta para los incrementos en el lado derecho hasta un máximo de 8.478 libras. Por tanto, el efecto de aumentar el lado derecho de la restricción 4 de 6 a 8 libras es un decremento en el costo diario total de $2 \times \$0.92$, o \$1.84. Tenga en mente que si se hiciera este cambio, la región factible cambiaría, y obtendríamos una solución óptima nueva.

La sección OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES (Rangos del coeficiente objetivo) del resultado de la computadora muestra un límite inferior de -0.393 para S. Desde luego,

FIGURA 8.12 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE BLUEGRASS FARMS

WEB archivo

Bluegrass

```
Objective Function Value =          5.973

      Variable              Value              Reduced Costs
   --------------      ---------------       -----------------
         S                    3.514                    0.000
         E                    0.946                    0.000
         A                    1.541                    0.000

     Constraint          Slack/Surplus           Dual Prices
   --------------      ---------------       -----------------
         1                    0.000                   -1.216
         2                    3.554                    0.000
         3                    0.000                   -1.959
         4                    0.000                    0.919

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable      Lower Limit     Current Value    Upper Limit
------------  ---------------  ---------------  ---------------
     S                 -0.393            0.250   No Upper Limit
     E         No Lower Limit            0.500            0.925
     A                  1.522            3.000   No Upper Limit

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint     Lower Limit     Current Value    Upper Limit
------------  ---------------  ---------------  ---------------
     1                  1.143            3.000            3.368
     2         No Lower Limit            6.000            9.554
     3                  2.100            4.000            4.875
     4                  5.562            6.000            8.478
```

en un problema real el coeficiente de la función objetivo de *S* (el costo del alimento para caballos estándar) no puede tomar un valor negativo. Por tanto, desde un punto de vista práctico, podemos pensar que el límite inferior para el coeficiente de la función objetivo de *S* es cero. De esta manera podemos concluir que no importa cuánto disminuya el costo de la mezcla estándar, la solución óptima no cambiará. Incluso si Bluegrass Farms consiguiera gratis el alimento estándar, la solución óptima seguiría especificando una dieta diaria de 3.51 libras de este producto, 0.95 libras del producto de avena enriquecida y 1.54 libras del aditivo alimentario con vitaminas y minerales. Sin embargo, cualquier disminución en el costo unitario del alimento estándar traería como consecuencia una disminución en el costo total para la dieta diaria óptima.

Observe que los rangos del coeficiente del objetivo para *S* y *A* no tienen límite superior. Incluso si el costo de *A* fuera a aumentar, por ejemplo, de \$3.00 a \$13.00 por libra, la solución óptima no cambiaría; no obstante, el costo total de la solución aumentaría \$10 (el monto del incremento) $\times$ 1.541, o \$15.41. Siempre tenga en mente que las interpretaciones que hicimos utilizando la información del análisis de sensibilidad en el resultado de la computadora sólo son apropiadas si no cambian todos los demás coeficientes del problema. Para considerar cambios simultáneos, debemos utilizar la regla del 100 por ciento o resolver el problema después de hacer los cambios.

La programación lineal se ha utilizado con éxito en una variedad de aplicaciones que involucran productos alimenticios y nutrición. El artículo de MC en Acción, "Estimación del valor nutritivo de los alimentos", analiza cómo el Centro de Coordinación de Nutrición de la Universidad de Minnesota utiliza la programación lineal para ayudar a estimar las cantidades de nutrientes en productos alimenticios nuevos.

MC *en* ACCIÓN

*ESTIMACIÓN DEL VALOR NUTRITIVO DE LOS ALIMENTOS**

El Centro de Coordinación de Nutrición (NCC) de la Universidad de Minnesota mantiene una base de datos de composición de los alimentos que utilizan los nutriólogos e investigadores de todo el mundo. La información nutrimental proporcionada por el NCC se utiliza para estimar el consumo de nutrientes de las personas, planear menús, investigar las relaciones entre la dieta y las enfermedades, y cumplir con requerimientos reglamentarios.

Los cálculos del consumo de nutrientes requieren datos sobre una enorme cantidad de valores nutricionales. La base de datos de composición de alimentos del NCC contiene información sobre 93 nutrientes diferentes para cada producto alimenticio. Con tantos productos de marca nuevos que se introducen cada año, el NCC tiene la significativa tarea de mantener una base de datos precisa y oportuna. La tarea se vuelve más difícil por el hecho de que los productos de marca nuevos sólo proporcionan datos sobre un número relativamente pequeño de nutrientes. Debido al alto costo de analizar químicamente productos, el NCC utiliza un modelo de programación lineal para ayudar a estimar miles de valores nutricionales al año.

Las variables de decisión en el modelo de programación lineal son las cantidades de cada ingrediente en un producto alimenticio. El objetivo es minimizar la diferencia entre los valores nutricionales estimados y los valores nutricionales conocidos para el producto alimenticio. Las restricciones son que los ingredientes deben estar en orden descendente por peso y dentro de los límites especificados por los nutriólogos, y las diferencias entre los valores nutricionales calculados y los valores nutricionales conocidos deben estar dentro de tolerancias específicas.

En la práctica, un nutriólogo del NCC utiliza un modelo de programación lineal para determinar las estimaciones de las cantidades de cada ingrediente en un nuevo producto alimenticio. Dadas estas estimaciones, el nutriólogo refina las estimaciones con base en su conocimiento de la formulación del producto y la composición del alimento. Una vez que se obtienen las cantidades de cada ingrediente, pueden calcularse las de cada nutriente en el producto alimenticio. Con aproximadamente 1000 productos evaluados cada año, son significativos los ahorros en tiempo y costo que permite el uso de la programación lineal para ayudar a estimar los valores nutrimentales.

*Con base en Brian J. Westrich, Michael A. Altmann y Sandra J. Potthoff, "Minnesota's Nutrition Coordinating Center Uses Mathematical Optimization to Estimate Food Nutrient Values", *Inferfaces* (septiembre/octubre de 1998): 86–99.

8.5 Problema de Electronic Communications

El problema de Electronic Communications es un problema de maximización que involucra cuatro variables de decisión, dos restricciones de menor o igual que, una restricción de igualdad y otra de mayor o igual que. Utilizaremos este problema para proporcionar un resumen del proceso de formulación de un modelo matemático, usando The Management Scientist para obtener una solución óptima, e interpretar la solución y los datos del informe de sensibilidad. En el capítulo siguiente seguiremos ilustrando cómo se aplica la programación lineal mediante ejemplos adicionales de las áreas de marketing, finanzas y administración de la producción.

Electronic Communications fabrica sistemas de radio portátiles que se usan para las comunicaciones bidireccionales. El nuevo producto de la empresa, que tiene un alcance de hasta 40 233 metros, es adecuado para usarlo en una variedad de aplicaciones personales y de negocios. Los canales de distribución para el nuevo radio son los siguientes:

1. Distribuidores de equipo marino
2. Distribuidores de equipo de negocios
3. Cadena nacional de tiendas minoristas
4. Correo directo

Debido a que los costos de distribución y promocionales difieren, la rentabilidad del producto varía según el canal de distribución. Además, el costo de publicidad y el esfuerzo de venta personal requeridos también variarán con los canales de distribución. La tabla 8.4 resume los datos de la contribución a las utilidades, el costo de publicidad y el esfuerzo de venta personal para el problema de Electronic Communications. La empresa estableció un presupuesto de publicidad de $5,000. Se dispone de un máximo de 1800 horas del tiempo de la fuerza de ventas para asignarlas al esfuerzo de ventas. La gerencia decidió también producir exactamente 600 unidades para el periodo de producción actual. Finalmente, un contrato en curso con una cadena nacional de tiendas minoristas requiere que por lo menos 150 unidades se entreguen a través de este canal de distribución.

Electronic Communications ahora enfrenta el problema de determinar la cantidad de unidades que deben producirse para cada uno de los canales de distribución con el fin de maximizar la contribución total a las utilidades. Además de determinar cuántas unidades deben asignarse a cada uno de los cuatro canales de distribución, Electronic Communications también debe decidir cómo asignar el presupuesto de publicidad y el trabajo de la fuerza de ventas a cada uno de los cuatro canales de distribución.

Formulación del problema

Ahora escribiremos la función objetivo y las restricciones para el problema de Electronic Communications. Comencemos con la función objetivo.

Función objetivo: maximizar las utilidades

Se necesitan cuatro restricciones para expresar las limitaciones siguientes: 1) un presupuesto de publicidad limitado, 2) disponibilidad limitada de la fuerza de ventas, 3) un requerimiento de producción, y 4) un requerimiento de distribución a tiendas minoristas.

Restricción 1 Gasto de publicidad $\leq$ Presupuesto

Restricción 2 Tiempo de ventas empleado $\leq$ Tiempo disponible

Restricción 3 Radios producidos $=$ Requerimiento de administración

Restricción 4 Distribución minorista $\geq$ Requerimiento de contrato

TABLA 8.4 DATOS DE UTILIDADES, COSTO DE PUBLICIDAD Y TIEMPO DE VENTAS PERSONALES PARA EL PROBLEMA DE ELECTRONIC COMMUNICATIONS

Canal de distribución	Utilidad por unidad vendida	Costo de publicidad por unidad vendida	Esfuerzo de venta personal por unidad vendida
Distribuidores de equipo marítimo	$90	$10	2 horas
Distribuidores de equipo para negocios	$84	$ 8	3 horas
Tiendas minoristas nacionales	$70	$ 9	3 horas
Correo directo	$60	$15	Ninguno

Estas expresiones describen la función objetivo y las restricciones. Ahora estamos preparados para definir las variables de decisión que representarán las decisiones que el gerente debe tomar. Para el problema de Electronics Communications se introducen las cuatro variables de decisión siguientes:

M = cantidad de unidades producida para el canal de distribución del equipo marítimo
B = cantidad de unidades producida para el canal de distribución del equipo para negocios
R = cantidad de unidades producida para el canal de distribución de tiendas minoristas nacionales
D = cantidad de unidades producidas para el canal de distribución de correo directo

Utilizando los datos de la tabla 8.4, podemos escribir la función objetivo para maximizar la contribución a las utilidades asociada con los radios como sigue:

$$\text{Max } 90M + 84B + 70R + 60D$$

Desarrollemos ahora el enunciado matemático de las restricciones para el problema. Para el presupuesto de publicidad de \$5,000, la restricción que limita el monto del gasto en publicidad se escribe como sigue:

$$10M + 8B + 9R + 15D \leq 5{,}000$$

De manera similar, con el tiempo de ventas limitado a 1800 horas, se obtiene la restricción

$$2M + 3B + 3R \leq 1{,}800$$

La decisión de la gerencia de fabricar exactamente 600 unidades durante el periodo de producción actual se expresa como

$$M + B + R + D = 600$$

Por último, para representar el hecho de que la cantidad de unidades distribuidas por la cadena nacional de tiendas minoristas debe ser por lo menos 150, añadimos la restricción

$$R \geq 150$$

La combinación de todas las restricciones con los requerimientos de no negatividad nos permite escribir el modelo de programación lineal completo para el problema de Electronic Communications como sigue:

$$\begin{array}{lllll}
\text{Max} & 90M + 84B + 70R + 60D & & & \\
\text{s.a.} & & & & \\
 & 10M + 8B + 9R + 15D & \leq & 5{,}000 & \text{Presupuesto de publicidad} \\
 & 2M + 3B + 3R & \leq & 1{,}800 & \text{Disponibilidad de la fuerza de ventas} \\
 & M + B + R + D & \leq & 600 & \text{Nivel de producción} \\
 & R & \geq & 150 & \text{Requerimiento de tiendas minoristas} \\
 & M, B, R, D \geq 0 & & &
\end{array}$$

Solución por computadora y su interpretación

Una parte del resultado obtenido usando The Management Scientist para resolver el problema de Electronic Communications se muestra en la figura 8.13. La sección Objective Function Value (Valor de la función objetivo) muestra que la solución óptima para el problema proporcionará una utilidad de \$48.450. Los valores óptimos de las variables de decisión

FIGURA 8.13 UNA PARTE DE LA SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE ELECTRONIC COMMUNICATIONS

WEB archivo

Electronic

```
Objective Function Value =          48450.000

   Variable                 Value              Reduced Costs
 --------------        ---------------      -----------------
      M                       25.000                   0.000
      B                      425.000                   0.000
      R                      150.000                   0.000
      D                        0.000                  45.000

  Constraint            Slack/Surplus            Dual Prices
 --------------        ---------------      -----------------
      1                        0.000                   3.000
      2                       25.000                   0.000
      3                        0.000                  60.000
      4                        0.000                 -17.000
```

son $M = 25$, $B = 425$, $R = 150$ y $D = 0$. Por tanto, la estrategia óptima para Electronic Communications es concentrarse en el canal de distribución del equipo para negocios con $B = 425$ unidades. Asimismo, la empresa debe asignar 25 unidades al canal de distribución de equipo marino ($M = 25$) y cumplir con su compromiso de 150 unidades con el canal de distribución de la cadena de tiendas minoristas ($R = 150$). Con $D = 0$, la solución óptima indica que la empresa no usaría el canal de distribución de correo directo.

Ahora considere la información contenida en la columna Reduced Costs (Costos reducidos). Recuerde que los costos reducidos indican cuánto tendría que mejorar cada coeficiente de la función objetivo antes de que la variable de decisión correspondiente pudiera asumir un valor positivo en la solución óptima. Como muestra el resultado de la computadora, los primeros tres costos reducidos son cero debido a que las variables de decisión correspondientes ya tienen valores positivos en la solución óptima. Sin embargo, el costo reducido de 45 para la variable de decisión D nos dice que las utilidades para los nuevos radios distribuidos por el canal de correo directo tendrían que aumentar su valor actual de \$60 por unidad a por lo menos \$60 + \$45 = \$105 por unidad, antes de que sea rentable usar el canal de distribución de correo directo.

La información del resultado de la computadora para las variables de holgura/excedente y los precios duales se replantea aquí:

Número de restricción	Nombre de la restricción	Tipo de Restricción	Holgura o excedente	Precio dual
1	Presupuesto de publicidad	$\leq$	0	3
2	Disponibilidad de la fuerza de ventas	$\leq$	25	0
3	Nivel de producción	$=$	0	60
4	Requerimiento de tiendas minoristas	$\geq$	0	-17

La restricción del presupuesto de publicidad tiene una holgura de cero, lo que indica que se ha utilizado todo el presupuesto de \$5,000. El precio dual correspondiente de 3 indica que un dólar adicional añadido al presupuesto de publicidad mejorará la función objetivo (incremento en las utilidades) por \$3. Por tanto, la empresa debe considerar con seriedad la posibilidad de aumentar el presupuesto de publicidad. La holgura de 25 horas para la restricción de la disponibilidad de la fuerza de ventas muestra que las 1800 horas asignadas

FIGURA 8.14 RANGOS DEL COEFICIENTE OBJETIVO Y DEL LADO DERECHO PROPORCIONADOS POR THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE ELECTRONIC COMMUNICATIONS

```
OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable       Lower Limit      Current Value      Upper Limit
 -------------- ---------------  ---------------  ---------------
      M                84.000           90.000     No Upper Limit
      B                50.000           84.000             90.000
      R        No Lower Limit           70.000             87.000
      D        No Lower Limit           60.000            105.000


RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint      Lower Limit      Current Value      Upper Limit
 ------------   ---------------  ---------------  ---------------
      1              4950.000         5000.000           5850.000
      2              1775.000         1800.000     No Upper Limit
      3               515.000          600.000            603.571
      4                 0.000          150.000            200.000
```

de tiempo de ventas son adecuadas para distribuir los radios producidos y que 25 horas del tiempo de ventas permanecerán sin usarse. Debido a que la restricción del nivel de producción es una restricción de igualdad, se esperaba una holgura/excedente de cero en el resultado. Sin embargo, el precio dual de 60 asociados con esta restricción muestra que si la empresa fuera a considerar incrementar el nivel de producción de los radios, el valor de la función objetivo, o las utilidades, mejoraría a una razón de $60 por radio producido. Finalmente, el excedente de cero asociado al compromiso con el canal de distribución de tiendas minoristas es una consecuencia de que esta restricción sea confinante. El precio dual negativo indica que el incremento en el compromiso de 150 a 151 unidades en realidad disminuirá las utilidades $17. Por ello, es probable que Electronic Communications quiera considerar la reducción de su compromiso con el canal de distribución de tiendas minoristas. Una *disminución* en el compromiso en realidad mejorará las utilidades a una razón de $17 por unidad.

Ahora consideremos la información adicional del análisis de sensibilidad proporcionada por el resultado de la computadora mostrado en la figura 8.14. Utilizando C con un subíndice de M, B, R y D para denotar los coeficientes de la función objetivo, los rangos de dicho coeficiente son

$$84 \leq C_M < \text{Sin límite superior}$$
$$50 \leq C_B \leq 90$$
$$\text{Sin límite inferior} < C_R \leq 87$$
$$\text{Sin límite inferior} < C_D \leq 105$$

La solución, o estrategia, actual aún es óptima, siempre y cuando los coeficientes de la función objetivo permanezcan dentro de los rangos dados. Observe en particular el rango asociado con el coeficiente del canal de distribución de correo directo, C_D. Esta información es consistente con la observación anterior para la parte de los costos reducidos (Reduced Costs) del resultado. En ambos casos, vemos que las utilidades por unidad tendrían que aumentar a $105 antes de que el canal de distribución de correo directo pudiera estar en la solución óptima con un valor positivo.

Por último, la información del análisis de sensibilidad en los rangos del lado derecho (RIGHT HAND SIDE RANGES), como muestra la figura 8.14, proporciona los rangos siguientes:

Restricción	LD mínimo	Valor actual	LD máximo
Presupuesto de publicidad	4,950	5,000	5,850
Fuerza de ventas	1,775	1,800	Sin límite superior
Nivel de producción	515	600	603.57
Requerimiento de tiendas minoristas	0	150	200

Es posible hacer varias interpretaciones de estos rangos del lado derecho. En particular, recuerde que el precio dual para el presupuesto de publicidad nos permitió concluir que cada incremento de \$1 en el presupuesto mejoraría las utilidades \$3. El rango para el presupuesto de publicidad muestra que esta afirmación sobre el valor de aumentar el presupuesto es apropiado hasta para un presupuesto de publicidad de \$5,850. Los incrementos que rebasan este nivel no necesariamente serían benéficos. También observe que el precio dual de -17 para el requerimiento de las tiendas minoristas sugirió la conveniencia de reducir este compromiso. El rango del lado derecho para esta restricción muestra que el compromiso podría reducirse a cero y el valor de la reducción sería de \$17 por unidad.

De nuevo, el *análisis de sensibilidad* o *análisis de postoptimalidad* proporcionado por el software para los problemas de programación lineal sólo considera *un cambio a la vez*; mientras que todos los demás coeficientes del problema permanecen como se especificó originalmente. Como se mencionó, los cambios simultáneos a veces pueden analizarse sin resolver el problema, con la condición de que los cambios acumulativos no sean lo suficientemente grandes para violar la regla del 100 por ciento.

Por último, recuerde que la solución completa para el problema de Electronic Communications requirió información no sólo sobre la cantidad de unidades a distribuir por cada canal, sino también acerca de la asignación del presupuesto publicitario y el esfuerzo de la fuerza de ventas para cada canal de distribución. Dado que la solución óptima es $M = 25$, $B = 425$, $R = 150$ y $D = 0$, sencillamente podemos evaluar cada término en una restricción dada para determinar cuánto del recurso de restricción se asigna a cada canal de distribución. Por ejemplo, la restricción del presupuesto de publicidad de

$$10M + 8B + 9R + 15D \leq 5{,}000$$

muestra que $10M = 10(25) = \$250$, $8B = 8(425) = \$3{,}400$, $9R = 9(150) = \$1{,}350$ y $15D = 15(0) = \$0$. Por tanto, las asignaciones del presupuesto de publicidad son \$250, \$3,400, \$1,350 y \$0, respectivamente, para cada uno de los cuatro canales de distribución. Al hacer cálculos parecidos para la restricción de la fuerza de ventas obtenemos el resumen gerencial de la solución óptima de Electronic Communications, como muestra la tabla 8.5.

TABLA 8.5 ESTRATEGIA DE MAXIMIZACIÓN DE LAS UTILIDADES PARA EL PROBLEMA DE ELECTRONIC COMMUNICATIONS

Canal de distribución	Volumen	Asignación de publicidad	Asignación de la fuerza de ventas (horas)
Distribuidores de equipo marino	25	\$ 250	50
Distribuidores de equipo para negocios	425	3,400	1,275
Tiendas minoristas nacionales	150	1,350	450
Correo directo	0	0	0
Totales	600	\$5,000	1,775

Utilidades totales proyectadas = \$48,450

Resumen

Inició el capítulo con la exposición del análisis de sensibilidad, el estudio de cómo los cambios en los coeficientes de un programa lineal afectan a la solución óptima. En específico, mostramos cómo un cambio en uno de los coeficientes de la función objetivo o un cambio en el valor del lado derecho de una restricción, afecta a la solución óptima del problema.

Se continuó con la exposición de la formulación del problema, el análisis de sensibilidad y la interpretación de la solución al introducir modificaciones al problema de RMC. Estas modificaciones consistieron en una variable de decisión adicional y restricciones de porcentaje, o razón. Luego, con el fin de proporcionar práctica adicional en la formulación e interpretación de la solución para programas lineales que involucran más de dos variables de decisión, presentamos el problema de Bluegrass Farms, un conflicto de minimización que involucra tres variables de decisión. En la última sección se resume todo el trabajo hasta ahora utilizando el caso de Electronic Communications, un problema de maximización con cuatro variables de decisión: dos restricciones de menor o igual que, una restricción de igualdad y una restricción de mayor o igual que.

El artículo de MC en Acción, "Producción y distribución de té en Duncan Industries Limited", ilustra la diversidad de las situaciones en que puede aplicarse la programación lineal y la importancia del análisis de sensibilidad. En el capítulo siguiente veremos muchas aplicaciones más de la programación lineal.

MC en ACCIÓN

*PRODUCCIÓN Y DISTRIBUCIÓN DE TÉ EN DUNCAN INDUSTRIES LIMITED**

En India, uno de los productores de té más grandes del mundo, se venden aproximadamente 1000 millones de dólares en paquetes de té y té a granel. Duncan Industries Limited (DIL), el tercer productor de té más grande del mercado indio, vende alrededor de $37.5 millones de té, casi todo se vende en paquetes.

DIL tiene 16 jardines de té, tres unidades mezcladoras, seis unidades empacadoras y 22 depósitos. El té de los jardines se envía a las unidades mezcladoras, donde se producen mezclas como Sargam, Donole Diamond y Runglee Rungliot, con té de distinta calidad. El té mezclado se transporta a las unidades empacadoras, donde se coloca en paquetes de diferentes tamaños y formas para producir alrededor de 120 líneas de producto diferentes. Por ejemplo, una línea es el té Sargam empacado en cajas de 500 gramos; otra línea es el té Double Diamond que se envuelve en bolsas de poliestireno de 100 gramos, etcétera. Luego se envía a los depósitos que abastecen a 1,500 distribuidores quienes a su vez satisfacen las necesidades de aproximadamente 325,000 minoristas.

Cada mes, los gerentes de ventas proporcionan estimaciones de la demanda para cada línea de té en cada depósito. Con estas estimaciones, un equipo de altos directivos determina las cantidades de té por mezcla que se enviarán a cada unidad empacadora, la cantidad de cada línea de té que se empacará en cada unidad empacadora, y las cantidades de té empacado de cada línea que se transportarán de las unidades empacadoras a los distintos depósitos. Este proceso requiere de dos a tres días al mes y con frecuencia provoca un desabasto en las líneas con gran demanda en depósitos específicos.

Por consiguiente, se elaboró un modelo de programación lineal que involucra aproximadamente 7000 variables de decisión y 1500 restricciones para minimizar el costo del flete de la empresa y al mismo tiempo satisfacer la demanda, el abastecimiento y todas las restricciones de operación. El modelo se probó con datos pasados y mostró que los desabastos podían evitarse a un costo adicional bajo o nulo. Además, el modelo pudo proporcionar a la gerencia la capacidad para realizar varios tipos de ejercicios en distintos escenarios hipotéticos, lo cual los convenció de los beneficios potenciales de emplear las técnicas de las ciencias de la administración para apoyar el proceso de toma de decisiones.

*Con base en Nilotpal Chakravarti, "Tea Company Steeped in OR", *OR/MS Today* (abril de 2000).

Glosario

Análisis de sensibilidad Estudio de cómo los cambios en los coeficientes de un problema de programación lineal afectan a la solución óptima.

Regla del 100 por ciento Regla que indica cuándo los cambios simultáneos en dos o más coeficientes de la función objetivo no provocarán una alteración en los valores óptimos para las variables de decisión. También se aplica para indicar cuándo dos o más cambios en el lado derecho no provocarán una modificación en cualquiera de los precios duales.

Precio dual Mejora en el valor de la solución óptima por incremento unitario en el lado derecho de una restricción.

Costo hundido Costo que no se ve afectado por la decisión tomada. Se incurrirá en este costo sin importar los valores que asuman las variables de decisión.

Costo relevante Costo que depende de la decisión tomada. El monto de un costo relevante variará dependiendo de los valores de las variables de decisión.

Costo reducido Cantidad que tendría que mejorar un coeficiente de la función objetivo (aumentar para un problema de maximización, disminuir para un problema de minimización) antes de que la variable correspondiente pueda tomar un valor positivo en la solución óptima.

Problemas

AUTO evaluación

1. Considere el programa lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & 3A + 2B \\ \text{s.a.} \quad & \\ & 1A + 1B \leq 10 \\ & 3A + 1B \leq 24 \\ & 1A + 2B \leq 16 \\ & A, B \geq 0 \end{aligned}$$

a. Utilice el procedimiento de solución gráfica para encontrar la solución óptima.
b. Suponga que el coeficiente de la función objetivo para A cambia de 3 a 5. ¿Cambia la solución óptima? Utilice el procedimiento de solución gráfica para encontrar la nueva solución óptima.
c. Suponga que el coeficiente de la función objetivo para A permanece en 3, pero el coeficiente de la función objetivo para B cambia de 2 a 4. ¿La solución óptima cambia? Utilice el procedimiento de solución gráfica para encontrar la nueva solución óptima.
d. La solución por computadora de The Management Scientist para el programa lineal del inciso a, proporciona la información siguiente sobre el rango del coeficiente objetivo:

Variable	Límite inferior	Valor actual	Límite superior
A	2	3	6
B	1	2	3

Utilice esta información del rango del coeficiente objetivo para responder los incisos b y c.

AUTO evaluación

2. Considere el programa lineal del problema 1. El valor de la solución óptima es 27. Suponga que el lado derecho de la restricción 1 se incrementa de 10 a 11.
   a. Utilice el procedimiento de solución gráfica para encontrar la nueva solución óptima.
   b. Utilice la solución del inciso a, para determinar el precio dual de la restricción 1.
   c. La solución por computadora de The Management Scientist para el programa lineal del problema 1, proporciona la información siguiente sobre el rango del lado derecho:

Variable	Límite inferior	Valor actual	Límite superior
1	8	10	11.2
2	18	24	30
3	13	16	Sin límite superior

   ¿Qué indica la información del rango del lado derecho para la restricción 1 acerca del precio dual para esta restricción?
   d. El precio dual para la restricción 2 es 0.5. Utilizando el precio dual y la información del rango del lado derecho del inciso c, ¿qué conclusión se puede obtener sobre el efecto de los cambios en el lado derecho de la restricción 2?

3. Considere el programa lineal siguiente:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & 8X + 12Y \\ \text{s.a.} \quad & \\ & 1X + 3Y \geq 9 \\ & 2X + 2Y \geq 10 \\ & 6X + 2Y \geq 18 \\ & X, Y \geq 0 \end{aligned}$$

   a. Utilice el procedimiento de solución gráfica para encontrar la solución óptima.
   b. Suponga que el coeficiente de la función objetivo para X cambia de 8 a 6. ¿La solución óptima cambia? Utilice el procedimiento de solución gráfica para encontrar la nueva solución óptima.
   c. Imagine que el coeficiente de la función objetivo para X sigue siendo 8, pero el coeficiente de la función objetivo para Y cambia de 12 a 6. ¿Cambia la solución óptima? Utilice el procedimiento de solución gráfica para encontrar la nueva solución óptima.
   d. La solución por computadora de The Management Scientist para el programa lineal del inciso a proporciona la siguiente información sobre el rango del coeficiente objetivo:

Variable	Límite inferior	Valor actual	Límite superior
X	4	8	12
Y	8	12	24

   ¿Cómo le ayudaría esta información del rango del coeficiente objetivo a responder los incisos b y c antes de resolver el problema?

4. Considere el programa lineal del problema 3. El valor de la solución óptima es 48. Suponga que el lado derecho de la restricción 1 se incrementa de 9 a 10.
   a. Utilice el procedimiento de la solución gráfica para encontrar la nueva solución óptima.
   b. Utilice la solución del inciso a, para determinar el precio dual para la restricción 1.

c. La solución por computadora de The Management Scientist para el programa lineal del problema 3 proporciona la siguiente información sobre el rango del lado derecho:

Variable	Límite inferior	Valor actual	Límite superior
1	5	9	11
2	9	10	18
3	Sin límite inferior	18	22

¿Qué indica la información del rango del lado derecho para la restricción 1 acerca del precio dual para dicha restricción?

d. El precio dual para la restricción 2 es -3. Utilizando este precio dual y la información sobre el rango del lado derecho del inciso c, ¿qué conclusión se puede obtener respecto al efecto de los cambios en el lado derecho de la restricción 2?

AUTO evaluación

5. Remítase al problema de Kelson Sporting Equipment (capítulo 7, problema 24). Sea

$$R = \text{cantidad de guantes regulares}$$
$$C = \text{cantidad de guantes para catcher}$$

lo que conduce a la formulación siguiente:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Max} & 5R + 8C & \\
\text{s.a.} & & \\
 & R + {}^3\!/_2 C \leq 900 & \text{Corte y confección} \\
 & {}^1\!/_2 R + {}^1\!/_3 C \leq 300 & \text{Acabados} \\
 & {}^1\!/_8 R + {}^1\!/_4 C \leq 100 & \text{Empaque y envío} \\
 & R, C \geq 0 &
\end{array}
$$

La solución por computadora obtenida utilizando The Management Scientist se muestra en la figura 8.15.

a. ¿Cuál es la solución óptima y cuál el valor de la contribución total a las utilidades?
b. ¿Cuáles restricciones son confinantes?
c. ¿Cuáles son los precios duales para los recursos? Interprete cada uno de ellos.
d. Si se pueden programar horas extra en uno de los departamentos, ¿dónde recomendaría hacerlo?

AUTO evaluación

6. Remítase a la solución por computadora del problema de Kelson Sporting Equipment en la figura 8.15 (vea el problema 5).

a. Determine los rangos del coeficiente objetivo.
b. Interprete los rangos del inciso a.
c. Interprete los rangos del lado derecho.
d. ¿Cuánto mejorará el valor de la solución óptima si se dispone de 20 horas extra de tiempo de empacado y envío?

7. Investment Advisors, Inc. es una firma de corretaje que administra portafolios de acciones para varios clientes. Un portafolio en particular consta de U acciones de U.S. Oil y H acciones de Huber Steel. El rendimiento anual para U.S. Oil es \$3 por acción, y para Huber Steel es \$5 por acción. Las acciones de U.S. Oil se venden a \$25 por acción y las de Huber Steel a \$50. El portafolio tiene \$80,000 para invertir. El índice de riesgo del portafolio (0.50 por acción de U.S. Oil y 0.25 por acción de Huber Steel) tiene un máximo de 700. Además, el portafolio está limitado a un máximo de 1000 acciones de U.S. Oil.

FIGURA 8.15 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE KELSON SPORTING EQUIPMENT

```
Objective Function Value =        3700.00146

      Variable              Value              Reduced Costs
   --------------      ---------------      -----------------
         R                500.00153              0.00000
         C                149.99924              0.00000

     Constraint          Slack/Surplus          Dual Prices
   --------------      ---------------      -----------------
         1                174.99962              0.00000
         2                  0.00000              2.99999
         3                  0.00000             28.00006

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable      Lower Limit       Current Value     Upper Limit
------------  -----------------  ---------------  ---------------
     R              4.00000            5.00000         12.00012
     C              3.33330            8.00000         10.00000

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint     Lower Limit       Current Value     Upper Limit
------------  -----------------  ---------------  ---------------
     1            725.00037          900.00000     No Upper Limit
     2            133.33199          300.00000        400.00000
     3             75.00000          100.00000        134.99982
```

La formulación de la programación lineal que maximizará el rendimiento anual total del portafolio es el siguiente:

$$
\begin{array}{llll}
\text{Max} & 3U + 5H & & \text{Rendimiento anual total máximo} \\
\text{s.a.} & & & \\
& 25U + 50H \leq & 80{,}000 & \text{Fondos disponibles} \\
& 0.50U + 0.25H \leq & 700 & \text{Riesgo máximo} \\
& 1U \qquad\quad \leq & 1{,}000 & \text{Máximo de U.S. Oil} \\
& U, H \geq 0 & &
\end{array}
$$

La solución por computadora de este problema se muestra en la figura 8.16.

a. ¿Cuál es la solución óptima y cuál el valor del rendimiento anual total?
b. ¿Cuáles restricciones son confinantes? ¿Cuál es su interpretación de estas restricciones en función del problema?
c. ¿Cuáles son los precios duales para las restricciones? Interprete cada una.
d. ¿Sería benéfico incrementar el monto máximo invertido en U.S. Oil? ¿Por qué?

FIGURA 8.16 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE INVESTMENT ADVISORS

```
Objective Function Value =          8400.000

      Variable              Value            Reduced Costs
   --------------      ---------------     -----------------
         U                  800.000                 0.000
         H                 1200.000                 0.000

     Constraint          Slack/Surplus         Dual Prices
   --------------      ---------------     -----------------
         1                    0.000                 0.093
         2                    0.000                 1.333
         3                    0.000                 0.000

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable      Lower Limit        Current Value     Upper Limit
------------  -----------------  ---------------  ---------------
     U                2.500              3.000           10.000
     H                1.500              5.000            6.000

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint     Lower Limit        Current Value     Upper Limit
------------  -----------------  ---------------  ---------------
     1            65000.000          80000.000       140000.000
     2              400.000            700.000          775.000
     3              800.000           1000.000   No Upper Limit
```

8. Remítase a la figura 8.16, la cual muestra la solución por computadora del problema 7.
   a. ¿Cuánto tendría que incrementarse el rendimiento de U.S. Oil antes de que sea benéfico aumentar la inversión en esta acción?
   b. ¿Cuánto tendría que disminuir el rendimiento de Huber Steel antes de que sea benéfico reducir la inversión en esta acción?
   c. ¿Cuánto se reduciría el rendimiento total anual si el máximo de U.S. Oil se redujera a 900 acciones?
9. Recuerde el problema de Tom's, Inc. (capítulo 7, problema 28). Sea

$$W = \text{frascos de salsa Western Foods}$$

$$M = \text{frascos de salsa Mexico City}$$

lo que conduce a la formulación:

$$\begin{aligned}
\text{Max}\quad & 1W + 1.25M \\
\text{s.a.}\quad & \\
& 5W + 7M \leq 4{,}480 \quad \text{Tomates enteros} \\
& 3W + 1M \leq 2{,}080 \quad \text{Salsa de tomate} \\
& 2W + 2M \leq 1{,}600 \quad \text{Puré de tomate} \\
& W, M \geq 0
\end{aligned}$$

FIGURA 8.17 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE TOM'S, INC.

```
OPTIMAL SOLUTION

Objective Function Value =          860.000

      Variable              Value              Reduced Costs
   --------------      ---------------      ------------------
         W                    560.000                   0.000
         M                    240.000                   0.000

     Constraint          Slack/Surplus           Dual Prices
   --------------      ---------------      ------------------
         1                      0.000                   0.125
         2                    160.000                   0.000
         3                      0.000                   0.187

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable      Lower Limit       Current Value     Upper Limit
------------  -----------------  ---------------  ---------------
     M                   0.893             1.000            1.250
     W                   1.000             1.250            1.400

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint     Lower Limit       Current Value     Upper Limit
------------  -----------------  ---------------  ---------------
     1                4320.000          4480.000         5600.000
     2                1920.000          2080.000   No Upper Limit
     3                1280.000          1600.000         1640.000
```

La solución de The Management Scientist se muestra en la figura 8.17.

a. ¿Cuál es la solución óptima y cuáles las cantidades de producción óptimas?
b. Especifique los rangos de la función objetivo.
c. ¿Cuáles son los precios duales para cada restricción? Interprete cada uno.
d. Identifique cada uno de los rangos del lado derecho.

AUTO evaluación

10. Recuerde el problema de Innis Investments (capítulo 7, problema 39). Sea

$$S = \text{unidades compradas en el fondo de acciones}$$

$$M = \text{unidades compradas en el fondo de mercado de dinero,}$$

lo cual nos lleva a la formulación siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{Min} \quad & 8S + 3M \\
\text{s.a.} \quad & \\
& 50S + 100M \leq 1{,}200{,}000 \quad \text{Fondos disponibles} \\
& 5S + 4M \geq 60{,}000 \quad \text{Ingresos anuales} \\
& M \geq 3{,}000 \quad \text{Unidades en el mercado de dinero} \\
& S, M \geq 0
\end{aligned}$$

FIGURA 8.18 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE INNIS INVESTMENTS

```
Objective Function Value =        62000.000

     Variable              Value            Reduced Costs
  --------------      ---------------      -----------------
        S                 4000.000                  0.000
        M                10000.000                  0.000

    Constraint          Slack/Surplus         Dual Prices
  --------------      ---------------      -----------------
        1                    0.000                  0.057
        2                    0.000                 -2.167
        3                 7000.000                  0.000

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable      Lower Limit       Current Value    Upper Limit
------------  -----------------  ---------------  ---------------
     S                  3.750             8.000   No Upper Limit
     M         No Lower Limit             3.000            6.400

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint     Lower Limit       Current Value    Upper Limit
------------  -----------------  ---------------  ---------------
     1             780000.000       1200000.000      1500000.000
     2              48000.000         60000.000       102000.000
     3         No Lower Limit          3000.000        10000.000
```

La solución por computadora se muestra en la figura 8.18.

a. ¿Cuál es la solución óptima y cuál el riesgo total mínimo?
b. Especifique los rangos del coeficiente objetivo.
c. ¿Cuántos ingresos anuales se obtendrán con el portafolio?
d. ¿Cuál es la tasa de rendimiento para el portafolio?
e. ¿Cuál es el precio dual para la restricción de los fondos disponibles?
f. ¿Cuál es la tasa de rendimiento marginal sobre los fondos extra añadidos al portafolio?

11. Remítase al problema 10 y a la solución por computadora que aparece en la figura 8.18.
    a. Suponga que el índice de riesgo para el fondo de acciones (el valor de C_S) aumenta su valor actual de 8 a 12. ¿Cómo cambia la solución óptima, si es que cambia?
    b. Imagine que el índice de riesgo para el fondo del mercado de dinero (el valor de C_M) aumenta su valor actual de 3 a 3.5. ¿Cómo cambia la solución óptima, si es que lo hace?
    c. Suponga que C_S se incrementa a 12 y C_M a 3.5. ¿Cómo cambia la solución óptima, si es que lo hace?

AUTO evaluación

12. Quality Air Conditioning fabrica tres modelos de aparatos domésticos de aire acondicionado: económico, estándar y de lujo. Las utilidades por unidad son \$63, \$95 y \$135, respectivamente. Los requerimientos de producción por unidad son los siguientes:

	Número de ventiladores	Número de serpentines de enfriamiento	Tiempo de manufactura (horas)
Económico	1	1	8
Estándar	1	2	12
De lujo	1	4	14

Para el periodo de producción siguiente, la empresa cuenta con 200 motores de ventilador, 320 serpentines de enfriamiento y 2400 horas de tiempo de manufactura disponibles. ¿Cuántos modelos económicos (E), estándar (S) y de lujo (D) debe producir la empresa para maximizar las utilidades? El modelo de programación lineal para el problema es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & 63E + 95S + 135D \\
\text{s.a.} \quad & \\
& 1E + 1S + 1D \leq 200 \quad \text{Motores de ventilador} \\
& 1E + 2S + 4D \leq 320 \quad \text{Serpentines de enfriamiento} \\
& 8E + 12S + 14D \leq 2{,}400 \quad \text{Tiempo de manufactura} \\
& E, S, D \geq 0
\end{aligned}
$$

La solución por computadora utilizando de The Management Scientist se muestra en la figura 8.19.

a. ¿Cuál es la solución óptima y cuál el valor de la función objetivo?
b. ¿Cuáles restricciones son confinantes?
c. ¿Cuál restricción muestra capacidad adicional? ¿Cuánta capacidad muestra?
d. Si las utilidades para el modelo de lujo aumentaran a $150 por unidad, ¿cambiaría la solución óptima? Utilice la información de la figura 8.19 para responder a esta pregunta.

AUTO evaluación

13. Remítase a la solución por computadora del problema 12 en la figura 8.19.
    a. Identifique el rango de optimalidad para cada coeficiente de la función objetivo.
    b. Suponga que las utilidades para el modelo económico se incrementan $6 por unidad, las utilidades para el modelo estándar disminuyen $2 por unidad, y las utilidades para el modelo de lujo aumentan $4 por unidad. ¿Cuál sería la solución óptima?
    c. Identifique el rango de factibilidad para los valores del lado derecho.
    d. Si la cantidad de motores de ventilador para la producción aumenta en 100, ¿el precio dual cambia para esa restricción? Explique por qué.

14. Digital Controls, Inc. (DCI) fabrica dos modelos de una pistola radar utilizada por la policía para monitorear la velocidad de los automóviles. El modelo A tiene una precisión de más menos 1 milla por hora, mientras que el modelo B más pequeño tiene una precisión de más menos 3 millas por hora. La empresa tiene pedido para 100 unidades del modelo A y 150 unidades del modelo B para la semana siguiente. Aunque DCI compra todos los componentes que utiliza en ambos modelos, los estuches de plástico usados para ambos modelos se fabrican en una planta de DCI en Newark, New Jersey. Cada estuche para el modelo A requiere 4 minutos de tiempo de moldeo por inyección y 6 minutos de tiempo de ensamblaje. Cada estuche para el modelo B requiere 3 minutos de moldeo por inyección y 8 minutos de ensamblaje. Para la semana siguiente la planta de Newark dispone de 600 minutos de tiempo de moldeo por inyección y 1080 minutos de tiempo de ensamblaje. El costo de manufactura es $10 por estuche para el modelo A y $6 por estuche para el modelo B. Dependiendo de la demanda y el tiempo disponible en la planta de Newark, DCI ocasionalmente compra estuches para uno o ambos modelos a un proveedor externo con el fin de abastecer los pedidos de los clientes que de lo contrario no se podrían entregar. El costo de compra es $14 por estuche para el modelo A y $9 por estuche para el modelo B. La gerencia quiere desarrollar un plan de costo mínimo que determine cuántos estuches de cada modelo deben fabricarse en la planta de Newark y cuántos estuches de cada modelo deben comprarse.

FIGURA 8.19 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE QUALITY AIR CONDITIONING

```
Objective Function Value =            16440.000

      Variable              Value              Reduced Costs
   --------------     ---------------     -----------------
         E                  80.000                 0.000
         S                 120.000                 0.000
         D                   0.000                24.000

       Constraint         Slack/Surplus        Dual Prices
   --------------     ---------------     -----------------
         1                   0.000                31.000
         2                   0.000                32.000
         3                 320.000                 0.000

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable       Lower Limit        Current Value      Upper Limit
------------   ---------------     ---------------   ---------------
     E                  47.500             63.000            75.000
     S                  87.000             95.000           126.000
     D          No Lower Limit            135.000           159.000

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint       Lower Limit        Current Value      Upper Limit
------------    ---------------    ---------------    ---------------
     1                  160.000            200.000            280.000
     2                  200.000            320.000            400.000
     3                 2080.000           2400.000     No Upper Limit
```

Las variables de decisión siguientes se utilizaron para formular un modelo de programación lineal para este problema:

AM = cantidad de estuches del modelo A fabricados

BM = cantidad de estuches del modelo B fabricados

AP = cantidad de estuches del modelo A comprados

BP = cantidad de estuches del modelo B comprados

El modelo de programación lineal que se utiliza para resolver este problema es el siguiente:

$$
\begin{array}{llr l}
\text{Min} & 10AM + 6BM + 14AP + 9BP & & \\
\text{s.a.} & & & \\
& 1AM + + 1AP + = & 100 & \text{Demanda para el modelo A} \\
& 1BM + 1BP = & 150 & \text{Demanda para el modelo B} \\
& 4AM + 3BM \qquad\qquad \leq & 600 & \text{Tiempo de moldeo por inyección} \\
& 6AM + 8BM \qquad\qquad \leq & 1080 & \text{Tiempo de ensamblaje} \\
& AM, BM, AP, BP \geq 0 & &
\end{array}
$$

FIGURA 8.20 UNA PARTE DE LA SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE ELECTRONIC COMMUNICATIONS

```
Objective Function Value =              2170.000

      Variable                Value              Reduced Costs
   --------------        ---------------       -----------------
         AM                   100.000                     0.000
         BM                    60.000                     0.000
         AP                     0.000                     1.750
         BP                    90.000                     0.000

     Constraint            Slack/Surplus           Dual Prices
   --------------        ---------------       -----------------
         1                      0.000                   -12.250
         2                      0.000                    -9.000
         3                     20.000                     0.000
         4                      0.000                     0.375

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable       Lower Limit         Current Value      Upper Limit
------------   ---------------     ---------------   ---------------
     AM        No Lower Limit               10.000            11.750
     BM                 3.667                6.000             9.000
     AP                12.250               14.000    No Upper Limit
     BP                 6.000                9.000            11.333

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint       Lower Limit        Current Value       Upper Limit
------------   ---------------     ---------------   ---------------
     1                   0.000             100.000           111.429
     2                  60.000             150.000    No Upper Limit
     3                 580.000             600.000    No Upper Limit
     4                 600.000            1080.000          1133.333
```

La solución por computadora desarrollada usando The Management Scientist se muestra en la figura 8.20.

a. ¿Cuál es la solución óptima y cuál el valor óptimo de la función objetivo?
b. ¿Cuáles restricciones son confinantes?
c. ¿Cuáles son los precios duales? Interprete cada uno.
d. Si pudiera cambiar el lado derecho de una restricción por una unidad, ¿cuál elegiría? ¿Por qué?

15. Remítase a la solución por computadora del problema 14 en la figura 8.20.
    a. Interprete los rangos de optimalidad para los coeficientes de la función objetivo.
    b. Suponga que el costo de manufactura aumenta a $11.20 por estuche para el modelo A. ¿Cuál es la solución óptima?

c. Imagine que el costo de manufactura se incrementa a \$11.20 por estuche para el modelo A y el costo de manufactura para el modelo B disminuye a \$5 por unidad. ¿Cambiaría la solución óptima? Utilice la regla del 100 por ciento y explique su respuesta.

16. Tucker Inc. fabrica trajes de alta calidad y sacos sport para hombre. Cada traje requiere 1.2 horas de tiempo de corte y 0.7 horas de tiempo de costura, utiliza 6 yardas de tela y proporciona una contribución a las utilidades de \$190. Cada saco sport requiere 0.8 horas de tiempo de corte y 0.6 horas de tiempo de costura, utiliza 4 yardas de tela y proporciona una contribución a las utilidades de \$150. Para la semana siguiente se dispone de 200 horas de tiempo de corte, 180 horas de tiempo de costura y 1200 yardas de tela. El tiempo de corte y costura adicional puede obtenerse al programar horas extra para estas operaciones. Cada hora extra para la operación de corte incrementa \$10. Se puede programar un máximo de 100 horas extra. Los requerimientos de marketing especifican una producción mínima de 100 trajes y 75 sacos sport. Sea

$$
\begin{aligned}
S &= \text{cantidad de trajes fabricados} \\
SC &= \text{cantidad de sacos sport fabricados} \\
D1 &= \text{horas extra para la operación corte} \\
D2 &= \text{horas extra para la operación de costura}
\end{aligned}
$$

La solución por computadora desarrollada usando The Management Scientist se exhibe en la figura 8.21.

a. ¿Cuál es la solución óptima, y cuáles son las utilidades totales? ¿Cuál es el plan para usar las horas extra?
b. Se considera un incremento en el precio de los trajes que generaría una contribución a las utilidades de \$210 por traje. Si se hace este incremento, ¿cómo cambiará la solución óptima?
c. Comente la necesidad de tela adicional durante la próxima semana. Si puede colocarse un pedido urgente de tela al precio usual, más \$8 adicionales por yarda por el manejo, ¿recomendaría usted a la empresa hacer un pedido urgente de tela? ¿Cuál es el precio máximo que Tucker estaría dispuesto a pagar por una yarda adicional de tela? ¿De cuántas yardas adicionales de tela debe hacer el pedido Tucker?
d. Suponga que el requerimiento de producción mínimo para trajes se reduce a 75. ¿Este cambio ayudaría o dañaría a las utilidades? Explique por qué.

17. El Porsche Club of America patrocina eventos de educación para los conductores que proporcionan instrucción de manejo de alta calidad en autódromos reales. Como la seguridad es un factor importante en estos eventos, muchos propietarios eligen instalar barras estabilizadoras en sus automóviles. Deegan Industries fabrica dos tipos de barras estabilizadoras para los Porsche. El modelo DRB se atornilla al automóvil usando los agujeros existentes en el bastidor del mismo. El modelo DRW es una barra estabilizadora más pesada que se suelda al bastidor del automóvil. El modelo DRB requiere 20 libras de un acero especial de alta aleación, 40 minutos de tiempo de manufactura y 60 minutos de tiempo de ensamblaje. El modelo DRW requiere 25 libras del acero especial de alta aleación, 100 minutos de tiempo de manufactura y 40 minutos de ensamblaje. El proveedor de acero de Deegan indicó que contará máximo con 40,000 libras del acero de alta aleación para el trimestre siguiente. Además, Deegan estima que dispondrá de 2000 horas de tiempo de manufactura y 1600 horas para ensamblaje el siguiente trimestre. Las contribuciones a las utilidades son \$200 por unidad para el modelo DRB y \$280 por unidad para el modelo DRW. El modelo de programación lineal para este problema es el siguiente:

$$
\begin{array}{lrl}
\text{Max} & 200DRB + 280DRW & \\
\text{s.a.} & & \\
& 20DRB + 25DRW \leq 40{,}000 & \text{Acero disponible} \\
& 40DRB + 100DRW \leq 120{,}000 & \text{Minutos de manufactura} \\
& 60DRB + 40DRW \leq 96{,}000 & \text{Minutos de ensamble} \\
& DRB, DRW \geq 0 &
\end{array}
$$

FIGURA 8.21 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE TUCKER INC.

```
Objective Function Value =         40900.000

      Variable                Value               Reduced Costs
   --------------       ---------------       ---------------
         S                   100.000                  0.000
         SC                  150.000                  0.000
         D1                   40.000                  0.000
         D2                    0.000                 10.000

     Constraint           Slack/Surplus            Dual Prices
   --------------       ---------------       ---------------
         1                     0.000                 15.000
         2                    20.000                  0.000
         3                     0.000                 34.500
         4                    60.000                  0.000
         5                     0.000                -35.000
         6                    75.000                  0.000

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable        Lower Limit        Current Value       Upper Limit
------------    ---------------    ---------------    ---------------
     S          No Lower Limit            190.000            225.000
     SC                126.667            150.000     No Upper Limit
     D1               -187.500            -15.000              0.000
     D2         No Lower Limit            -10.000              0.000

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint       Lower Limit        Current Value       Upper Limit
------------    ---------------    ---------------    ---------------
     1                 140.000            200.000            240.000
     2                 160.000            180.000     No Upper Limit
     3                1000.000           1200.000           1333.333
     4                  40.000            100.000     No Upper Limit
     5                   0.000            100.000            150.000
     6          No Lower Limit             75.000            150.000
```

La solución de The Management Scientist aparece en la figura 8.22.

a. ¿Cuál es la solución óptima y la contribución total a las utilidades?
b. Otro proveedor ofreció proporcionar a Deegan Industries 500 libras adicionales de la aleación de acero a $2 por libra. ¿Debe Deegan comprar las libras adicionales de la aleación de acero? Explique por qué.
c. Deegan considera usar horas extra para incrementar el tiempo de ensamblaje disponible. ¿Qué le aconsejaría a Deegan hacer respecto a esta opción? Explique sus razones.
d. Debido a la mayor competencia, Deegan considera reducir el precio del modelo DRB, de tal manera que la nueva contribución a las utilidades sea de $175 por unidad. ¿Cómo afectaría este cambio en el precio a la solución óptima? Explique por qué.

FIGURA 8.22 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE DEEGAN INDUSTRIES

```
OPTIMAL SOLUTION

Objective Function Value =          424000.000

      Variable              Value             Reduced Costs
   --------------     ---------------     -----------------
        DRB                1000.000                   0.000
        DRW                 800.000                   0.000

     Constraint         Slack/Surplus          Dual Prices
   --------------     ---------------     -----------------
         1                    0.000                   8.800
         2                    0.000                   0.600
         3                 4000.000                   0.000

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable       Lower Limit        Current Value     Upper Limit
------------  ---------------    ---------------  ---------------
    DRB              112.000            200.000          224.000
    DRW              250.000            280.000          500.000

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint     Lower Limit        Current Value     Upper Limit
------------  ---------------    ---------------  ---------------
     1             30000.000          40000.000        40909.091
     2            114285.714         120000.000       160000.000
     3             92000.000          96000.000   No Upper Limit
```

e. Si el tiempo de manufactura disponible se incrementa 500 horas, ¿cambiará el precio dual para la restricción del tiempo de manufactura? Explique por qué.

18. Davison Electronics fabrica dos monitores LCD para televisión, identificados como el modelo A y el B. Cuando los monitores se producen en la nueva línea de producción de Davison, se logra el menor costo de producción para cada modelo. Sin embargo, la nueva línea de producción no cuenta con la capacidad para manejar la producción total para ambos modelos. Como resultado, por lo menos parte de la producción debe redirigirse a una línea vieja de alto costo. La tabla siguiente muestra los requerimientos de producción mínimos para el mes siguiente, la capacidad de las líneas de producción en unidades por mes y el costo de producción por unidad para cada línea de producción:

	Costo de producción por unidad		Requerimientos mínimos de producción
Modelo	**Nueva línea**	**Vieja línea**	
A	$30	$50	50,000
B	$25	$40	70,000
Capacidad de la línea de producción	80,000	60,000	

Sea

AN = Unidades del modelo A producidas en la nueva línea de producción
AO = Unidades del modelo A producidas en la vieja línea de producción
BN = Unidades del modelo B producidas en la nueva línea de producción
BO = Unidades del modelo B producidas en la vieja línea de producción

El objetivo de Davison es determinar el plan de producción de costo mínimo. La solución por computadora obtenida utilizando The Management Scientist se muestra en la figura 8.23.

a. Formule el modelo de programación lineal para este problema utilizando las cuatro restricciones siguientes:

Restricción 1: Producción mínima para el modelo A

Restricción 2: Producción mínima para el modelo B

Restricción 3: Capacidad de la nueva línea de producción

Restricción 4: Capacidad de la vieja línea de producción

b. Utilizando la solución de The Management Scientist de la figura 8.23, ¿cuál es la solución óptima y cuál el costo de producción total asociado con esta solución?
c. ¿Qué restricciones son confinantes? Explique por qué.
d. El gerente de producción observó que la única restricción con un precio dual positivo es la restricción sobre la capacidad de la nueva línea de producción. La interpretación del gerente del precio dual fue que un incremento unitario en el lado derecho de esta restricción en realidad aumentaría el costo de producción total $15 por unidad. ¿Está usted de acuerdo con esta interpretación? ¿Sería recomendable un incremento en la capacidad de la nueva línea de producción? Explique por qué.
e. ¿Recomendaría usted incrementar la capacidad de la vieja línea de producción? Explique por qué.
f. El costo de producción para el modelo A en la vieja línea de producción es $50 por unidad. ¿Cómo tendría que cambiar este costo para que valiera la pena producir el modelo A en la vieja línea de producción? Explique por qué.
g. Suponga que el requerimiento de producción mínimo para el modelo B se reduce de 70,000 a 60,000 unidades. ¿Qué efecto tendría este cambio en el costo de producción total? Explique por qué.

19. Better Products, Inc. fabrica tres productos en dos máquinas. En una semana típica se dispone de 40 horas en cada máquina. La contribución a las utilidades y el tiempo de producción en horas por unidad son los siguientes:

Categoría	**Producto 1**	**Producto 2**	**Producto 3**
Utilidades/Unidad	$30	$50	$20
Tiempo de máquina 1/Unidad	0.5	2.0	0.75
Tiempo de máquina 2/Unidad	1.0	1.0	0.5

Se requieren dos operadores para la máquina 1; por tanto, deben programarse 2 horas de trabajo para cada hora de tiempo de la máquina 1. Para la máquina 2 sólo se necesita un operador. Se dispone de un máximo de 100 horas-hombre para asignarlas a las máquinas durante la semana próxima. Otros requerimientos de producción son que el producto 1 no puede corresponder a más de 50% de las unidades producidas y que el producto 3 debe corresponder como mínimo a 20% de las unidades producidas.

a. ¿Cuántas unidades de cada producto deben producirse para maximizar la contribución total a las utilidades? ¿Cuáles son las utilidades semanales proyectadas asociadas con su solución?
b. ¿Cuántas horas de tiempo de producción se programarán en cada máquina?
c. ¿Cuál es el valor de una hora-hombre adicional?

FIGURA 8.23 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE DAVISON ELECTRONICS

OPTIMAL SOLUTION

Objective Function Value = 3850000.000

Variable	Value	Reduced Costs
AN	50000.000	0.000
AO	0.000	5.000
BN	30000.000	0.000
BO	40000.000	0.000

Constraint	Slack/Surplus	Dual Prices
1	0.000	-45.000
2	0.000	-40.000
3	0.000	15.000
4	20000.000	0.000

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

Variable	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
AN	-15.000	30.000	35.000
AO	45.000	50.000	No Upper Limit
BN	20.000	25.000	40.000
BO	25.000	40.000	45.000

RIGHT HAND SIDE RANGES

Constraint	Lower Limit	Current Value	Upper Limit
1	10000.000	50000.000	70000.000
2	30000.000	70000.000	90000.000
3	60000.000	80000.000	120000.000
4	40000.000	60000.000	No Upper Limit

d. Suponga que la capacidad de mano de obra puede incrementarse a 120 horas. ¿Le interesaría emplear las 20 horas adicionales disponibles para este recurso? Determine la mezcla de productos óptima, suponiendo que dispone de horas extra.

20. Adirondack Savings Bank (ASB) tiene $1 millón en fondos nuevos que deben asignarse a préstamos para vivienda, préstamos personales y préstamos para automóvil. Las tasas de rendimiento anuales para los tres tipos de préstamos son 7% en préstamos para vivienda, 12% en préstamos personales y 9% en préstamos para automóvil. El comité de planeación del banco ha decidido que por lo menos 40% de los fondos nuevos deben asignarse a los préstamos para vivienda. Además, el comité de planeación ha especificado que el monto asignado a préstamos personales no puede exceder 60% del asignado a préstamos para automóvil.

a. Formule un modelo de programación lineal que se utilice para determinar el monto de los fondos que ASB debe asignar a cada tipo de préstamo con el fin de maximizar el rendimiento anual total para los nuevos fondos.
b. ¿Cuánto debe asignarse a cada tipo de préstamo? ¿Cuál es el rendimiento anual? ¿Cuál es el rendimiento porcentual anual?
c. Si la tasa de interés en los préstamos para vivienda aumenta 9%, ¿cambiaría el monto asignado a cada tipo de préstamo? Explique por qué.
d. Suponga que el monto total de los fondos nuevos disponibles aumentó $10,000. ¿Qué efecto tendría esto en el rendimiento total anual? Explique por qué.
e. Suponga que ASB tiene el monto de $1 millón original en nuevos fondos disponibles y que el comité de planeación ha aceptado relajar 1% el requerimiento de que por lo menos 40% de los fondos nuevos se asignen a los préstamos para vivienda. ¿Cuánto cambiaría el rendimiento anual? ¿Cuánto cambiaría el rendimiento porcentual anual?

21. Round Tree Manor es un hotel que ofrece dos tipos de habitaciones y tres clases de paquetes: económico, de lujo y ejecutivo. Las utilidades por noche para cada tipo de habitación y clase de paquete son las siguientes:

		Económico		
		Clase de paquete	**De lujo**	**Ejecutivo**
Habitación	Tipo I	$30	$35	—
	Tipo II	$20	$30	$40

Las habitaciones tipo I no cuentan con acceso a Internet y no están disponibles para el paquete ejecutivo.

La gerencia de Round Tree hace un pronóstico de la demanda por clase de paquete para cada noche en el futuro. Un modelo de programación lineal elaborado para maximizar las utilidades se utiliza para determinar cuántas reservaciones aceptar para cada clase de paquete. El pronóstico de la demanda para una noche es de 130 reservaciones para el paquete económico, 60 para el de lujo y 50 para el ejecutivo. Round Tree tiene 100 habitaciones tipo I y 120 habitaciones tipo II.

a. Utilice la programación lineal para determinar cuántas reservaciones aceptar en cada clase de paquete y cómo deben asignarse las reservaciones a los tipos de habitación. ¿La demanda de alguna clase de paquete no se satisface? Explique por qué.
b. ¿Cuántas reservaciones pueden asignarse en cada clase de paquete?
c. La gerencia considera ofrecer un desayuno gratuito a cualquiera que actualice su reservación de un paquete económico a uno de lujo. Si el costo del desayuno para Round Tree es de $5, ¿debe ofrecerse este incentivo?
d. Con un poco de trabajo, un área de oficina sin utilizar podría convertirse en una habitación de alquiler. Si el costo de conversión es el mismo para ambos tipos de habitaciones, ¿recomendaría usted convertir la oficina en una habitación tipo I o tipo II? ¿Por qué?
e. ¿Podría modificarse el modelo de programación lineal para planear la asignación de la demanda de ocupación para la noche siguiente? ¿Qué información se necesitaría y cómo cambiaría el modelo?

22. Industrial Designs ha ganado un contrato para diseñar una etiqueta para un vino nuevo producido por Lake View Winery. La empresa estima que se requerirán 150 horas para completar el proyecto. Los tres diseñadores gráficos de la empresa que están disponibles para este proyecto son Lisa, diseñadora ejecutiva y líder del equipo; David, diseñador ejecutivo, y Sarah, diseñadora adjunta. Como Lisa ha trabajado en varios proyectos para Lake View Winery, la gerencia especificó que a Lisa se le deben asignar por lo menos 40% del número total de horas asignadas a los dos diseñadores ejecutivos. Para que Sarah adquiera experiencia en el diseño de etiquetas, se le debe asignar por lo menos 15% del

tiempo total del proyecto. Sin embargo, el número de horas asignadas a Sarah no debe exceder 25% del número total de horas estipuladas a los dos diseñadores ejecutivos. Debido a sus compromisos con otros proyectos, Lisa tiene un máximo de 50 horas disponibles para trabajar en este proyecto. Los honorarios por hora de trabajo son $30 para Lisa, $25 a David y $18 para Sarah.

a. Formule un programa lineal que se utilice para determinar el número de horas que cada diseñador gráfico debe asignar al proyecto con el fin de minimizar el costo total.
b. ¿Cuántas horas se deben dar a cada diseñador para el proyecto? ¿Cuál es el costo total?
c. Imagine que a Lisa se le podrían asignar más de 50 horas. ¿Qué efecto tendría esto en la solución óptima? Explique por qué.
d. Si no se requiriera que Sarah trabajara un mínimo de horas en este proyecto, ¿cambiaría la solución óptima? Explique por qué.

23. Vollmer Manufacturing fabrica tres componentes que vende a compañías de refrigeración. Los componentes se procesan en dos máquinas: una moldeadora y una afiladora. Los tiempos (en minutos) requeridos en cada máquina son los siguientes:

	Máquina	
Componente	**Moldeadora**	**Afiladora**
1	6	4
2	4	5
3	4	2

La moldeadora está disponible durante 120 horas y la afiladora durante 110. No se pueden vender más de 200 unidades del componente 3, pero se pueden vender hasta 1000 unidades de cada uno de los otros componentes. De hecho, la empresa ya tiene pedidos por 600 unidades del componente 1 que se deben surtir. La contribución a las utilidades para los componentes 1, 2 y 3 son $8, $6 y $9, respectivamente.

a. Formule y calcule las cantidades de producción recomendadas.
b. ¿Cuáles son los rangos del coeficiente objetivo para los tres componentes? Interprete estos rangos para la gerencia de la empresa.
c. ¿Cuáles son los rangos del lado derecho? Interprete estos rangos para la gerencia de la empresa.
d. Si se pudiera disponer de más tiempo en la afiladora, ¿cuánto valdría la pena?
e. Si se pueden vender más unidades del componente 3 al reducir el precio de ventas $4, ¿la empresa debe reducir el precio?

24. National Insurance Associates tiene un portafolio de inversión de acciones, bonos y otras alternativas de inversión. Actualmente cuenta con $200,000 en fondos y debe considerar nuevas oportunidades de inversión. Las cuatro opciones de acciones que National considera y los datos financieros relevantes son los siguientes:

	Acción			
	A	**B**	**C**	**D**
Precio por acción	$100	$50	$80	$40
Tasa de rendimiento anual	0.12	0.08	0.06	0.10
Medida del riesgo por dólar invertido	0.10	0.07	0.05	0.08

La medida del riesgo indica la incertidumbre relativa asociada con la acción en función de que se logre el rendimiento anual proyectado; los valores más altos indican un riesgo mayor. El asesor financiero de la empresa proporciona las medidas del riesgo.

La gerencia ejecutiva de National ha estipulado los siguientes lineamientos de inversión: la tasa de rendimiento anual para el portafolio debe ser por lo menos 9%, y ninguna acción debe corresponder a más de 50% de la inversión total.

a. Utilice la programación lineal para elaborar un portafolio de inversión que minimice el riesgo.
b. Si la empresa ignora el riesgo y utiliza una estrategia de rendimiento máximo sobre la inversión, ¿cuál es el portafolio de inversión?
c. ¿Cuál es la diferencia en dinero entre los portafolios de los incisos a y b? ¿Por qué la empresa prefiere la solución desarrollada en el inciso a?

25. Georgia Cabinets fabrica gabinetes para cocina que se venden a distribuidores locales en todo el sureste. Debido al gran atraso en los pedidos de gabinetes de roble y cerezo, la empresa decidió contratar a tres fabricantes pequeños para que realicen la operación de acabado final de los gabinetes. Enseguida se muestra, para los tres fabricantes, el número de horas requeridas para terminar todos los gabinetes de roble, el número de horas requeridas para terminar todos los gabinetes de cerezo, el número de horas disponibles para la operación de acabado final y el costo por hora por realizar el trabajo:

	Fabricante 1	**Fabricante 2**	**Fabricante 3**
Horas requeridas para terminar todos los gabinetes de roble	50	42	30
Horas requeridas para terminar todos los gabinetes de cerezo	60	48	35
Horas disponibles	40	30	35
Costo por hora	\$36	\$42	\$55

Por ejemplo, el fabricante 1 estima que tardará 50 horas en terminar todos los gabinetes de roble y 60 horas en terminar todos los gabinetes de cerezo. Sin embargo, sólo dispone de 40 horas para la operación de acabado final. Por tanto, puede terminar sólo $40/50 = 0.80$, o 80%, de los gabinetes de roble si trabaja sólo en estos gabinetes. De igual modo, puede terminar sólo $40/60 = 0.67$, o 67%, de los gabinetes de cerezo si trabaja sólo en ellos.

a. Formule un modelo de programación lineal que se utilice para determinar el porcentaje de gabinetes de roble y gabinetes de cerezo que deben darse a cada uno de los tres fabricantes con el fin de minimizar el costo total de terminar ambos proyectos.
b. Resuelva el modelo formulado en el inciso a. ¿Cuáles porcentajes de los gabinetes de roble y de los gabinetes de cerezo deben asignarse a cada fabricante? ¿Cuál es el costo total de completar ambos proyectos?
c. Si el fabricante 1 tiene horas adicionales disponibles, ¿cambiaría la solución óptima? Explique por qué.
d. Si el fabricante 2 tiene horas adicionales disponibles, ¿cambiaría la solución óptima? Explique por qué.
e. Suponga que el fabricante 2 redujo su costo a \$38 por hora. ¿Qué efecto en la solución óptima tendría este cambio? Explique por qué.

26. Benson Electronics fabrica tres componentes que se usan para fabricar teléfonos celulares y otros dispositivos de comunicación. En un periodo de producción determinado, la demanda de estos tres componentes puede exceder la capacidad de manufactura de Benson. En este caso la empresa cumple la demanda al comprar los componentes de otro fabricante a un costo por unidad incrementado. El costo de manufactura por unidad y el costo de compra por unidad para los tres componentes son los siguientes:

Fuente	Componente 1	Componente 2	Componente 3
Manufactura	\$4.50	\$5.00	\$2.75
Compra	\$6.50	\$8.80	\$7.00

Los tiempos de manufactura en minutos por unidad para los tres departamentos de Benson son los siguientes:

Departamento	Componente 1	Componente 2	Componente 3
Producción	2	3	4
Ensamblaje	1	1.5	3
Prueba y empaque	1.5	2	5

Por ejemplo, cada unidad del componente 1 que Benson fabrica requiere 2 minutos de tiempo de producción, 1 minuto de tiempo de ensamblaje y 1.5 minutos de tiempo de prueba y empaque. Para el periodo de producción siguiente, Benson tiene capacidades de 360 horas en el departamento de producción, 250 horas en el departamento de ensamblaje y 300 horas en el departamento de prueba y empaque.

a. Formule un modelo de programación lineal que se utilice para determinar cuántas unidades de cada componente fabricar y cuántas comprar. Suponga que las demandas que se deben satisfacer son 6000 unidades del componente 1, 4000 del componente 2 y 3500 del componente 3. El objetivo es minimizar los costos totales de manufactura y adquisición.
b. ¿Cuál es la solución óptima? ¿Cuántas unidades de cada componente deben fabricarse y cuántas deben comprarse?
c. ¿Cuáles departamentos limitan las cantidades de manufactura de Benson? Utilice el precio dual para determinar el valor de una *hora extra* en cada uno de estos departamentos.
d. Suponga que Benson tuvo que obtener una unidad adicional del componente 2. Comente qué indica el precio dual para la restricción del componente 2 respecto al costo de obtener la unidad adicional.

27. Golf Shafts, Inc. (GSI) produce mangos de grafito para varios fabricantes de palos de golf. Dos instalaciones de manufactura de GSI, una localizada en San Diego y la otra en Tampa, tienen capacidad para producir mangos con varios grados de dureza, que varían desde modelos regulares usados por los golfistas promedio hasta modelos extra duros usados principalmente por golfistas de *hándicap* bajo y profesionales. GSI acaba de ganar un contrato para fabricar 200,000 mangos regulares y 75,000 mangos duros. Dado que en la actualidad ambas plantas producen mangos para pedidos anteriores, ninguna planta tiene capacidad suficiente para surtir el nuevo pedido. La planta de San Diego puede producir hasta un total de 120,000 mangos y la planta de Tampa hasta un total de 180,000 mangos. Debido a las diferencias en el equipo de cada una de las plantas y a los distintos costos de mano de obra, los costos de producción por unidad varían como se muestra aquí:

	Costo de San Diego	Costo de Tampa
Mango regular	\$5.25	\$4.95
Mango duro	\$5.45	\$5.70

a. Formule un modelo de programación lineal para determinar cómo debe programar GSI la producción del nuevo pedido, de modo que se minimice el costo total de producción.
b. Resuelva el modelo que elaboró en el inciso a.

c. Suponga que algunos de los pedidos anteriores de la planta de Tampa pueden reprogramarse para liberar capacidad adicional para el pedido nuevo. ¿Valdría la pena esta opción? Explique por qué.
d. Suponga que el costo de fabricar un mango en Tampa se había calculado incorrectamente y que el costo correcto es $5.30 por mango. ¿Qué efecto, si es que alguno, tendría el costo correcto en la solución óptima desarrollada en el inciso b? ¿Qué efecto tendría en el costo de producción total?

28. La empresa Pfeiffer administra aproximadamente $15 millones para sus clientes. Para cada cliente elige una mezcla de tres vehículos de inversión: un fondo de acciones de crecimiento, uno de ingresos y uno de mercado de dinero. Cada cliente tiene diferentes objetivos de inversión y distintas tolerancias al riesgo. Para reconciliar estas diferencias, Pfeiffer pone límites al porcentaje de cada portafolio que puede invertirse en los tres fondos y asigna un índice de riesgo al portafolio de cada cliente.

    Enseguida se muestra cómo funciona el sistema para Dennis Harlmann, uno de los clientes de Pfeiffer. Con base en una evaluación de la tolerancia al riesgo de Hartmann, la empresa ha asignado al portafolio de Hartmann un índice de riesgo de 0.05. Además, para mantener la diversidad, la fracción de dicho portafolio invertido en los fondos de crecimiento y de ingresos debe ser por lo menos 10% para cada uno, y como mínimo debe invertirse 20% en el fondo de mercado de dinero.

    Las calificaciones de riesgo para los fondos de crecimiento, de ingresos y de mercado de dinero son 0, 10, 0.05 y 0.01, respectivamente. El índice de riesgo del portafolio se calcula como un promedio ponderado de las calificaciones de riesgo para los tres fondos, donde los pesos son la fracción del portafolio invertido en cada uno de los fondos. Hartmann ha entregado a Pfeiffer $300,000 para que los administre. Actualmente Pfeiffer pronostica un rendimiento de 20% en el fondo de crecimiento, 10% en el de ingresos y 6% en el de mercado de dinero.

    a. Elabore un modelo de programación lineal para seleccionar la mejor mezcla de inversiones para el portafolio de Hartmann.
    b. Resuelva el modelo que elaboró en el inciso a.
    c. ¿Cuánto varían los rendimientos de los tres fondos antes de que sea necesario que Pfeiffer modifique el portafolio de Hartmann?
    d. Si Hartmann fuera más tolerante al riesgo, ¿qué incremento podría esperarse en el rendimiento? Por ejemplo, ¿qué pasaría si su índice de riesgo para el portafolio aumentara a 0.06?
    e. Si Pfeiffer disminuyera la estimación del rendimiento para el fondo de crecimiento a 0.10, ¿cómo recomendaría modificar el portafolio de Hartmann?
    f. ¿Qué información debe mantener Pfeiffer sobre cada cliente para utilizar este sistema con el propósito de administrar los portafolios de los clientes?
    g. Pfeiffer revisa semanalmente las estimaciones del rendimiento para los tres fondos. Suponga que la empresa tiene 50 clientes. Describa cómo imagina que Pfeiffer modifica el portafolio de cada cliente por semana y asigna los recursos totales administrados entre los tres fondos de inversión.

29. La Jolla Beverage Products considera producir una bebida refrescante de vino preparada con una mezcla de vino blanco, vino rosado y jugo de fruta. Para cumplir con las especificaciones de sabor, la bebida debe contener por lo menos 50% de vino blanco, por lo menos 20% y no más de 30% de vino rosado, y exactamente 20% de jugo de fruta. La Jolla compra el vino a vinaterías locales y el jugo de fruta a una planta de procesamiento en San Francisco. Para el periodo de producción actual, puede comprar 10 000 galones de vino blanco y 8 000 galones de vino rosado, y una cantidad ilimitada de jugo de fruta. El costo del vino es $1.00 por galón de vino blanco, $1.50 por galón de vino rosado, y $0.50 el galón de jugo de fruta. La Jolla Beverage Products puede vender toda la bebida refrescante que produzca a $2.50 por galón.

    a. En esta situación, ¿el costo del vino y del jugo de fruta es un costo hundido o un costo relevante? Explique por qué.
    b. Formule un programa lineal para determinar la mezcla de los tres ingredientes que maximizará la contribución total a las utilidades. Resuelva el programa lineal para

determinar el número de galones de cada ingrediente que La Jolla debe comprar y la contribución total a las utilidades que obtendrá con esta mezcla.

c. Si La Jolla pudiera obtener cantidades adicionales de vino blanco, ¿debería hacerlo? Si es así, ¿cuánto debe estar dispuesta a pagar por cada galón adicional y cuántos galones adicionales debería comprar?
d. Si La Jolla Beverage Products pudiera obtener cantidades adicionales de vino rosado, ¿debería hacerlo? Si es así, ¿cuánto debería estar dispuesta a pagar por cada galón adicional, y cuántos galones adicionales debería comprar?
e. Interprete el precio dual para la restricción correspondiente al requerimiento de que la bebida refrescante debe contener por lo menos 50% de vino blanco. ¿Qué aconseja a la gerencia dado este precio dual?
f. Interprete el precio dual para la restricción correspondiente al requerimiento de que la bebida refrescante debe contener exactamente 20% de jugo de fruta. ¿Qué aconseja a la gerencia dado este precio dual?

30. A la gerente de programación del Canal 10 le gustaría determinar la mejor manera de asignar el tiempo para la transmisión del noticiero nocturno de 11:00 a 11:30 P.M. En específico, le gustaría determinar el número de minutos de tiempo de transmisión que debe asignar a las noticias locales, las noticias nacionales, el clima y los deportes. De los 30 minutos que dura la transmisión, se reservan 10 minutos para publicidad. La política de transmisión de la estación establece que por lo menos 15% del tiempo disponible debe dedicarse a la cobertura de noticias locales; el tiempo dedicado a las noticias locales o nacionales debe ser por lo menos 50% del tiempo de transmisión total; el tiempo dedicado al segmento del clima debe ser menor o igual que el tiempo dedicado al segmento deportivo y no debe exceder el tiempo total invertido en las noticias locales y nacionales, y por lo menos 20% del tiempo debe dedicarse al segmento del clima. Los costos de producción por minuto son $300 para las noticias locales, $200 para las noticias nacionales, $100 para el clima y $100 para los deportes.
    a. Formule y resuelva un programa lineal que determine cómo deben emplearse los 20 minutos disponibles para minimizar el costo total de producción del programa.
    b. Interprete el precio dual para la restricción correspondiente al tiempo disponible. ¿Qué aconseja a la gerente de la estación dado este precio dual?
    c. Interprete el precio dual para la restricción correspondiente al requerimiento de que por lo menos 15% del tiempo disponible debe dedicarse a la cobertura local. ¿Qué aconseja a la gerente de la estación dado este precio dual?
    d. Interprete el precio dual para la restricción que corresponde al requerimiento de que el tiempo dedicado a las noticias locales y nacionales debe ser por lo menos 50% del tiempo total de transmisión. ¿Qué aconseja a la gerente de la estación dado este precio dual?
    e. Interprete el precio dual para la restricción correspondiente al requerimiento de que el tiempo dedicado al segmento del clima debe ser al menos menor o igual que el tiempo dedicado al segmento deportivo. ¿Qué aconseja a la gerente de la estación dado este precio dual?

31. Gulf Coast Electronics está preparada para conceder contratos para imprimir su informe anual. Durante los años anteriores, Johnson Printing y Lakeside Litho imprimieron el informe anual a cuatro tintas. Una nueva empresa, Benson Printing, preguntó por la posibilidad de hacer una parte de la impresión. La calidad y el servicio proporcionados por Lakeside Litho han sido sumamente satisfactorios; de hecho, sólo 0.5% de sus informes han tenido que rechazarse debido a problemas de calidad. Johnson Printing también ha tenido históricamente un alto nivel de calidad, produciendo un promedio de sólo 1% de informes no aceptables. Como Gulf Coast Electronics no ha tenido experiencia con Benson Printing, estiman que su tasa de defectos es de 10%. A Gulf Coast le gustaría determinar cuántos informes debe imprimir cada empresa para obtener 75,000 informes de calidad aceptable. Para asegurar que Benson Printing reciba parte del contrato, la gerencia especificó que el número de informes otorgados a Benson Printing debe ser como mínimo 10% del volumen dado a Johnson Printing. Además, el volumen total asignado a Benson Printing, Johnson Printing y Lakeside Litho no debe exceder de 30,000, 50,000 y 50,000

ejemplares, respectivamente. Debido a la relación a largo plazo con Lakeside Litho, la gerencia también debe especificar que por lo menos 30,000 informes deben concederse a Lakeside Litho. El costo por ejemplar es de \$2.45 para Benson Printing, \$2.50 para Johnson Printing y \$2.75 para Lakeside Litho.

a. Formule y resuelva un programa lineal para determinar cuántos ejemplares deben asignarse a cada imprenta con el fin de minimizar el costo total de obtener 75,000 informes de calidad aceptable.
b. Suponga que el nivel de calidad de Benson Printing es mucho mayor que el efecto estimado. ¿Qué efecto, si es que hay, tendría este nivel de calidad?
c. Imagine que la gerencia está dispuesta a reconsiderar su requerimiento de que se conceda a Lakeside Litho la impresión de por lo menos 30,000 ejemplares. ¿Qué efecto, si lo hay, tendría esta consideración?

32. PhotoTech, Inc., un fabricante de baterías recargables para cámaras digitales, firmó un contrato con una compañía de fotografía digital para producir tres paquetes de baterías de ión-litio diferentes para una nueva línea de cámaras digitales. El contrato exige lo siguiente:

Paquete de baterías	**Cantidad de producción**
PT-100	200,000
PT-200	100,000
PT-300	150,000

PhotoTech puede fabricar los paquetes de baterías en sus plantas de manufactura localizadas en Filipinas y México. El costo unitario de los paquetes de baterías difiere en las dos plantas debido a las diferencias en el equipo de producción y a las tasas salariales. Los costos unitarios para cada paquete de baterías son los siguientes:

	Planta	
Producto	**Filipinas**	**México**
PT-100	\$0.95	\$0.98
PT-200	\$0.98	\$1.06
PT-300	\$1.34	\$1.15

Los paquetes de baterías PT-100 y PT-200 se producen con equipo de producción parecido y disponible en ambas plantas. Sin embargo, cada planta tiene una capacidad limitada para el número total de paquetes de baterías PT-100 y PT-200 producidos. Las capacidades de producción de PT-100 y PT-200 combinadas son 175,000 unidades en la planta de Filipinas y 160,000 unidades en la de México. Las capacidades de producción del paquete PT-300 son 75,000 unidades en la planta de Filipinas y 100,000 unidades en la planta de México. El costo de envío desde la planta de Filipinas es \$0.18 por unidad y el de la planta de México \$0.10 por unidad.

a. Elabore un programa lineal que le permita a PhotoTech determinar cuántas unidades de cada paquete de batería producir en cada planta con el fin de minimizar los costos totales de producción y de envío asociados con el nuevo contrato.
b. Resuelva el programa lineal que elaboró en el inciso a para determinar el plan de producción óptimo.
c. Utilice el análisis de sensibilidad para determinar cuánto tendría que cambiar el costo de producción o el costo de envío por unidad para producir unidades adicionales de la PT-200 en la planta de Filipinas.
d. Utilice el análisis de sensibilidad para determinar cuánto tendría que cambiar el costo de producción o el de envío por unidad para producir unidades adicionales de la PT-100 en la planta de México.

CAPÍTULO 10

Modelos de distribución y de red

CONTENIDO

Los modelos estudiados en este capítulo pertenecen a una clase especial de problemas de programación lineal llamados problemas de *flujo de redes*. Se consideran cinco problemas diferentes:

- Problema de transporte
- Problema de asignación
- Problema de transbordo
- Problema de la ruta más corta
- Problema de flujo máximo

Se dedicó un capítulo aparte a estos problemas, debido a la semejanza en la estructura de los mismos y en el procedimiento de solución. En cada caso se incluye una representación gráfica del problema en forma de *red*. Luego mostramos cómo se formula y resuelve el problema como un programa lineal. En la última sección del capítulo se presenta un ejercicio de producción e inventario que es una aplicación interesante del problema de transbordo.

10.1 Problema de transporte

El **problema de transporte** surge con frecuencia en la planeación de la distribución de productos y servicios desde varios sitios de suministro hacia varios sitios de demanda. La cantidad de productos disponibles en cada locación de suministro (origen), por lo general, es limitada, y la cantidad de productos necesarios en cada una de varios sitios de demanda (destinos) es un dato conocido. El objetivo usual en un problema de transporte es minimizar el costo de enviar mercancía desde el origen a sus destinos.

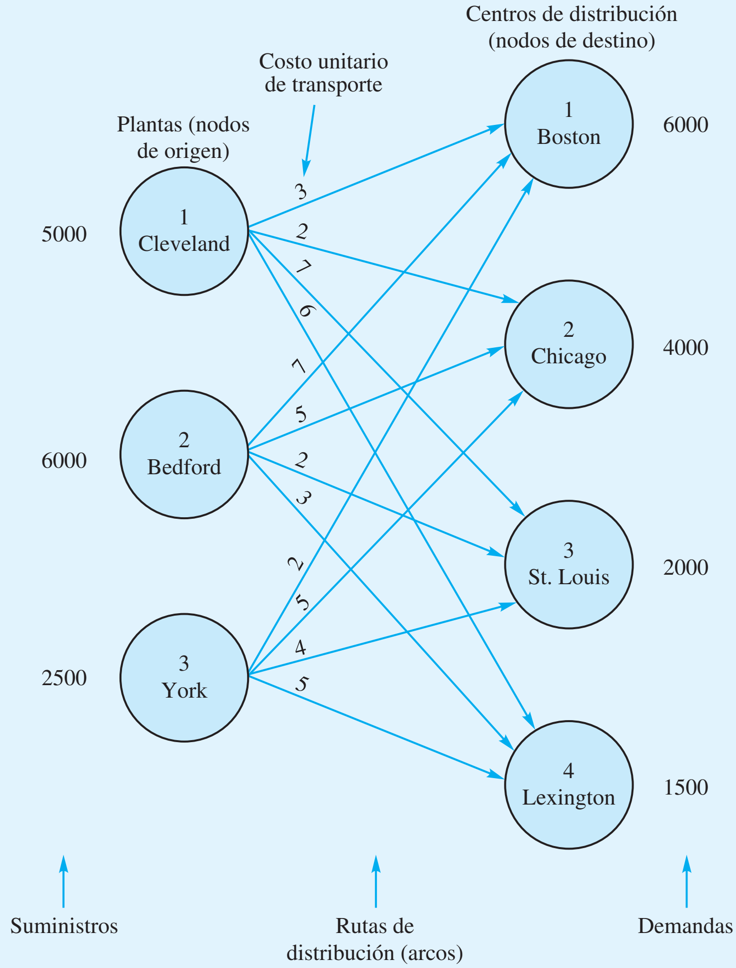
Ejemplifiquemos esto al considerar el problema de transporte que enfrenta Foster Generators. Este problema implica el transporte de un producto desde tres plantas a cuatro centros de distribución. Foster Generators opera plantas en Cleveland, Ohio; Bedford, Indiana, y York, Pennsylvania. Las capacidades de producción durante el próximo periodo de planeación de tres meses para un tipo particular de generador son las siguientes:

Origen	Planta	Capacidad de producción en tres meses (unidades)
1	Cleveland	5,000
2	Bedford	6,000
3	York	2,500
	Total	13,500

La empresa distribuye sus generadores a través de cuatro centros de distribución regionales localizados en Boston, Chicago, St. Louis y Lexington; el pronóstico de la demanda en los tres meses para los centros de distribución es el siguiente:

Destino	Centro de distribución	Pronóstico de la demanda para tres meses (unidades)
1	Boston	6,000
2	Chicago	4,000
3	St. Louis	2,000
4	Lexington	1,500
	Total	13,500

FIGURA 10.1 REPRESENTACIÓN DE RED DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE DE FOSTER GENERATORS



A la gerencia le gustaría determinar cuánto de su producción debe enviarse desde cada planta a cada centro de distribución. La figura 10.1 muestra las 12 rutas de distribución que Foster puede utilizar. Una gráfica como ésta se llama **red**; los círculos se conocen como **nodos** y las líneas que conectan los nodos son los **arcos**. Cada origen y destino se representan por medio de un nodo y cada ruta de envío posible se identifica mediante un arco. La cantidad del suministro se escribe al lado de cada nodo de origen y la cantidad de la demanda se escribe al lado de cada nodo de destino. Los productos embarcados desde los orígenes a los destinos representan el flujo en la red. Observe que la dirección del flujo (desde el origen al destino) se indica mediante flechas.

Resuelva el problema 1 para practicar la elaboración de un modelo de red para un problema de transporte.

Para el problema de transporte de Foster, el objetivo es determinar las rutas y la cantidad que se enviará por cada una de ellas para lograr que el costo total de transporte sea mínimo. El costo para cada unidad embarcada en cada ruta se proporciona en la tabla 10.1 y se muestra en cada arco de la figura 10.1.

TABLA 10.1 COSTO DE TRANSPORTE POR UNIDAD PARA EL PROBLEMA DE FOSTER GENERATORS

	Destino			
Origen	**Boston**	**Chicago**	**St. Louis**	**Lexington**
Cleveland	3	2	7	6
Bedford	7	5	2	3
York	2	5	4	5

El primer subíndice identifica al nodo "desde" del arco correspondiente, y el segundo subíndice identifica al nodo "hasta" del arco.

Para resolver este problema de transporte se puede utilizar un modelo de programación lineal. Utilizamos variables de decisión de doble subíndice, en las cuales x_{11} indica la cantidad de unidades enviadas desde el origen 1 (Cleveland) al destino 1 (Boston), x_{12} denota la cantidad de unidades enviadas desde el origen 1 (Cleveland) al destino 2 (Chicago), etc. En general, las variables de decisión para un problema de transporte que tiene m orígenes y n destinos se escriben como sigue:

$$x_{ij} = \text{cantidad de unidades enviadas desde el origen } i \text{ al destino } j$$
$$\text{donde } i = 1, 2, \ldots, m \text{ y } j = 1, 2, \ldots, n$$

Como el objetivo del problema de transporte es minimizar el costo de transporte total, podemos utilizar los datos de costos de la tabla 10.1 o los arcos de la figura 10.1 para desarrollar las siguientes expresiones de costo:

$$\begin{aligned}&\text{Costos de transporte para unidades}\\&\text{enviadas desde Cleveland} = 3x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{Costos de transporte para unidades}\\&\text{enviadas desde Bedford} = 7x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\text{Costos de transporte para unidades}\\&\text{enviadas desde York} = 2x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34}\end{aligned}$$

La suma de estas expresiones proporciona la función objetivo que muestra el costo de transporte total para Foster Generators.

Los problemas de transporte necesitan restricciones debido a que cada origen tiene un suministro limitado y cada destino tiene un requerimiento de demanda. Consideramos primero las restricciones de la oferta. La capacidad de la planta de Cleveland es 5000 unidades. Con la cantidad total de unidades enviadas desde la planta de Cleveland expresada como $x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$, la restricción del suministro para la planta de Cleveland es

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 5000 \text{ Suministro de Cleveland}$$

Con tres orígenes (plantas), el problema de transporte de Foster tiene tres restricciones de suministro. Dada la capacidad de 6000 unidades en la planta de Bedford y 2500 unidades en la planta de York, las dos restricciones de oferta adicionales son

$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 6000 \text{ Suministro de Bedford}$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 2500 \text{ Suministro de York}$$

Con los cuatro centros de distribución como los destinos, se necesitan cuatro restricciones de demanda para asegurar que las demandas del destino se satisfarán:

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 6000 \quad \text{Demanda de Boston}\\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 4000 \quad \text{Demanda de Chicago}\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 2000 \quad \text{Demanda de St. Louis}\\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 1500 \quad \text{Demanda de Lexington}
\end{aligned}
$$

Para obtener una solución factible, el suministro total debe ser mayor o igual que la demanda total.

Al combinar la función objetivo y las restricciones en un modelo se obtiene una formulación de programación lineal de 12 variables y 7 restricciones del problema de transporte de Foster Generators:

$$
\begin{aligned}
\text{Min} \quad & 3x_{11} + 2x_{12} + 7x_{13} + 6x_{14} + 7x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} + 3x_{24} + 2x_{31} + 5x_{32} + 4x_{33} + 5x_{34}\\
\text{s.a.} \quad & \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 5000\\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 6000\\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 2500\\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} \le 6000\\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} \le 4000\\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} \le 2000\\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} \le 1500\\
& x_{ij} \ge 0 \qquad \text{para } i = 1, 2, 3 \text{ y } j = 1, 2, 3, 4
\end{aligned}
$$

La comparación de esta formulación de programación lineal con la red de la figura 10.1 conduce a varias observaciones. Toda la información necesaria para la formulación de programación lineal está en la red. Cada nodo tiene una restricción y cada arco tiene una variable. La suma de las variables que corresponden a los arcos desde un nodo de origen debe ser menor o igual que el suministro del origen y la suma de las variables correspondientes a los arcos en un nodo de destino debe ser igual a la demanda del destino.

¿Puede utilizar ahora el software para resolver un modelo de programación lineal de un problema de transporte? Resuelva el problema 2.

Resolvimos el problema de Foster Generators con el módulo de programación lineal de The Management Scientist. La solución por computadora (figura 10.2) muestra que el costo de transporte total mínimo es \$39,500. Los valores para las variables de decisión muestran las cantidades a enviar por cada ruta. Por ejemplo, con $x_{11} = 3500$, deben enviarse 3500 unidades de Cleveland a Boston, y con $x_{11} = 1500$, deben enviarse 1500 unidades de Cleveland a Chicago. Otros valores de las variables de decisión indican las cantidades de envío y las rutas restantes. La tabla 10.2 muestra el programa de transporte de costo mínimo y la figura 10.3 resume la solución óptima en la red.

Variaciones del problema

El problema de Foster Generators ilustra el uso del modelo de transporte básico. La variación de este modelo puede consistir en una o más de las situaciones siguientes:

1. El suministro total no es igual a la demanda total
2. Función objetivo de maximización
3. Capacidades de ruta o mínimos de ruta
4. Rutas inaceptables

Podemos incluir fácilmente estas situaciones, con ligeras modificaciones, en el modelo de programación lineal.

FIGURA 10.2 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE TRANSPORTE DE FOSTER GENERATORS

```
Objective Function Value =          39500.000

    Variable               Value              Reduced Costs
 --------------      ---------------      -----------------
      X11                 3500.000                  0.000
      X12                 1500.000                  0.000
      X13                    0.000                  8.000
      X14                    0.000                  6.000
      X21                    0.000                  1.000
      X22                 2500.000                  0.000
      X23                 2000.000                  0.000
      X24                 1500.000                  0.000
      X31                 2500.000                  0.000
      X32                    0.000                  4.000
      X33                    0.000                  6.000
      X34                    0.000                  6.000
```

WEB archivo

Foster

TABLA 10.2 SOLUCIÓN ÓPTIMA PARA EL PROBLEMA DE TRANSPORTE DE FOSTER GENERATORS

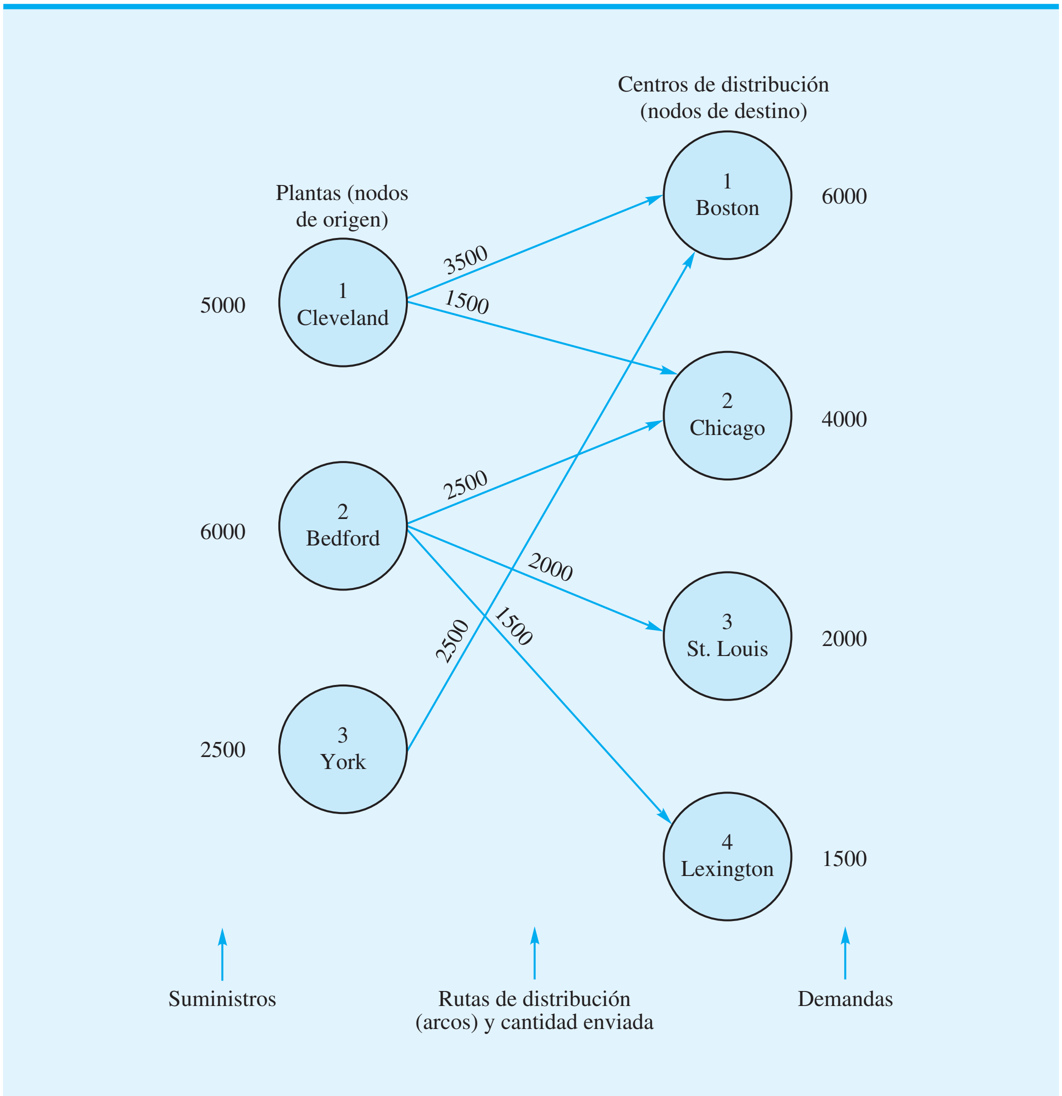
Ruta				
Desde	**Hasta**	**Unidades enviadas**	**Costo por unidad**	**Costo total**
Cleveland	Boston	3500	$3	$10,500
Cleveland	Chicago	1500	$2	3,000
Bedford	Chicago	2500	$5	12,500
Bedford	St. Louis	2000	$2	4,000
Bedford	Lexington	1500	$3	4,500
York	Boston	2500	$2	5,000
				$39,500

El suministro total no es igual a la demanda total Con frecuencia *el suministro total no es igual a la demanda total.* Si el suministro total excede a la demanda total, no es necesaria ninguna modificación en la formulación de programación lineal. El exceso de suministro aparecerá como una holgura en la solución de la programación lineal. La holgura para cualquier origen particular puede interpretarse como la oferta sin usar o la cantidad no enviada desde el origen.

Cuando el suministro total es menor que la demanda total, el modelo no determina cómo se maneja la demanda insatisfecha (p. ej., los pedidos pendientes). El gerente debe manejar este aspecto del problema.

Si el suministro total es menor que la demanda total, el modelo de programación lineal de un problema de transporte no tendrá una solución factible. En este caso, modificamos la representación de red al añadir un **origen ficticio** con un suministro igual a la diferencia entre la demanda total y el suministro total. Con la adición del origen ficticio y un arco desde el origen ficticio a cada destino, el modelo de programación lineal tendrá una solución factible. A cada arco que sale del origen ficticio se asigna un costo unitario de cero, de modo que el valor de la solución óptima para el problema modificado representará el costo de envío de las unidades que en realidad se enviaron (no se harán envíos reales desde el origen ficticio). Cuando se implementa la solución óptima, los destinos que muestran

FIGURA 10.3 SOLUCIÓN ÓPTIMA AL PROBLEMA DE TRANSPORTE DE FOSTER GENERATORS



envíos recibidos desde el origen ficticio serán los destinos que experimentarán un déficit en la demanda insatisfecha.

Resuelva el problema 6 para practicar con un caso en que la demanda es mayor que el suministro con un objetivo de maximización.

Función objetivo de maximización En algunos problemas de transporte, el objetivo es encontrar una solución que maximice las utilidades o los ingresos. Usando los valores para las utilidades o ingresos por unidad como coeficientes de la función objetivo, resolvemos sencillamente un programa lineal de maximización en vez de minimización. Este cambio no afecta a las restricciones.

Capacidades de ruta o mínimos de ruta La formulación de programación lineal del problema de transporte también puede aceptar capacidades o cantidades mínimas para una o más de las rutas. Por ejemplo, suponga que en el problema de Foster Generators la ruta de York-Boston (origen 3 a destino 1) tenía una capacidad de 1000 unidades debido a la disponibilidad de espacio limitada en su modo de transporte normal. Si x_{31} denota la cantidad enviada desde York a Boston, la restricción de la capacidad de ruta para York-Boston sería

$$x_{31} \leq 1000$$

Los mínimos de ruta se especifican de la misma manera. Por ejemplo,

$$x_{22} \leq 2000$$

garantizaría que un pedido asignado previamente para una entrega de Bedford a Chicago de mínimo 2000 unidades se mantendría en la solución óptima.

Rutas inaceptables Por último, establecer una ruta desde todos los orígenes a todos los destinos tal vez no sea posible. Para manejar esta situación, sencillamente se omite el arco correspondiente de la red y se elimina la variable que corresponde a la formulación de programación lineal. Por ejemplo, si la ruta Cleveland-St. Louis fuera inaceptable o inutilizable, el arco de Cleveland a St. Louis se omitiría en la figura 10.1 y x_{13} podría eliminarse de la formulación de programación lineal. Al resolver el modelo resultante de 11 variables y 7 restricciones, proporcionaríamos la solución óptima y al mismo tiempo garantizaríamos que no se utilice la ruta de Cleveland-St. Louis.

Un modelo general de programación lineal

Para mostrar el modelo general de programación lineal para un problema de transporte con m orígenes y n destinos, utilizamos la notación:

$$\begin{aligned}
x_{ij} &= \text{cantidad de unidades enviadas desde el origen } i \text{ al destino } j \\
c_{ij} &= \text{costo unitario de envío desde el origen } i \text{ al destino } j \\
s_i &= \text{suministro o capacidad en unidades en el origen } i \\
d_j &= \text{demanda en unidades en el destino } j
\end{aligned}$$

El modelo de programación lineal general es el siguiente:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

s.a.

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} x_{ij} &\leq s_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{Oferta} \\
\sum_{i=1}^{m} x_{ij} &= d_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{Demanda} \\
x_{ij} &\geq 0 \qquad \text{para toda } i \text{ y } j
\end{aligned}$$

Como se mencionó, podemos añadir restricciones de la forma $x_{ij} \leq L_{ij}$ si la ruta desde el origen i al destino j tiene capacidad L_{ij}. Un problema de transporte que incluye restricciones de este tipo se llama **problema de transporte con capacidades**. Asimismo, podemos añadir restricciones de los mínimos de ruta de la forma $x_{ij} \geq M_{ij}$, si la ruta desde el origen i al destino j debe manejar por lo menos M_{ij} unidades.

NOTAS Y COMENTARIOS

1. Los problemas de transporte encontrados en la práctica por lo general conducen a programas lineales grandes; no son inusuales problemas de transporte con 100 orígenes y 100 destinos. Un problema de este tipo involucraría (100)(100) = 10,000 variables.
2. Para manejar una situación en la cual algunas rutas pueden ser inaceptables, afirmamos que se podría omitir el arco correspondiente de la red y eliminar la variable correspondiente de la formulación de programación lineal. Otro enfoque de uso frecuente es asignar un coeficiente de costo de la función objetivo sumamente grande a cualquier arco inaceptable. Si el problema ya se ha formulado, otra opción es añadir una restricción a la formulación que establezca la variable a eliminar en cero.
3. La solución óptima para un modelo de transporte consistirá en valores enteros para las variables, siempre y cuando todos los valores de suministro y oferta sean enteros. La razón es la estructura matemática particular del modelo de programación lineal. Cada variable aparece exactamente en una restricción de suministro y en una restricción de demanda, y los coeficientes en las ecuaciones de restricción son 1 o 0.
4. Aunque muchos problemas de transporte involucran la maximización del costo de transporte entre sitios, existen muchas otras aplicaciones del modelo de transporte. El artículo de MC en Acción, “Movilización en la Infantería de Marina de Estados Unidos”, ilustra el uso de un modelo de transporte para enviar a los oficiales de la infantería de Marina a sus posiciones en campamento.

MC en ACCIÓN

*MOVILIZACIÓN EN LA INFANTERÍA DE MARINA DE ESTADOS UNIDOS**

La infantería de Marina de Estados Unidos elaboró un modelo de red para movilizar a sus oficiales en caso de una crisis mundial o una guerra. El problema es enviar a los oficiales a sus posiciones en campamento (asignaciones de guardia) lo más rápido posible. El modelo elaborado para resolver este problema es un modelo de transporte muy parecido a los que se estudian en esta sección, sólo que mucho más grande. Los nodos de origen o suministro representan a los oficiales disponibles, y los nodos de destino o demanda representan los campamentos. Una situación realista podría involucrar hasta 40,000 oficiales y 25,000 posiciones en campamento. Si se permiten todas las combinaciones de arco de oficial a posiciones encampamento, el problema de transporte tendría 1000 millones de arcos. Para reducir el tamaño del problema, los oficiales con calificaciones parecidas se ubican en el mismo nodo de suministro, y las asignaciones de guardia similares se ubican en los mismos nodos de demanda. Utilizando este enfoque y los métodos para la eliminación de arcos no factibles, la infantería de Marina ha resuelto problemas que involucran a 27,000 oficiales y 10,000 posiciones en campamento en 10 segundos en una computadora personal.

Se han obtenido excelentes resultados en el envío de oficiales con el grado y las calificaciones laborales apropiadas a las posiciones en campamento. En una crisis, la disponibilidad y el uso de este sistema pueden hacer la diferencia entre una respuesta apropiada y un desastre. El sistema anterior requería de dos a cuatro días para producir un plan de movilización completo y proporcionó una correspondencia de calidad menor entre las calificaciones de los oficiales y las necesidades de campamento. La infantería de Marina ahora utiliza el modelo de movilización para mejorar su capacidad en épocas de paz.

*Basado en D. O. Bausch, G. G. Brown, D. R. Hundley, S. H. Rapp y R. E. Rosenthal, “Mobilizing Marine Corps Officers”, *Interfaces* (julio/agosto de 1991): 26-38.

10.2 Problema de asignación

El **problema de asignación** surge en una variedad de situaciones de toma de decisiones; los problemas de asignación típicos implican la asignación de puestos a máquinas, de agentes a tareas, de personal de ventas a territorios de ventas, de contratos a contratistas, etc. Una característica distintiva del problema de asignación es que *un* agente se asigna a *una y*

TABLA 10.3 TIEMPOS ESTIMADOS DE TERMINACIÓN DEL PROYECTO (DÍAS) PARA EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE FOWLE MARKETING RESEARCH

	Cliente		
Líder de proyecto	**1**	**2**	**3**
1. Terry	10	15	9
2. Carle	9	18	5
3. McClymonds	6	14	3

sólo una tarea. En específico buscamos el conjunto de asignaciones que optimicen el objetivo establecido, tal como minimizar el costo, el tiempo o maximizar las utilidades.

Para ilustrar el problema de asignación, considere el caso de Fowle Marketing Research, que acaba de recibir solicitudes para estudios de investigación de mercados de tres clientes nuevos. La empresa se enfrenta a la tarea de asignar un líder de proyecto (agente) a cada cliente (tarea). En la actualidad, tres personas no tienen otros compromisos y están disponibles para las asignaciones de líder de proyecto, pero la gerencia de Fowle se da cuenta de que el tiempo requerido para completar cada estudio dependerá de la experiencia y capacidad del líder de proyecto asignado. Los tres proyectos tienen aproximadamente la misma prioridad y la gerencia quiere asignar los líderes de proyecto de tal manera que se minimice el número total de días requerido para completar los tres proyectos. Si sólo se asignará un líder de proyecto a un cliente, ¿qué asignaciones deben hacerse?

Para responder la pregunta de asignación, la gerencia de Fowle debe considerar primero todas las asignaciones de líder-cliente al proyecto y luego estimar los tiempos de terminación del proyecto correspondientes. Con tres líderes de proyecto y tres clientes, son posibles nueve alternativas de asignación. Las alternativas y los tiempos de terminación del proyecto estimados en días se resumen en la tabla 10.3.

La figura 10.4 muestra la representación de red del problema de asignación de Fowle. Los nodos corresponden a los líderes de proyecto y clientes, y los arcos representan las asignaciones posibles de los líderes de proyecto a los clientes. El suministro en cada nodo de origen y la demanda en cada nodo de destino son 1; el costo de asignar un líder de proyecto a un cliente es el tiempo que tarda ese líder de proyecto en terminar la tarea del cliente. Observe la semejanza entre los modelos de red del problema de asignación (figura 10.4) y el problema de transporte (figura 10.1). El de asignación es un caso especial del problema de transporte en el cual todos los valores del suministro y la demanda son iguales a 1, y la cantidad enviada en cada arco es ya sea 1 o 0.

Resuelva el problema 9a, para practicar el desarrollo de un modelo de red para un problema de asignación.

El problema de asignación es un caso especial de problema de transporte.

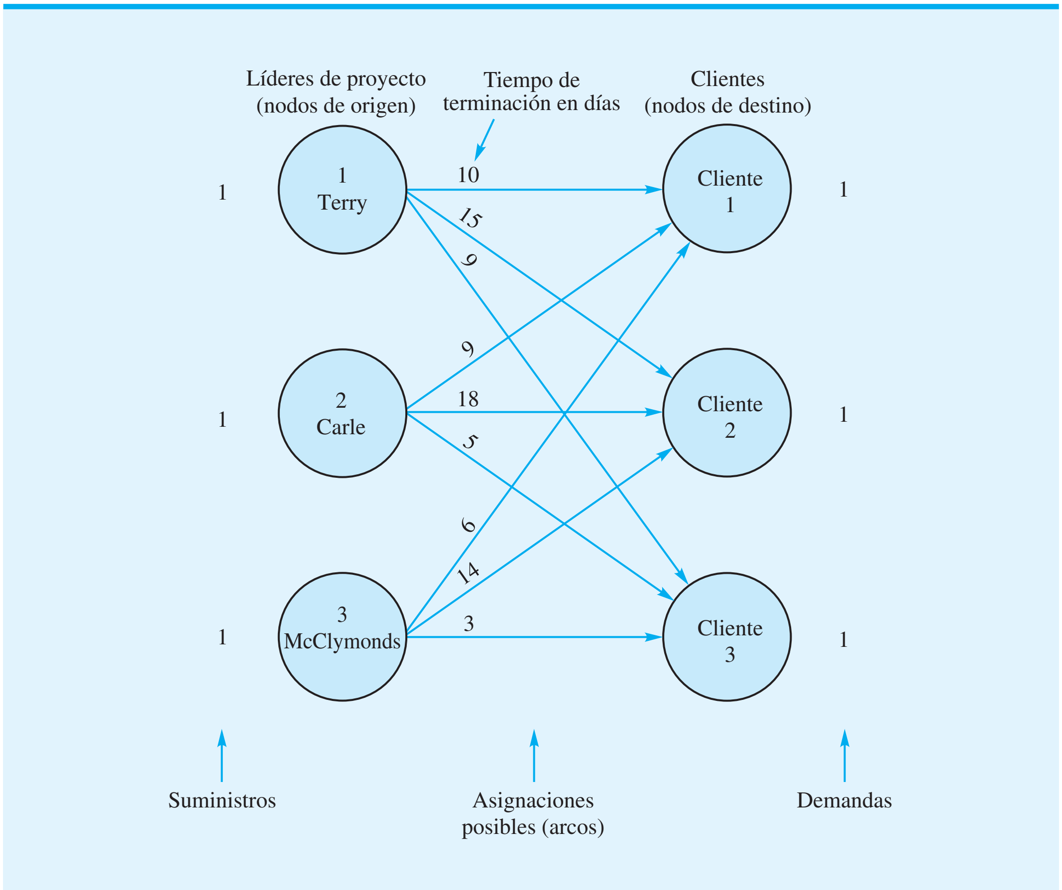
Dado que el problema de asignación es un caso especial del problema de transporte, se puede elaborar una formulación de programación lineal. De nuevo necesitamos una restricción para cada nodo y una variable para cada arco. Como en el problema de transporte, utilizamos variables de decisión con doble subíndice, en las cuales x_{11} denota la asignación del líder de proyecto 1 (Terry) al cliente 1, x_{12} denota la asignación del líder de proyecto 1 (Terry) al cliente 2, etc. Por tanto, definimos las variables de decisión para el problema de asignación de Fowle como

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el líder de proyecto } i \text{ se asigna al cliente } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$
$$\text{donde } i = 1, 2, 3 \quad \text{y} \quad j = 1, 2, 3$$

Utilizando esta notación y los datos del tiempo de terminación de la tabla 10.3, desarrollamos expresiones que indican el tiempo de terminación de los proyectos:

$$\begin{aligned} \text{Días requeridos para la asignación de Terry} &= 10x_{11} + 5x_{12} + 9x_{13} \\ \text{Días requeridos para la asignación de Carle} &= 9x_{21} + 18x_{22} + 5x_{23} \\ \text{Días requeridos para la asignación de McClymonds} &= 6x_{31} + 14x_{32} + 3x_{33} \end{aligned}$$

FIGURA 10.4 MODELO DE RED DEL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE FOWLE MARKETING RESEARCH



La suma de los tiempos de terminación para los tres líderes de proyecto proporciona los días totales requeridos para completar las tres asignaciones. Por tanto, la función objetivo es

$$\text{Min } 10x_{11} + 15x_{12} + 9x_{13} + 9x_{21} + 18x_{22} + 5x_{23} + 6x_{31} + 14x_{32} + 3x_{33}$$

Como el número de líderes de proyecto es igual al número de clientes, todas las restricciones podrían escribirse como igualdades. Pero cuando el número de líderes de proyecto excede el número de clientes, deben utilizarse restricciones de menor o igual que para las restricciones del líder de proyecto.

Las restricciones para el problema de asignación reflejan las condiciones de que cada líder puede asignarse por lo menos a un cliente y que cada cliente debe tener un líder de proyecto asignado. Estas restricciones se escriben como sigue:

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 1 \quad \text{Asignación de Terry} \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 1 \quad \text{Asignación de Carle} \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 1 \quad \text{Asignación de McClymonds} \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 1 \quad \text{Cliente 1} \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 1 \quad \text{Cliente 2} \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 1 \quad \text{Cliente 3}
\end{aligned}
$$

Observe que cada nodo de la figura 10.4 tiene una restricción.

La combinación de la función objetivo y las restricciones en un modelo proporciona el siguiente modelo de programación lineal de 9 variables y 6 restricciones para el problema de asignación de Fowle Marketing Research:

Resuelva el inciso b) del problema 9 para practicar la formulación y solución de un modelo de programación lineal para un problema de asignación en la computadora.

$$\text{Min } 10x_{11} + 15x_{12} + 9x_{13} + 9x_{21} + 18x_{22} + 5x_{23} + 6x_{31} + 14x_{32} + 3x_{33}$$

s.a.

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &\leq 1\\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &\leq 1\\
x_{31} + x_{32} + x_{33} &\leq 1\\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 1\\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 1\\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 1
\end{aligned}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{para } i = 1, 2, 3 \text{ y } j = 1, 2, 3$$

La figura 10.5 muestra la solución por computadora para este modelo. Terry se asigna al cliente 2 ($x_{12} = 1$), Carle se asigna al cliente 3 ($x_{23} = 1$) y McClymonds se asigna al cliente 1 ($x_{31} = 1$). El tiempo de terminación total requerido son 26 días. Esta solución se resume en la tabla 10.4.

FIGURA 10.5 SOLUCIÓN DE THE MANAGEMENT SCIENTIST PARA EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE FOWLE MARKETING RESEARCH

WEB archivo
Fowle

```
Objective Function Value =          26.000

   Variable             Value            Reduced Costs
 --------------    ---------------    -----------------
      X11                 0.000                0.000
      X12                 1.000                0.000
      X13                 0.000                3.000
      X21                 0.000                0.000
      X22                 0.000                4.000
      X23                 1.000                0.000
      X31                 1.000                0.000
      X32                 0.000                3.000
      X33                 0.000                1.000
```

TABLA 10.4 ASIGNACIONES ÓPTIMAS DE LÍDER DE PROYECTO PARA EL PROBLEMA DE ASIGNACIÓN DE FOWLE MARKETING RESEARCH

Líder de proyecto	Cliente asignado		Días
Terry	2		15
Carle	3		5
McClymonds	1		6
		Total	26

Variaciones del problema

Debido a que el problema de asignación puede considerarse un caso especial del problema de transporte, las variaciones del problema que pueden surgir en uno de asignación se equiparan a aquellas del problema de transporte. En específico, podemos manejar

1. El número total de agentes (suministro) que no es igual al número de tareas (demanda)
2. Función objetivo de maximización
3. Asignaciones inaceptables

La situación en la cual el número de agentes no es igual al número de tareas es análoga al suministro total que no es igual a la demanda total en un problema de transporte. Si el número de agentes excede el número de tareas, los agentes extra sencillamente permanecen sin asignarse en la solución de programación lineal. Si el número de tareas supera al número de agentes, el modelo de programación lineal no tendrá una solución factible. En esta situación, una modificación simple es añadir suficientes agentes ficticios para igualar el número de agentes y el número de tareas. Por ejemplo, en el problema de Fowle podríamos haber tenido cinco clientes (tareas) y sólo tres líderes de proyecto (agentes). Al añadir dos líderes de proyecto ficticios, podemos crear un nuevo problema de asignación con el número de líderes de proyecto igual al número de clientes. Los coeficientes de la función objetivo para la asignación de los líderes de proyecto ficticios sería cero, de modo que el valor de la solución óptima representaría el número total de días requeridos por las asignaciones hechas en realidad (no se hacen asignaciones reales a los clientes que reciben líderes de proyecto ficticios).

Si las alternativas de asignación se evalúan en términos de ingresos o utilidades en vez del tiempo o costo, la formulación de programación lineal puede resolverse como un problema de maximización en vez de uno de minimización. Además, si una o más asignaciones son inaceptables, la variable de decisión correspondiente puede eliminarse de la formulación de programación lineal. Esta situación podría ocurrir, por ejemplo, si un agente no tuviera la experiencia necesaria para una o más tareas.

Un modelo general de programación lineal

Para mostrar el modelo general de programación lineal para un problema de asignación con m agentes y n tareas se utiliza la notación:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el agente } i \text{ se asigna a la tarea } j \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$c_{ij} = \text{el costo de asignar el agente } i \text{ a la tarea } j$$

El modelo de programación lineal general es el siguiente:

$$\text{Min} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

s.a.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq 1 \qquad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{Agentes}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n \quad \text{Tareas}$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad \text{para toda } i \text{ y } j$$

Al principio de esta sección, indicamos que una función distintiva del problema de asignación es que *un* agente se asigna a *una y sólo una tarea*. En las generalizaciones del problema de asignación donde un agente puede asignarse a dos o más tareas, la formulación de programación lineal del problema se puede modificar fácilmente. Por ejemplo, suponga que en el problema de Fowle Marketing Research Terry pudiera asignarse hasta a dos clientes; en este caso, la restricción que representa la asignación de Terry sería $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 2$. En general, si a_i denota el límite superior para el número de tareas al cual el agente i puede asignarse, escribimos las restricciones del agente

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

Si algunas tareas requieren más de un agente, la formulación de programación lineal también puede reflejar esta situación. Utilice el número de agentes requerido como el lado derecho de la restricción de tarea apropiada.

NOTAS Y COMENTARIOS

1. Como se señaló antes, el modelo de asignación es un caso especial del modelo de transporte). En las notas y comentarios al final de la sección anterior mencionamos que la solución óptima al problema de transporte consiste en valores enteros para las variables de decisión, siempre y cuando los suministros y las demandas sean enteros. Para el problema de asignación, todos los suministros y demandas son iguales a 1; por tanto, la solución óptima debe tener valores enteros y éstos deben ser 0 o 1.
2. Combinar el método para manejar asignaciones múltiples con la noción de un agente ficticio constituye otra manera de manejar situaciones donde el número de tareas excede al número de agentes. Es decir, añadimos un agente ficticio, pero le proporcionamos al agente la capacidad de manejar múltiples tareas. El número de tareas que puede manejar el agente ficticio es igual a la diferencia entre el número de tareas y el número de agentes.
3. El artículo de MC en Acción, “Asignación de gerentes de proyecto en Heery International”, describe cómo se asignan los gerentes a los proyectos de construcción. La aplicación involucra asignaciones múltiples.

MC *en* ACCIÓN

*ASIGNACIÓN DE GERENTES DE PROYECTO EN HEERY INTERNATIONAL**

Heery International tiene contratos con el estado de Tennessee y otras entidades para una variedad de proyectos de construcción que incluyen edificios de educación superior, hoteles e instalaciones de parques. En cualquier momento, Heery por lo general tiene más de 100 proyectos en curso. Cada uno de estos proyectos debe asignarse a un solo gerente; como hay siete gerentes disponibles, más de 700 = 7(100) asignaciones son posibles. Ayudado por un consultor externo, Heery International elaboró un modelo matemático para asignar gerentes a los proyectos de construcción.

El problema de asignación elaborado por Heery utiliza variables de decisión 0-1 para cada par gerente/proyecto, precisamente como en el problema de asignación estudiado antes. La meta en la asignación de gerentes es equilibrar la carga de trabajo entre ellos y, al mismo tiempo, minimizar el costo de traslado desde la casa del gerente al sitio de construcción. Por tanto, se desarrolló un coeficiente de la función objetivo para cada asignación posible que combina la intensidad del proyecto

*Basado en Larry J. LeBlanc, Dale Randels y T. K, Swann, “Heery International's Spreadsheet Optimization Model for Assigning Managers to Construction Projects”, Interfaces (noviembre/diciembre 2000): 95-106.

(*continúa*)

Resumen

En este capítulo se presentan los problemas de transporte, asignación, transbordo, la ruta más corta y flujo máximo. Los cinco tipos de problemas pertenecen a una categoría especial de programas lineales llamados *problemas de flujo de red*. En general, el modelo de red para estos problemas se compone de nodos que representan los orígenes, destinos y, si es necesario, los puntos de transbordo en el sistema de red. Los arcos se utilizan para representar las rutas para el envío, traslado o flujo entre los diversos nodos.

El problema de transporte general tiene *m* orígenes y *n* destinos. Dado el suministro en cada origen, la demanda en cada destino y el costo unitario de envío entre cada origen y cada destino, el modelo de transporte determina las cantidades óptimas a enviar entre cada origen y cada destino.

El problema de asignación es un caso especial del problema de transporte en el cual los valores del suministro y la demanda son 1. Representamos a cada agente como un nodo de origen y cada tarea como un nodo de destino. El modelo de asignación determina la asignación de agentes a las tareas con un costo mínimo o utilidades mínimas.

El problema de transbordo es una extensión del problema de transporte que involucra puntos de transferencia conocidos como nodos de transbordo. En este modelo más general, se permiten arcos entre cualquier par de nodos de la red. Si se desea, las capacidades pueden especificarse como arcos, lo cual lo convierte en un problema de transbordo con capacidades.

El problema de la ruta más corta encuentra la ruta o trayectoria más corta entre dos nodos de una red. La distancia, el tiempo y el costo a menudo son los criterios empleados en este modelo. El problema de la ruta más corta puede expresarse como un problema de transbordo con un origen y un destino. Al enviar una unidad del origen al destino, la solución determinará la ruta más corta a seguir por la red.

El problema de flujo máximo se utiliza para asignar el flujo a los arcos de la red, de modo que se maximice el flujo que pasa por el sistema de red. Las capacidades de los arcos determinan la cantidad máxima de flujo que pasa por cada arco. Con estas restricciones de capacidad, el problema de flujo máximo se expresa como un problema de transbordo con capacidades.

En la última sección del capítulo, mostramos cómo se utiliza una variación del problema de transbordo para resolver un problema de producción e inventario. En el apéndice del capítulo se muestra cómo se usa Excel para resolver tres de los problemas de distribución y de red presentados en el capítulo.

Glosario

Problema de transporte Problema de flujo de red que con frecuencia involucra la minimización del costo del envío de productos desde un conjunto de orígenes a un conjunto de destinos; puede formularse y resolverse como un programa lineal al incluir una variable para cada arco y una restricción para cada nodo.

Red Representación gráfica de un problema que consiste en círculos numerados (nodos) interconectados por una serie de líneas (arcos); las puntas de flecha sobre los arcos indican la dirección del flujo. Los problemas de transporte, asignación y transbordo son problemas de flujo de red.

Nodos Puntos de intersección o unión de una red.

Arcos Líneas que conectan los nodos en una red.

Origen ficticio Origen añadido a un problema de transporte para igualar el suministro total a la demanda total. El suministro asignado al origen ficticio es la diferencia entre la demanda total y el suministro total.

Problema de transporte con capacidades Variación del problema de transporte básico en el cual algunos o todos los arcos están sujetos a restricciones de capacidad.

Problema de asignación Problema de flujo de red que con frecuencia consiste en la asignación de agentes a tareas; puede formularse como un programa lineal y es un caso especial del problema de transporte.

Problema de transbordo Extensión del problema de transporte para los problemas de distribución que involucran puntos de transferencia y envíos posibles entre cualquier par de nodos.

Problema de transbordo con capacidades Variación del problema de transbordo en el cual algunos de los arcos están sujetos a restricciones de capacidad.

Ruta más corta Trayectoria más corta entre dos nodos de una red.

Flujo máximo Cantidad máxima de flujo que puede entrar y salir de un sistema de red durante un periodo dado.

Capacidad de flujo Flujo máximo para un arco de red. La capacidad de flujo en una dirección puede no ser igual a la capacidad de flujo en la dirección opuesta.

Problemas

AUTO evaluación

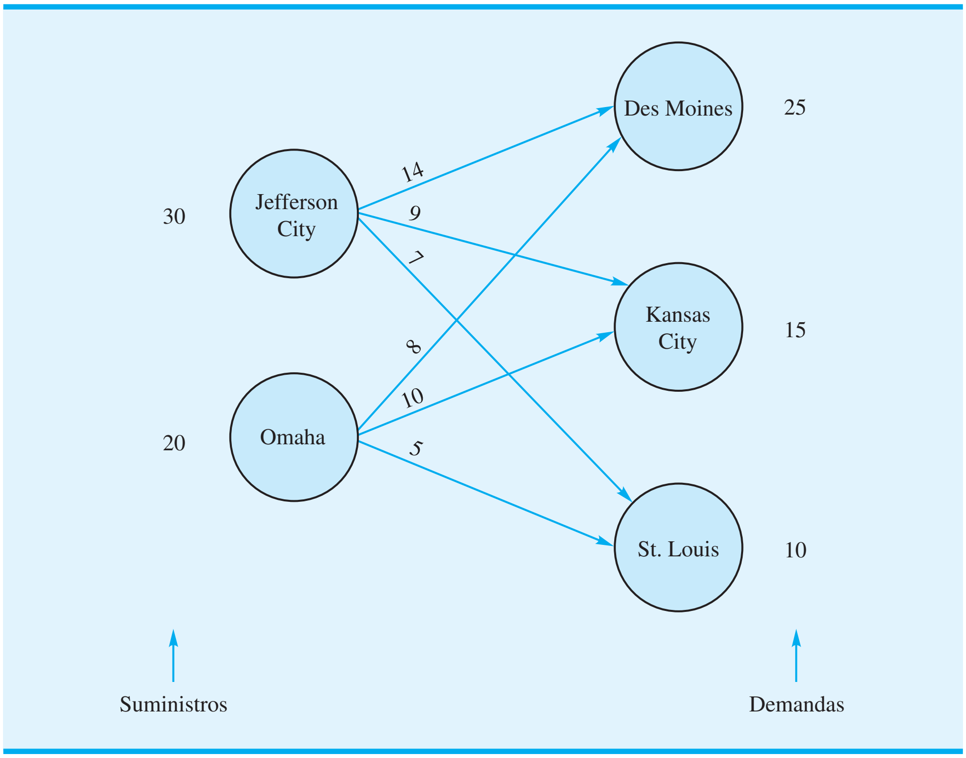
1. Una empresa importa productos en dos puertos: Filadelfia y Nueva Orleans. Los embarques de uno de los productos se hacen a clientes de Atlanta, Dallas, Columbus y Boston. Para el periodo de planeación siguiente, los suministros en cada puerto, las demandas de los clientes y los costos de envío por caja desde cada puerto, a cada cliente, son los siguientes:

	Clientes				
Puerto	**Atlanta**	**Dallas**	**Columbus**	**Boston**	**Suministro en el puerto**
Filadelfia	2	6	6	2	5000
Nueva Orleans	1	2	5	7	3000
Demanda	1400	3200	2000	1400	

Desarrolle una representación de red del sistema de distribución (problema de transporte).

AUTO evaluación

2. Considere la siguiente representación de red de un problema de transporte:



Los suministros, las demandas y los costos de transporte por unidad se muestran en la red.

a. Elabore un modelo de programación lineal para este problema; asegúrese de definir las variables de su modelo.
b. Resuelva el programa lineal para determinar la solución óptima.

3. Tri-County Utilities, Inc. abastece de gas natural a sus clientes en un área que abarca tres condados en Estados Unidos. La empresa compra el combustible a dos empresas: Southern Gas y Northwest Gas.

Los pronósticos de la demanda para la próxima temporada de invierno son el condado de Hamilton, 400 unidades; el condado de Butler, 200 unidades, y el condado de Clermont, 300 unidades. Se firmaron contratos con dos clientes para proporcionar las cantidades siguientes: Southern Gas, 500 unidades, y Northwest Gas, 400 unidades. Los costos de distribución varían por condado, dependiendo de la localización de los proveedores. Los costos de distribución por unidad (en miles de dólares) son los siguientes:

		Hacia	
Desde	**Hamilton**	**Butler**	**Clermont**
Southern Gas	10	20	15
Northwest Gas	12	15	18

a. Elabore una representación de red para este problema.
b. Elabore un modelo de programación lineal que sirva para determinar el plan que minimizará los costos totales de distribución.
c. Describa el plan de distribución e indique el costo total de distribución.

d. El reciente crecimiento residencial e industrial en el condado de Butler tiene el potencial para incrementar la demanda hasta 100 unidades. ¿Cuál proveedor debe contratar Tri-County para suministrar la capacidad adicional?

4. Arnoff Enterprises fabrica la unidad central de procesamiento (CPU) de una computadora personal. Las CPU se fabrican en Seattle, Columbus y Nueva York y se envían a almacenes en Pittsburgh, Mobile, Denver, Los Ángeles y Washington, D.C. para su distribución posterior. La tabla siguiente muestra la cantidad de CPU disponibles en cada planta, la cantidad requerida por cada almacén y los costos de envío (dólares por unidad):

	Almacén					
Planta	**Pittsburgh**	**Mobile**	**Denver**	**Los Ángeles**	**Washington**	**CPU disponibles**
Seattle	10	20	5	9	10	9000
Columbus	2	10	8	30	6	4000
Nueva York	1	20	7	10	4	8000
CPU requeridas	3000	5000	4000	6000	3000	21,000

a. Elabore una representación de red para este problema.
b. Determine la cantidad que debe enviarse desde cada planta a cada almacén para minimizar el costo total de envío.
c. El almacén de Pittsburgh acaba de incrementar su pedido en 1000 unidades y Arnoff autorizó a su planta de Columbus aumentar su producción en la misma cantidad. ¿Este aumento en la producción conducirá a un incremento o a una disminución en los costos totales de envío? Calcule la nueva solución óptima.

5. Dos consultores, Avery y Baker, de Premier Consulting, pueden programarse para trabajar para los clientes hasta un máximo de 160 horas cada uno durante las cuatro semanas siguientes. Un tercer consultor, Campbell, tiene algunas asignaciones administrativas ya planeadas y está disponible para los clientes hasta un máximo de 140 horas durante las cuatro semanas siguientes. La empresa tiene cuatro clientes con proyectos en proceso. Los requerimientos por hora estimados para cada uno de los clientes durante el periodo de cuatro semanas son:

Cliente	**Horas**
A	180
B	75
C	100
D	85

Las tarifas por hora varían para la combinación consultor-cliente y se basan en varios factores, incluido el tipo de proyecto y la experiencia del consultor. Las tarifas (dólares por hora) para cada combinación de consultor-cliente son:

	Cliente			
Consultor	**A**	**B**	**C**	**D**
Avery	100	125	115	100
Baker	120	135	115	120
Campbell	155	150	140	130

a. Elabore una representación de red del problema.
b. Formule el problema como un programa lineal, con una solución óptima que proporcione las horas que debe asignarse cada consultor a cada cliente para maximizar la facturación de la firma de consultoría. ¿Cuál es el programa y cuál la facturación total?
c. Nueva información muestra que Avery no cuenta con la experiencia para trabajar para el cliente B. Si esta asignación de consultoría no se permite, ¿qué impacto tiene sobre la facturación total? ¿Cuál es el programa modificado?

AUTO evaluación

6. Klein Chemicals, Inc. produce un material especial con una base de petróleo que actualmente está escaso. Cuatro de los clientes de Klein ya han colocado pedidos que en conjunto exceden la capacidad combinada de las dos plantas de Klein. La gerencia de la empresa enfrenta el problema de decidir cuántas unidades debe proveer a cada cliente. Debido a que los cuatro clientes pertenecen a diferentes sectores de la industria y existen varias estructuras de fijación de precios según la industria, se pueden fijar distintos precios. Sin embargo, los costos de producción ligeramente son diferentes en las dos plantas y los costos de transporte entre las plantas y los clientes varían, por lo que una estrategia de "vender al mejor postor" es inaceptable. Después de considerar el precio, los costos de producción, y de transporte, se establecieron las siguientes utilidades por unidad para cada alternativa de planta-cliente:

	Cliente			
Planta	D_1	D_2	D_3	D_4
Clifton Springs	\$32	\$34	\$32	\$40
Danville	\$34	\$30	\$28	\$38

Las capacidades de la planta y los pedidos de los clientes son los siguientes:

Planta	Capacidad (unidades)	Pedidos del distribuidor (unidades)	
Clifton Springs	5000	D_1	2000
		D_2	5000
Danville	3000	D_3	3000
		D_4	2000

¿Cuántas unidades debe producir cada planta para cada cliente con el fin de maximizar las utilidades? ¿Cuáles demandas de los clientes no se cumplirán? Muestre su modelo de red y su formulación de programación lineal.

7. Forbelt Corporation tiene un contrato de un año para proveer motores para todos los refrigeradores producidos por Ice Age Corporation, la cual fabrica los refrigeradores en cuatro lugares en todo el país: Boston, Dallas, Los Ángeles y St. Paul. Los planes exigen que se fabrique la siguiente cantidad de refrigeradores (en miles) en cada lugar:

Boston	50
Dallas	70
Los Ángeles	60
St. Paul	80

Las tres plantas de Forbelt son capaces de fabricar los motores. Las plantas y capacidades del producto (en miles) son:

Denver	100
Atlanta	100
Chicago	150

Debido a que los costos de producción y transporte varían, las utilidades que Forbelt obtiene sobre cada lote de 1000 unidades dependen de cuál planta fabricó el lote y a cuál destino se envió. La tabla siguiente muestra las estimaciones de las utilidades por unidad que hizo el departamento de contabilidad (los envíos se harán en lotes de 1000 unidades):

	Enviado a			
Fabricado en	**Boston**	**Dallas**	**Los Ángeles**	**St. Paul**
Denver	7	11	8	13
Atlanta	20	17	12	10
Chicago	8	18	13	16

Con la maximización de utilidades como un criterio, la gerencia de Forbelt quiere determinar cuántos motores debe fabricar cada planta y cuántos motores deben enviarse desde cada planta a cada destino.

a. Elabore una representación de red para este problema.
b. Encuentre la solución óptima.

8. Ace Manufacturing Company tiene pedidos para tres productos parecidos:

Producto	Pedidos (unidades)
A	2000
B	500
C	1200

Tres máquinas están disponibles para las operaciones de manufactura y pueden fabricar todos los productos a la misma tasa de producción. Sin embargo, debido a los porcentajes de defectos variables de cada producto en cada máquina, los costos unitarios de los productos varían dependiendo de la máquina empleada. Las capacidades de máquina para la semana siguiente y los costos unitarios se listan a continuación:

Máquina	Capacidad (unidades)
1	1500
2	1500
3	1000

	Producto		
Máquina	**A**	**B**	**C**
1	$1.00	$1.20	$0.90
2	$1.30	$1.40	$1.20
3	$1.10	$1.00	$1.20

Utilice el modelo de transporte para elaborar el programa de producción de costo mínimo para los productos y máquinas. Muestre la formulación de programación lineal.

AUTO evaluación

9. Scott and Associates, Inc. es una firma de contabilidad que tiene tres clientes nuevos a los cuales asignará líderes de proyecto. Con base en la diferente formación y experiencia de los líderes, las diversas asignaciones líder-cliente difieren en función de los tiempos de terminación proyectados. Las asignaciones posibles y los tiempos de terminación estimados en días son los siguientes:

	Cliente		
Líder de proyecto	**1**	**2**	**3**
Jackson	10	16	32
Ellis	14	22	40
Smith	22	24	34

a. Elabore una representación de red para este problema.
b. Formule el problema como un programa lineal y resuelva. ¿Cuál es el tiempo total requerido?

10. CarpetPlus vende e instala recubrimiento de piso para edificios comerciales. Brad Sweeney, un ejecutivo de cuenta de CarpetPlus, acaba de obtener un contrato para cinco trabajos. Brad debe asignar un grupo de personal de instalación de CarpetPlus a cada uno de los cinco trabajos. Dado que la comisión que Brad ganará depende de las utilidades que CarpetPlus obtenga, a Brad le gustaría determinar una asignación que minimice el costo total de instalación. Actualmente, cinco grupos de instalación están disponibles para asignación. Cada grupo se identifica por medio de un código de color, el cual ayuda a dar seguimiento al avance del trabajo en una pizarra blanca grande. La tabla siguiente muestra los costos (en cientos dólares) de que cada grupo complete cada uno de los cinco trabajos:

		Trabajo				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
Grupo	Rojo	30	44	38	47	31
	Blanco	25	32	45	44	25
	Azul	23	40	37	39	29
	Verde	26	38	37	45	28
	Café	26	34	44	43	28

a. Elabore una representación de red para el problema.
b. Formule y resuelva un modelo de programación lineal para determinar la asignación de costo mínimo.

11. Un canal de televisión local planea transmitir cuatro programas los viernes por la tarde al final de la temporada. Steve Boluchis, el gerente del canal, elaboró una lista de seis programas de reemplazo posibles. Las estimaciones de los ingresos de publicidad ($) que pueden esperarse para cada uno de los programas nuevos en los cuatro horarios disponibles son las siguientes. El señor Botuchis le pide que encuentre las asignaciones de los programas para los horarios de transmisión que maximicen los ingresos totales de publicidad.

	5:00–5:30 P.M.	**5:30–6:00 P.M.**	**7:00–7:30 P.M.**	**8:00–8:30 P.M.**
Home Improvement	5000	3000	6000	4000
World News	7500	8000	7000	5500
NASCAR Live	8500	5000	6500	8000
Wall Street Today	7000	6000	6500	5000
Hollywood Briefings	7000	8000	3000	6000
Ramundo & Son	6000	4000	4500	7000

12. U.S. Cable utiliza un sistema con cinco centros de distribución y ocho zonas de clientes, cada una de las cuales se asigna a un proveedor de origen y recibe todos sus productos de cable del mismo centro de distribución. En un esfuerzo por equilibrar la demanda y la carga de trabajo en los centros de distribución, el vicepresidente de logística de la empresa dio instrucciones de que dichos centros no se asignen a más de tres zonas de clientes. La tabla siguiente muestra los cinco centros de distribución y el costo de proveer a cada zona de clientes (en miles de dólares).

Costo de distribución	Zonas de clientes Los Ángeles	Chicago	Columbus	Atlanta	Newark	Kansas City	Denver	Dallas
Plano	70	47	22	53	98	21	27	13
Nashville	75	38	19	58	90	34	40	26
Flagstaff	15	78	37	82	111	40	29	32
Springfield	60	23	8	39	82	36	32	45
Boulder	45	40	29	75	86	25	11	37

a. Determine la asignación de las zonas de clientes a los centros de distribución que minimicen el costo.
b. ¿Cuáles centros de distribución, si los hay, no se utilizarán?
c. Suponga que cada centro de distribución está limitado a un máximo de dos zonas de clientes. ¿Cómo cambia esta restricción la asignación y el costo de abastecer a las zonas de clientes?

13. United Express Service (UES) utiliza grandes cantidades de materiales de empaque en sus cuatro centros de distribución. Después de examinar a los proveedores potenciales, la empresa identificó seis vendedores que pueden suministrar materiales que satisfagan sus estándares de calidad. UES pidió a cada uno de los seis vendedores que presentaran propuestas para satisfacer la demanda anual en cada uno de sus centros de distribución durante el año siguiente. Las propuestas recibidas (en miles de dólares) se listan en la tabla siguiente. UES quiere asegurar que un vendedor diferente atienda sólo uno de los centros de distribución. ¿Cuáles propuestas debe aceptar UES y cuáles vendedores debe seleccionar para abastecer cada centro de distribución?

Empresa	Centro de distribución 1	2	3	4
Martin Products	190	175	125	230
Schmidt Materials	150	235	155	220
Miller Containers	210	225	135	260
D&J Burns	170	185	190	280
Larbes Furnishings	220	190	140	240
Lawler Depot	270	200	130	260

14. El departamento principal de métodos cuantitativos de una universidad importante en uno de los estados centrales de Estados Unidos, programará cursos en la facultad para impartirlos durante el próximo periodo de otoño. Se necesitan cubrir cuatro cursos para los niveles universitario (UG), de maestría en administración (MBA), maestría en ciencias (MS) y doctorado (Ph.D.). Se asignará un profesor para cada curso. Se dispone de evaluaciones de estudiantes de periodos anteriores por parte de los profesores. Con base en una escala de calificación de 4 (excelente), 3 (muy bueno), 2 (promedio), 1 (pasable) y 0 (malo), las evaluaciones del estudiante promedio por cada profesor se muestran enseguida. El profesor D no tiene doctorado, por lo que no puede asignarse al curso de ese nivel. Si el departamento principal hace asignaciones del profesorado con base en la maximización de las calificaciones de evaluación de los estudiantes para los cuatro cursos, ¿qué asignaciones de profesores debe hacer?

Profesor	Curso UG	MBA	MS	Ph.D.
A	2.8	2.2	3.3	3.0
B	3.2	3.0	3.6	3.6
C	3.3	3.2	3.5	3.5
D	3.2	2.8	2.5	—

15. Tres clientes de una firma de investigación de mercados solicitaron que la empresa realizara una encuesta sencilla. Hay cuatro expertos en estadística disponibles para asignarlos a estos tres proyectos; sin embargo, los cuatro están ocupados y por ende cada uno sólo puede manejar un cliente. Enseguida se muestra el número de horas que requiere cada experto para completar cada trabajo; las diferencias en tiempo se basan en la experiencia y capacidad de los expertos.

	Cliente		
Experto en estadística	**A**	**B**	**C**
1	150	210	270
2	170	230	220
3	180	230	225
4	160	240	230

a. Formule y resuelva un modelo de programación lineal para este problema.
b. Suponga que el tiempo que necesita el experto 4 para completar el trabajo para el cliente A aumenta de 160 a 165 horas. ¿Qué efecto tendrá este cambio en la solución?
c. Suponga que el tiempo que necesita el experto 4 para completar el trabajo para el cliente A disminuye a 140 horas. ¿Qué efecto tendrá este cambio en la solución?
d. Suponga que el tiempo que el experto 3 necesita para completar el trabajo para el cliente B aumenta a 250 horas. ¿Qué efecto tendrá este cambio en la solución?

16. Hatcher Enterprises utiliza un producto químico llamado Rbase en las operaciones de producción de cinco divisiones. Sólo seis de sus proveedores cumplen con los estándares de control de calidad de Hatcher, y sólo estos proveedores pueden producir Rbase en cantidades suficientes para satisfacer a las necesidades de cada división. La cantidad de Rbase necesaria por cada división y el precio por galón que cobra cada proveedor son los siguientes:

División	Demanda (miles de galones)
1	40
2	45
3	50
4	35
5	45

Proveedor	Precio por galón ($)
1	12.60
2	14.00
3	10.20
4	14.20
5	12.00
6	13.00

El costo por galón ($) para el envío desde cada proveedor hasta cada división se proporciona en la tabla siguiente:

	Proveedor					
División	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2.75	2.50	3.15	2.80	2.75	2.75
2	0.80	0.20	5.40	1.20	3.40	1.00
3	4.70	2.60	5.30	2.80	6.00	5.60
4	2.60	1.80	4.40	2.40	5.00	2.80
5	3.40	0.40	5.00	1.20	2.60	3.60

Hatcher considera adecuado distribuir contratos entre sus proveedores, de modo que la empresa se vea menos afectada por los problemas de los proveedores (por ejemplo, las huelgas de trabajadores o la disponibilidad de recursos). La política de la empresa requiere que cada división tenga un proveedor separado.

a. Para cada combinación de proveedor-división, calcule el costo total de satisfacer la demanda de la división.
b. Determine la asignación óptima de proveedores a las divisiones.

c. El efecto estacional máximo ocurre en el tercer trimestre, el cual corresponde a la demanda del regreso a la escuela durante julio, agosto y septiembre de cada año.

26. 0.707, 0.777, 0.827, 0.966, 1.016, 1.305, 1.494, 1.225, 0.976, 0.986, 0.936, 0.787

28. a. Los promedios móviles centrados seleccionados con $t = 5$, 10, 15 y 20 son 11.125, 18.125, 22.875 y 27.000
b. 0.899, 1.362, 1.118, 0.621
c. Trimestre 2, antes de la temporada veraniega de pasear en bote

30. a. $T_t = 6.329 + 1.055t$
b. 36.92, 37.98, 39.03, 40.09
c. 33.23, 51.65, 43.71, 24.86

32. a. Sí, existe un efecto estacional; los índices estacionales son 1.696, 1.458, 0.711, 0.326, 0.448, 1.362.
b. El pronóstico para 12–4 es 166,761.13; para 4–8 es 146,052.99

33. a.

Restaurante (i)	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	1	19	19	1
2	4	44	176	16
3	6	40	240	36
4	10	52	520	100
5	14	53	742	196
Totales	35	208	1697	349

$$\bar{x} = \frac{35}{5} = 7$$

$$\bar{y} = \frac{208}{5} = 41.6$$

$$b_1 = \frac{\sum x_i y_i - (\sum x_i \sum y_i)/n}{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2/n}$$

$$= \frac{1697 - (35)(208)/5}{349 - (35)^2/5}$$

$$= \frac{241}{104} = 2.317$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1\bar{x} = 41.6 - 2.317(7) = 25.381$$

$$\hat{y} = 25.381 + 2.317x$$

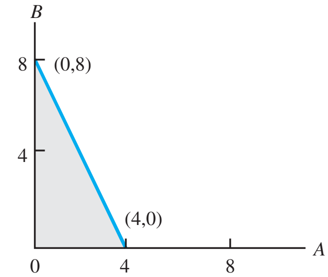
b. $\hat{y} = 25.381 + 2.317(8) = 43.917$, o \$43,917

34. a. $\hat{y} = 37.666 - 3.222x$
b. \$3444

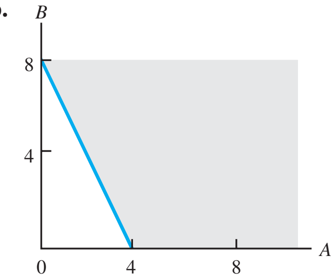
Capítulo 7

1. Las partes (a), (b) y (c) son relaciones de programación lineal aceptables.
La parte (c) no es aceptable debido a $-2x_2^2$.
La parte (d) no es aceptable debido a $3\sqrt{x_1}$.
La parte (f) no es aceptable debido a $1x_1x_2$.
Las partes (c), (d) y (f) no podrían encontrarse en una modelo de programación lineal porque contienen términos no lineales.

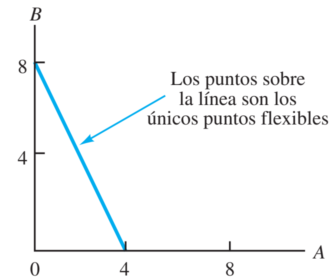
2. a.



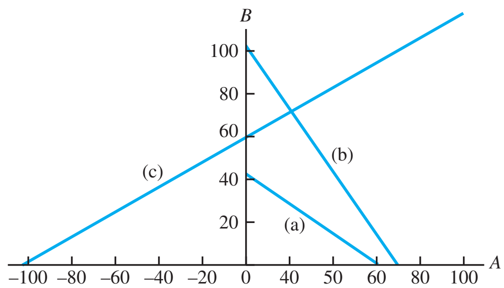
b.



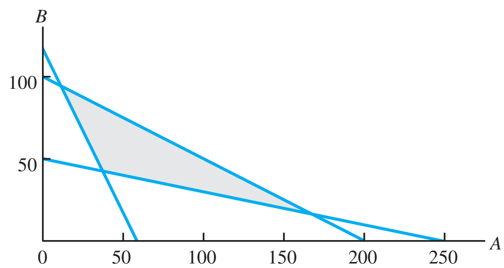
c.



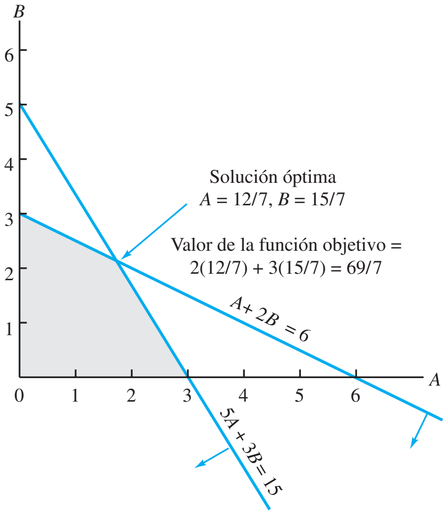
6. $7A + 10B = 420$
$6A + 4B = 420$
$4A + 7B = 420$



7.



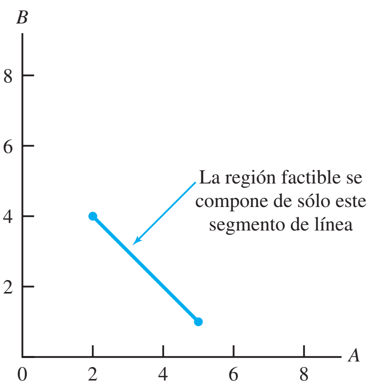
10.



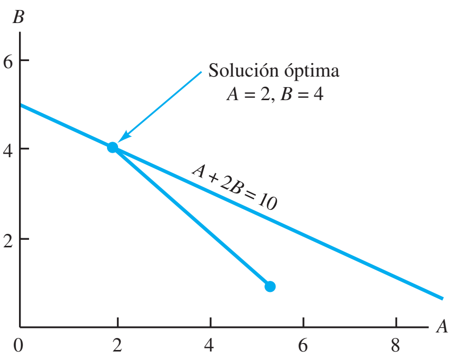
	$A + 2B = 6$	(1)
	$5A + 3B = 15$	(2)
Ecuación (1) por 5:	$5A + 10B = 30$	(3)
Ecuación (2) menos la ecuación (3):	$-7B = -15$	
	$B = 15/7$	
Según la ecuación (1):	$A = 6 - 2(15/7)$	
	$= 6 - 30/7 = 12/7$	

12. a. $A = 3, B = 1.5$; Valor de la solución óptima $= 13.5$
b. $A = 0, B = 3$; Valor de la solución óptima $= 18$
c. Cuatro: (0, 0), (4, 0), (3, 1.5) y (0.3)

13. a.



b. Los puntos extremos son (5, 1) y (2, 4).
c.



14. a. 540 bolsas estándar, 252 bolsas de lujo
b. 7668
c. 630, 480, 708, 117
d. 0, 120, 0, 18

16. a. $3S + 9D$
b. (0,540)
c. 90, 150, 348, 0

17. Max $5A + 2B + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$
s.a.

$$\begin{aligned} 1A - 2B + 1s_1 \qquad\qquad &= 420 \\ 2A + 3B - \qquad + 1s_2 \qquad &= 610 \\ 6A - 1B + \qquad\qquad + 1s_3 &= 125 \\ A, B, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

18. b. $A = 18/7, B = 15/7$
c. 0, 0, 4/7

20. b. $A = 3.43, B = 3.43$
c. 2.86, 0, 1.43, 0

22. b.

Punto extremo	Coordenadas	Utilidad ($)
1	(0, 0)	0
2	(1700, 0)	8500
3	(1400, 600)	9400
4	(800, 1200)	8800
5	(0, 1680)	6720

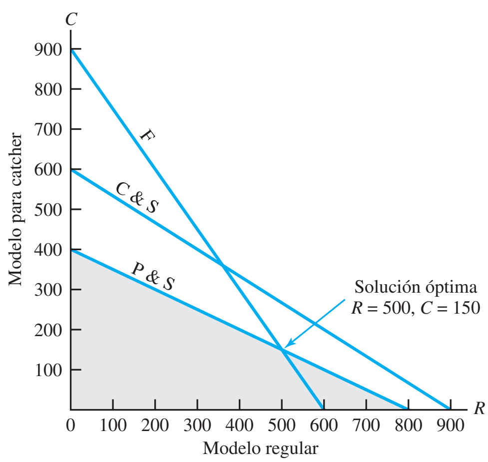
El punto extremo 3 genera la utilidad más alta.
c. $A = 1400, C = 600$
d. La restricción de corte y teñido y la restricción de empacado
e. $A = 800, C = 1200$; profit $= \$9200$

24. a. Sean R = número de unidades de modelo regular
C = número de unidades de modelo para catcher

Max $5R + 8C$

$1R + C + {}^3/_2C \leq 900$ Corte y confección
${}^1/_2R + \quad {}^1/_3C \leq 300$ Acabados
${}^1/_8R + \quad {}^1/_4C \leq 100$ Empaque y envío
$R, C \geq 0$

b.



c. $5(500) + 8(150) = \$3700$

d. C & S $1(500) + {}^3/_2(150) = 725$

F ${}^1/_2(500) + {}^1/_3(150) = 300$

P & S ${}^1/_8(500) + {}^1/_4(150) = 100$

e.

Departamento	Capacidad	Utilizada	Adelanto
Corte y confección	900	725	175 horas
Acabados	300	300	0 horas
Empaque y envío	100	100	0 horas

26. a. Max $50N + 80R$

s.a.

$$\begin{aligned} N + \quad R &= 1000 \\ N \qquad &\geq \ \ 250 \\ R &\geq \ \ 250 \\ N - 2R &\geq \quad 0 \\ N, R &\geq 0 \end{aligned}$$

b. $N = 666.67$, $R = 333.33$; Exposición a la audiencia = 60,000

28. a. Máx $1W + 1.25M$

− s.a.

$$\begin{aligned} 5W + \quad 7M &\leq 4480 \\ 3W + \quad 1M &\leq 2080 \\ 2W + \quad 2M &\leq 1600 \\ W, M &\geq 0 \end{aligned}$$

b. $W = 560$, $M = 240$; Utilidad = 860

30. a. Max $15E + 18C$

s.a.

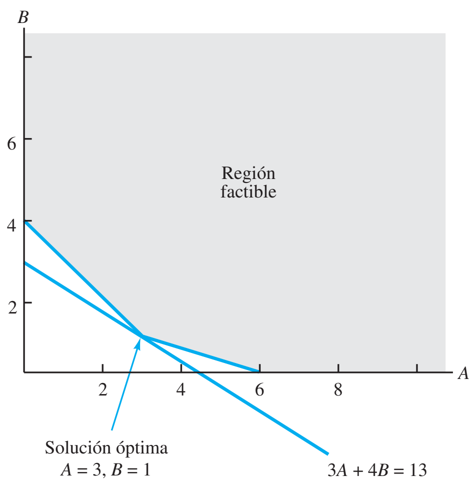
$$\begin{aligned} 40E + 25C &\leq 50{,}000 \\ 40E \qquad\quad &\geq 15{,}000 \\ 25C &\geq 10{,}000 \\ 25C &\leq 25{,}000 \\ E, C &\geq 0 \end{aligned}$$

c. (375, 400); (1000, 400); (625, 1000); (375, 1000)

d. $E = 625$, $C = 1000$

Rendimiento total = \$27,375

31.

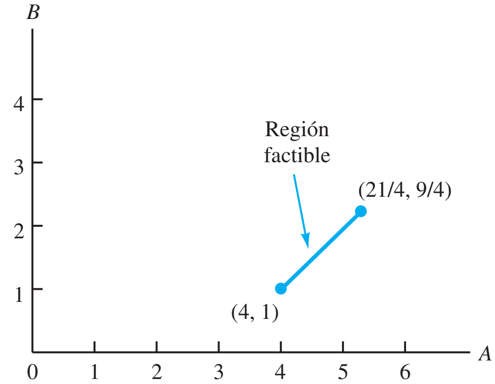


Valor de la función objetivo = 13

32.

Puntos extremos objetivos	Valor de la función	Demanda excedente	Producción total de existencias	Tiempo de procesamiento
(250, 100)	800	125	—	—
(125, 225)	925	—	—	125
(125, 350)	1300	—	125	—

34. a.



b. Existen dos puntos extremos:

$(A = 4, B = 1)$ y $(A = 21/4, B = 9/4)$

c. La solución óptima [vea la parte (a)] es $A = 4$, $B = 1$.

35. a. Min $6A + 4B + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

s.a.

$$\begin{aligned} 2A + 1B - s_1 \qquad\qquad &= 12 \\ 1A + 1B \qquad - s_2 \qquad &= 10 \\ 1B \qquad\qquad + s_3 &= \ \ 4 \\ A, B, s_1, s_2, s_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

b. La solución óptima es $A = 6$, $B = 4$

c. $s_1 = 4$, $s_2 = 0$, $s_3 = 0$

36. a. Min $10{,}000T + 8000P$

s.a.

$$\begin{aligned} T \qquad\quad &\geq 8 \\ P &\geq 10 \\ T + \quad P &\geq 25 \\ 3T + \quad 2P &\leq 84 \end{aligned}$$

c. (15, 10); (21.33, 10); (8, 30); (8, 17)

d. $T = 8$, $P = 17$

Costo total = \$216,000

38. a. Min $7.50S + 9.00P$

s.a.

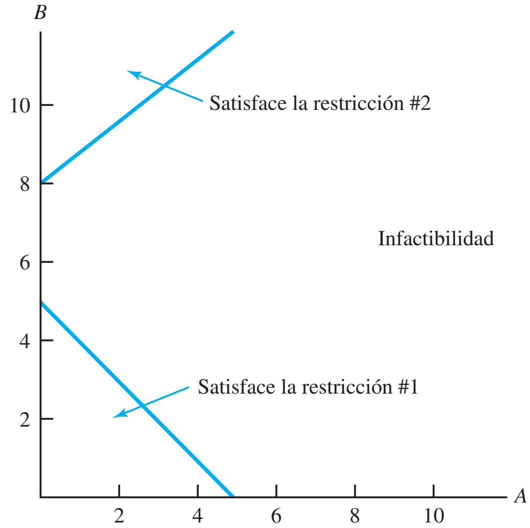
$$\begin{aligned} 0.10S + 0.30P &\geq \ \ 6 \\ 0.06S + 0.12P &\leq \ \ 3 \\ S + \qquad P &= 30 \\ S, P &\geq 0 \end{aligned}$$

c. La solución óptima es $S = 15$, $P = 15$.

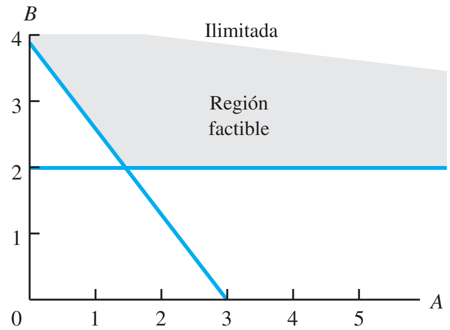
d. No
e. Si

40. $P_1 = 30$, $P_2 = 25$, Costo = \$55

42.



43.



44. a. $A = 30/16$, $B = 30/16$; Valor de la solución óptima = $^{60}/_{16}$

b. $A = 0$, $B = 3$; Valor la solución óptima = 6

46. a. 180, 20
b. Soluciones óptimas alternas
c. 120, 80

48. Ninguna solución factible

50. $M = 65.45$, $R = 261.82$; Profit = \$45,818

52. $S = 384$, $O = 80$

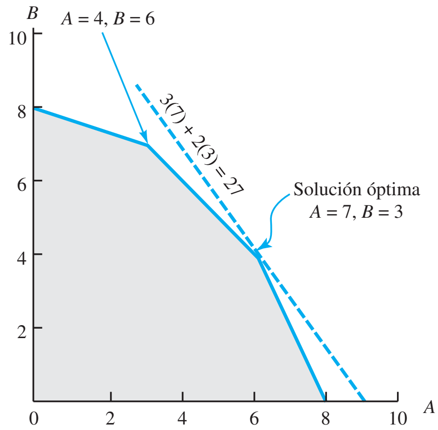
54. a. Max $160M_1 + 345M_2$
s.a.

$$
\begin{array}{rcl}
M_1 & & \le 15 \\
& M_2 & \le 10 \\
M_1 & & \ge 5 \\
& M_2 & \ge 5 \\
40M_1 + & 50M_2 & \le 1000 \\
M_1, M_2 \ge 0 & &
\end{array}
$$

b. $M_1 = 12.5$, $M_2 = 10$

Capítulo 8

1. a.



b. El mismo punto extremo, $A = 7$ y $B = 3$, permanece óptimo. El valor de la función objetivo llega a ser $5(7) + 2(3) = 41$.

c. Un nuevo punto extremo, $A = 4$ y $B = 6$, se vuelve óptimo. El valor de la función objetivo se vuelve $3(4) + 4(6) = 36$.

d. El rango del coeficiente objetivo de la variable A es de 2 a 6; la solución óptima, $A = 7$ y $B = 3$, no cambia. El rango del coeficiente objetivo de la variable B es de 1 a 3; resuelva el problema para determinar la solución óptima.

2. a. La región factible se agranda con la nueva solución óptima de $A = 6.5$ y $B = 4.5$.

b. El valor de la solución óptima al problema resisado es $3(6.5) + 2(4.5) = 28.5$; el incremento de una unidad en al lado derecho de la restricción 1 mejora el valor de la solución óptima en $28.5 - 27 = 1.5$; por consiguiente, el precio dual correspondiente a la restricción 1 es 1.5.

c. El rango del lado derecho de la restricción 1 es de 8 a 11.2; en tanto el lado derecho permanezca dentro de este rango, el precio dual de 1.5 es aplicable.

d. La mejora del valor de la solución óptima será 0.5 por cada incremento de una unidad en el lado derecho de la restricción 2 en tanto el lado derecho permanezca entre 18 y 30.

4. a. $X = 2.5$, $Y = 2.5$
b. -2
c. 5 a 11
d. -3 entre 9 y 18

5. a. Guante regular = 500; guante para catcher = 150; Valor = 3700

b. Las restricciones de acabados, empaque y envío obligan; no hay tiempo de adelanto

c. Corte y confección = 0
Acabados = 3
Empaque y envío = 28
Tiempo de acabado adicional vale \$3 por unidad y el tiempo de empaque y envío adicional vale \$28 por unidad.

d. En el departamento de empaque y envío, cada hora adicional vale $28

6. a. 4 a 12
3.33 a 10

b. En tanto la contribución a la utilidad del guante regular sea de entre $4.00 y $12.00, la solución actual es óptima; en tanto la contribución a la utilidad del guante para catcher permanezca entre $3.33 y $10.00, la solución actual es óptima; la solución actual no es sensible a cambios mínimos de la contribución a la utilidad de los guantes.

c. Los precios duales de los recursos son aplicables dentro de los siguientes rangos:

Restricción	Rango del lado derecho
Corte y confección	725 hasta ningún límite superior
Acabados	133.33 a 400
Empaque y envío	75 a 135

d. Cantidad de incremento = (28)(20) = $560

8. a. Más de $7.00
b. Más de $3.50
c. Nada

10. a. $S = 4000$, $M = 10{,}000$, Riesgo total = 62,000
b.

Variable	Rango del coeficiente objetivo
S	3.75 a ningún límite superior
M	Ningún límite inferior a 6.4

c. 5(4000) + 4(10,000) = $60,000
d. 60,000/1,200,000 = 0.05 ó 5%
e. 0.057 unidades de riesgo
f. 0.057(100) =5.7%

12. a. $E = 80$, $S = 120$, $D = 0$
Utilidad = $16,440
b. Motores de ventilador y serpentines de enfriamiento
c. Horas laborales; 320 horas disponibles
d. Rango del coeficiente de la función objetivo a optimalidad
Ningún límite inferior a 159
Como $150 se encuentra en este rango; la solución óptima no cambiaría.

13. a. Rango de optimalidad
E 47.5 a 75
S 87 a 126
D Ningún límite inferior a 159
b.

Modelo	Utilidad	Cambio	Incremento/decremento permisible	%
E	$ 63	Incremento $6(100)	$75 − $63 = $12	$6/12(100) = 50$
S	$ 95	Decremento $2	$95 − $87 = $8	$2/8(100) = 25$
D	$135	Incremento $4	$159 − $135 = $24	$4/24(100) = 17$
				92

Como los cambios son 92% de los cambios permisibles, la solución óptima de $E = 80$, $S = 120$, $D = 0$ no cambiará.

El cambio de la utilidad total será

$$\begin{array}{lr} E \quad 80 \text{ unidades @ } +\$6 = & \$480 \\ S \quad 120 \text{ unidades @ } -\$2 = & -240 \\ \hline & \$240 \end{array}$$

∴ Utilidad = $16,440 + $240 = $16,680

c. Rango de factibilidad
Restricción 1 160 a 280
Restricción 2 200 a 400
Restricción 3 2080 a ningún límite superior

d. Si. Motores de ventilador = 200 + 100 = 300 sale del rango de factibilidad; el precio dual cambiará.

14. a. Fabricar 100 cajas de A y 60 cajas de B y comprar 90 cajas de B; Costo total = $2170
b. Demanda de A, demanda de B; tiempo de ensamble
c. −12.25, −9.0, 0, 0.375
d. Restricción del tiempo de ensamble

16. a. 100 trajes, 150 sacos deportivos
Utilidad = $40,900
40 horas de tiempo extra de corte
b. La solución óptima no cambiará.
c. Considere solicitar material adicional. $34.50 es el precio máximo.
d. La utilidad mejorará en $875.

18. a. El modelo de programación lineal es el siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{Min} & 30AN + 50AO + 25BN + 40BO \\ & AN + AO \geq 50{,}000 \\ & BN + BO \geq 70{,}000 \\ & AN + BN \leq 80{,}000 \\ & AO + BO \leq 60{,}000 \\ & AN, AO, BN, BO \geq 0 \end{array}$$

b. Solución óptima

	Nueva línea	Vieja línea
Modelo A	50,000	0
Modelo B	30,000	40,000
Costo total: $3,850,000		

c. Las primeras tres restricciones obligan.
d. Como el precio dual es positivo, el incremento del lado derecho de la restricción 3 *mejorará* la solución; por tanto, un incremento de la capacidad de la nueva línea de producción es deseable.
e. Como la restricción 4 no es una restricción que obliga, cualquier incremento de la capacidad de la vieja línea de producción no afectará la solución óptima; así, el incremento de la capacidad de la vieja línea de producción no produce ningún beneficio.

f. El costo reducido del modelo A fabricado en la vieja línea de producción es 5; por tanto, el costo tendría que reducirse por lo menos $5 antes de que cualquier unidad del modelo A se produzca en la vieja línea de producción.

g. El rango del lado derecho de la restricción 2 muestra un límite inferior de 30,000; así, si el requerimiento de producción mínima se reduce de 10,000 unidades a 60,000, el precio dual de -40 es aplicable; por el costo total se reduciría en 10,000(40) = $400,000.

20. a. Max $0.07H + 0.12P + 0.09A$

$$\begin{aligned} H + P + A &= 1{,}000{,}000 \\ 0.6H - 0.4P - 0.4A &\geq 0 \\ P - 0.6A &\leq 0 \\ H, P, A &\geq 0 \end{aligned}$$

b. $H = \$400{,}000$, $P = \$225{,}000$, $A = \$375{,}000$
Rendimiento anual total = $88,750
Porcentaje de rendimiento anual = 8.875%

c. Ningún cambio

d. Incremento de $890

e. Incremento de $312.50 ó 0.031%

22. a. Min $30L + 25D + 18S$

$$\begin{aligned} L + D + S &= 100 \\ 0.6L - 0.4D &\geq 0 \\ -0.15L - 0.15D + 0.85S &\geq 0 \\ -0.25L - 0.25D + S &\leq 0 \\ L &\leq 50 \\ L, D, S &\geq 0 \end{aligned}$$

b. $L = 48$, $D = 72$, $S = 30$
Costo total = $3780

c. Ningún cambio

d. Ningún cambio

24. a. 333.3, 0, 833.3; Riesgo = 14,666.7; Rendimiento = 18,000 ó 9%

b. 1000, 0, 0, 2500; Riesgo = 18,000; Rendimiento = 22,000 u 11%

c. $4000

26. a. Sean
M_1 = unidades del componente 1 fabricadas
M_2 = unidades del componente 2 fabricadas
M_3 = unidades del componente 3 fabricadas
P_1 = unidades del componente 1 compradas
P_2 = unidades del componente 2 compradas
P_3 = unidades del componente 3 compradas

Mín $4.50M_1 + 5.00M_2 + 2.75M_3 + 6.50P_1 + 8.80P_2 + 7.00P_3$

$$\begin{aligned} 2M_1 + 3M_2 + 4M_3 &\leq 21{,}600 && \text{Producción} \\ 1M_1 + 1.5M_2 + 3M_3 &\leq 15{,}000 && \text{Ensamble} \\ 1.5M_1 + 2M_2 + 5M_3 &\leq 18{,}000 && \text{Prueba/Empaque} \\ 1M_1 + 1P_1 &= 6{,}000 && \text{Componente 1} \\ 1M_2 + 1P_2 &= 4{,}000 && \text{Componente 2} \\ 1M_3 + 1P_3 &= 3{,}500 && \text{Component 3} \\ M_1, M_2, M_3, P_1, P_2, P_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

b.

Origen	Componente 1	Componente 2	Componente 3
Fabricar	2000	4000	1400
Comprar	4000		2100

Costo total $73,550

c. Producción: $54.36 por hora
Prueba & Empaque: $7.50 por hora

d. Precios duales = $-\$7.969$; le costaría a Benson $7.969 agregar una unidad del componente 2.

28. b. $G = 120{,}000$; $S = 30{,}000$; $M = 150{,}000$

c. 0.15 a 0.60; ningún límite inferior a 0.122; 0.02 a 0.20

d. 4668

e. $G = 48{,}000$; $S = 192{,}000$; $M = 60{,}000$

f. El índice de riesgo del cliente y la cantidad de fondos disponible

30. a. $L = 3$, $N = 7$, $W = 5$, $S = 5$

b. Cada minuto adicional de tiempo de transmisión incrementa el costo en $100.

c. Si la cobertura local se incrementa en 1 minuto, el costo total se incrementará en $100.

d. Si el tiempo dedicado a las noticias locales y nacionales se incrementa en 1 minuto, el costo total se incrementará en $100.

e. El incremento del espacio de deportes en 1 minuto no tendrá ningún efecto porque el precio doble es cero.

32. a. Sean
P_1 = número de paquetes de baterías PT-100 producidas en la planta de Filipinas
P_2 = número de paquetes de baterías PT-200 producidas en la planta de Filipinas
P_3 = número de paquetes de baterías PT-300 producidas en la planta de Filipinas
M_1 = número de paquetes de baterías PT-100 producidas en la planta de México
M_2 = número de paquetes de baterías PT-200 producidas en la planta de México
M_3 = número de paquetes de baterías PT-300 producidas en la planta de México

Min $1.13P_1 + 1.16P_2 + 1.52P_3 + 1.08M_1 + 1.16M_2 + 1.25M_3$

$$\begin{aligned} P_1 + M_1 &= 200{,}000 \\ P_2 + M_2 &= 100{,}000 \\ P_3 + M_3 &= 150{,}000 \\ P_1 + P_2 &\leq 175{,}000 \\ M_1 + M_2 &\leq 160{,}000 \\ P_3 &\leq 75{,}000 \\ M_3 &\leq 100{,}000 \\ P_1, P_2, P_3, M_1, M_2, M_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

b. La solución óptima es como sigue:

	Filipinas	México
PT-100	40,000	160,000
PT-200	100,000	0
PT-300	50,000	100,000

El costo de producción y transporte total es de $535,000.

c. El rango de optimalidad del coeficiente de la función objetiva de P_1 muestra un límite inferior de $1.08; por tanto, el costo de producción y/o envío tendría que reducirse en por lo menos 5 centavos por unidad.

d. El rango de optimalidad del coeficiente de la función objetivo de M_1 muestra un límite inferior de $1.11; así, el costo de producción y/o envío tendría que reducirse en por lo menos 5 centavos por unidad.

Capítulo 9

1. a. Sean T = número de anuncios de televisión
R = número de anuncios de radio
N = número de anuncios de periódico

$$
\begin{array}{llll}
\text{Máx} & 100{,}000T + 18{,}000R + 40{,}000N & & \\
\text{s.a.} & & & \\
 & 2{,}000T + 300R + 600N \le 18{,}200 & & \text{Presupuesto} \\
 & T \le 10 & & \text{Máx TV} \\
 & R \le 20 & & \text{Máx Radio} \\
 & N \le 10 & & \text{Máx Noticias} \\
 & -0.5T + 0.5R - 0.5N \le 0 & & \text{Máx 50\% radio} \\
 & 0.9T - 0.1R - 0.1N \ge 0 & & \text{Mín 10\% TV} \\
 & T, R, N, \ge 0 & &
\end{array}
$$

		Presupuesto $
Solución:	$T = 4$	$ 8000
	$R = 14$	4200
	$N = 10$	6000
		$18,200

Audiencia = 1,052,000

Esta información puede obtenerse con el Management Scientist como sigue:

```
OPTIMAL SOLUTION

Objective Function Value 5       1052000.000

      Variable              Value             Reduced Costs
   --------------      ---------------     -----------------
         T                   4.000               0.000
         R                  14.000               0.000
         N                  10.000               0.000

     Constraint          Slack/Surplus        Dual Prices
   --------------      ---------------     -----------------
          1                  0.000              51.304
          2                  6.000               0.000
          3                  6.000               0.000
          4                  0.000           11826.087
          5                  0.000            5217.391
          6                  1.200               0.000

OBJECTIVE COEFFICIENT RANGES

  Variable        Lower Limit       Current Value       Upper Limit
------------    ---------------    ---------------    ------------------
     T             -18000.000        100000.000          120000.000
     R              15000.000         18000.000       No Upper Limit
     N              28173.913         40000.000       No Upper Limit

RIGHT HAND SIDE RANGES

 Constraint       Lower Limit       Current Value       Upper Limit
------------    ---------------    ---------------    ------------------
      1             14750.000         18200.000           31999.996
      2                 4.000            10.000       No Upper Limit
      3                14.000            20.000       No Upper Limit
      4                 0.000            10.000              12.339
      5                -8.050             0.000               2.936
      6           No Lower Limit          0.000               1.200
```

s_4 = fondos colocados en ahorros durante el periodo 4
L_1 = fondos recibidos por préstamo durante el periodo 1
L_2 = fondos recibidos por préstamo durante el periodo 2
L_3 = fondos recibidos por préstamo durante el periodo 3
L_4 = fondos recibidos por préstamo durante el periodo 4

Función objetivo:
Para incrementar al máximo el valor en efectivo, al final de los cuatro periodos, debemos considerar el valor de la inversión A, el valor de la inversión B, el ingreso por ahorros del periodo 4 y los gastos por préstamos durante el periodo 4.

$$\text{Max } 3200x_1 + 2500x_2 + 1.1s_4 - 1.18L_4$$

Las restricciones requieren el *uso* de fondos para igualar el *origen* de los fondos en cada periodo.

Periodo 1:

$$1000x_1 + 800x_2 + s_1 = 1500 + L_1$$

o

$$1000x_1 + 800x_2 + s_1 - L_1 = 1500$$

Periodo 2:

$$800x_1 + 500x_2 + s_2 + 1.18L_1 = 400 + 1.1s_1 + L_2$$

o

$$800x_1 + 500x_2 - 1.1s_1 + s_2 + 1.18L_1 - L_2 = 400$$

Periodo 3:

$$200x_1 + 300x_2 + s_3 + 1.18L_2 = 500 + 1.1s_2 + L_3$$

o

$$200x_1 + 300x_2 - 1.1s_2 + s_3 + 1.18L_2 - L_3 = 500$$

Periodo 4:

$$s_4 + 1.18L_3 = 100 + 200x_1 + 300x_2 + 1.1s_3 + L_4$$

o

$$-200x_1 - 300x_2 - 1.1s_3 + s_4 + 1.18L_3 - L_4 = 100$$

Límites de los Fondos Disponibles para Préstamo:

$$L_1 \leq 200$$
$$L_2 \leq 200$$
$$L_3 \leq 200$$
$$L_4 \leq 200$$

Proporción de la inversión emprendida:

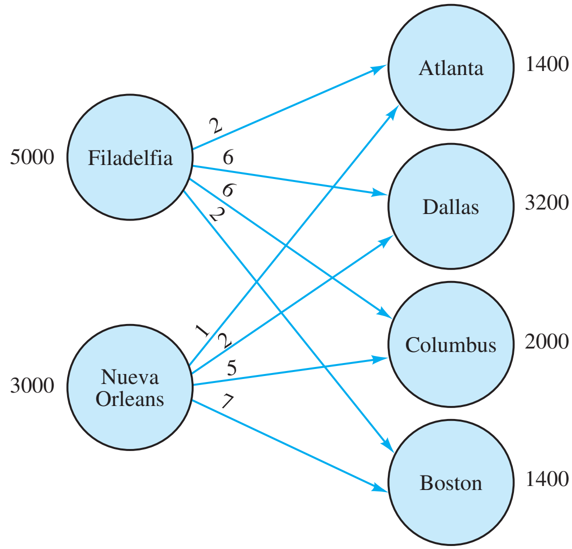
$$x_1 \leq 1$$
$$x_2 \leq 1$$

Solución óptima: \$4340.40

Inversión A	$x_1 = 0.458$	o	45.8%
Inversión B	$x_2 = 1.0$	o	100.0%

Capítulo 10

1. Se muestra el modelo de red:



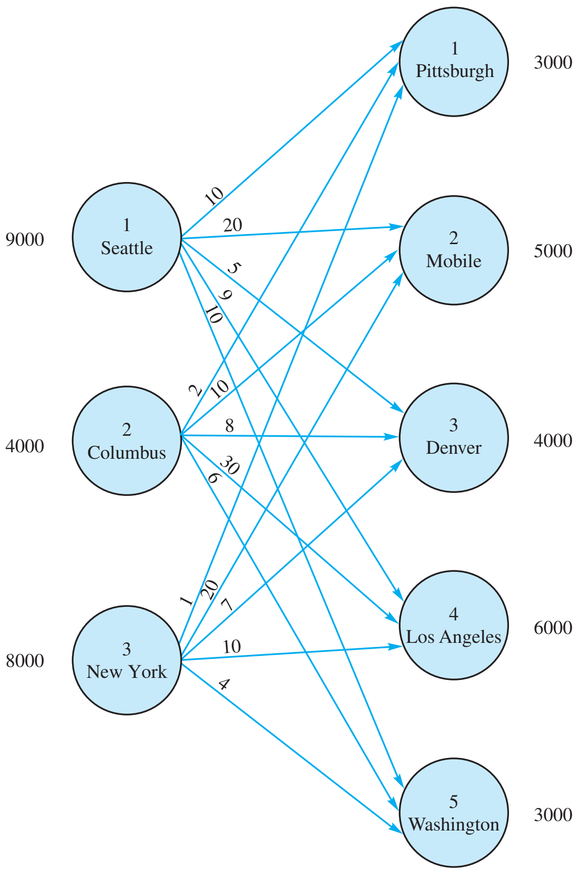
2. a. Sean x_{11} = cantidad enviada de Jefferson City a Des Moines
x_{12} = cantidad enviada de Jefferson City a Kansas City
.
.
.

$$\begin{array}{ll}
\text{Min} & 14x_{11} + 9x_{12} + 7x_{13} + 8x_{21} + 10x_{22} + 5x_{23} \\
\text{s.a.} & \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 30 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 20 \\
& x_{11} + x_{21} = 25 \\
& x_{12} + x_{22} = 15 \\
& x_{13} + x_{23} = 10 \\
& x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \geq 0
\end{array}$$

b. Solución óptima:

	Cantidad	Costo
Jefferson City–Des Moines	5	70
Jefferson City–Kansas City	15	135
Jefferson City–St. Louis	10	70
Omaha–Des Moines	20	160
	Total	435

4. a.



b. Se muestran la formulación de programación lineal y la solución óptima impresas por The Management Scientist. Los dos primeras letras del nombre de la variable identifican el nodo “de” y las dos segundas letras identifican el nodo “a”. Asimismo, The Management Scientist imprime “<” para “≤.”

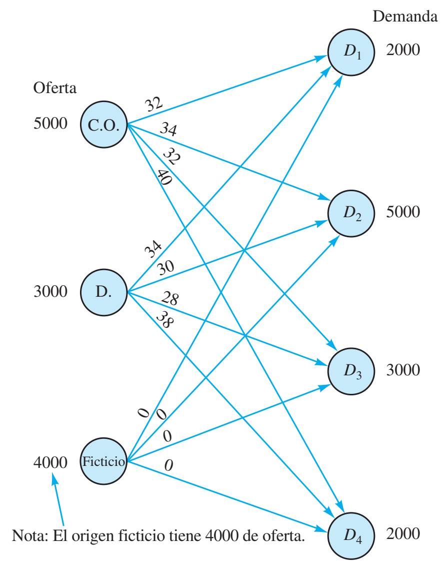
```
LINEAR PROGRAMMING PROBLEM

MIN 10SEPI 1 20SEMO 1 5SEDE 1 9SELA 1 10SEWA
1 2COPI 1 10COMO 1 8CODE 1 30COLA 1 6COWA 1
1NYPI 1 20NYMO 1 7NYDE 1 10NYLA 1 4NYWA

S.T.

1) SEPI 1 SEMO 1 SEDE 1 SELA 1 SEWA , 9000
2) COPI 1 COMO 1 CODE 1 COLA 1 COWA , 4000
3) NYPI 1 NYMO 1 NYDE 1 NYLA 1 NYWA , 8000
4) SEPI 1 COPI 1 NYPI 5 3000
5) SEMO 1 COMO 1 NYMO 5 5000
6) SEDE 1 CODE 1 NYDE 5 4000
7) SELA 1 COLA 1 NYLA 5 6000
8) SEWA 1 COWA 1 NYWA 5 3000
```

```
OPTIMAL SOLUTION
Objective Function Value 5        150000.000
  Variable           Value        Reduced Costs
------------    ------------    -------------
--
    SEPI             0.000           10.000
    SEMO             0.000            1.000
    SEDE          4000.000            0.000
    SELA          5000.000            0.000
    SEWA             0.000            7.000
    COPI             0.000           11.000
    COMO          4000.000            0.000
    CODE             0.000           12.000
    COLA             0.000           30.000
    COWA             0.000           12.000
    NYPI          3000.000            0.000
    NYMO          1000.000            0.000
    NYDE             0.000            1.000
    NYLA          1000.000            0.000
    NYWA          3000.000            0.000
```

c. En realidad la nueva solución óptima muestra una reducción de $9000 del costo de envío. Se resume.

Solución óptima	Unidades	Costo
Seattle–Denver	4000	$ 20,000
Seattle–Los Angeles	5000	45,000
Columbus–Mobile	5000	50,000
New York–Pittsburgh	4000	4,000
New York–Los Angeles	1000	10,000
New York–Washington	3000	12,000
	Total:	$141,000

6. Se muestran el modelo de red, la formulación de programación lineal y la solución óptima. Observe que la tercera restricción corresponde al origen ficticio. Las variables x_{31}, x_{32}, x_{33} y x_{34} son las cantidades enviadas del origen ficticio; no aparecen en la función objetivo porque su coeficiente es cero.



$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & 32x_{11} + 34x_{12} + 32x_{13} + 40x_{14} + 34x_{21} + 30x_{22} + 28x_{23} + 38x_{24} \\
\text{s.a.} & \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \leq 5000 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \leq 3000 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \leq 4000 \quad \text{Ficticio o dummy} \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} = 2000 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} = 5000 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} = 3000 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} = 2000 \\
& x_{ij} \geq 0 \quad \text{con todos los } i, j
\end{array}
$$

Solución óptima	Unidades	Costo
Clifton Springs–D_2	4000	\$136,000
Clifton Springs–D_4	1000	40,000
Danville–D_1	2000	68,000
Danville–D_4	1000	38,000
	Costo total	\$282,000

La demanda del cliente 2 tiene un déficit de 1000.
La demanda del cliente 3 de 3000 no se satisface.

8. Se muestra la formulación de programación lineal y la solución óptima:

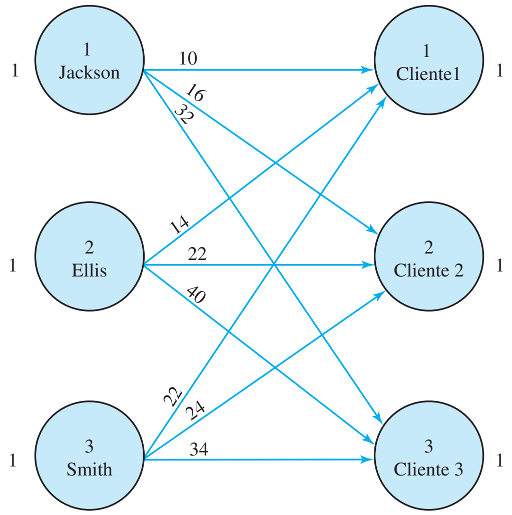
Sean x_{1A} = Unidades del producto A en la máquina 1
x_{1B} = Unidades de producto B en la máquina 1
⋮
x_{3C} = Unidades del producto C en la máquina 3

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & x_{1A} + 1.2x_{1B} + 0.9x_{1C} + 1.3x_{2A} + 1.4x_{2B} + 1.2x_{2C} + 1.1x_{3A} + x_{3B} + 1.2x_{3C} \\
\text{s.a.} & \\
& x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 1500 \\
& x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 1500 \\
& x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} \leq 1000 \\
& x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 2000 \\
& x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 500 \\
& x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 1200 \\
& x_{ij} \geq 0 \quad \text{con todos los } i, j
\end{array}
$$

Solución óptima	Unidades	Costo
1–A	300	\$ 300
1–C	1200	1080
2–A	1200	1560
3–A	500	550
3–B	500	500
	Total	\$3990

Nota: Existe una capacidad no utilizada de 300 unidades en la máquina 2.

9. a.

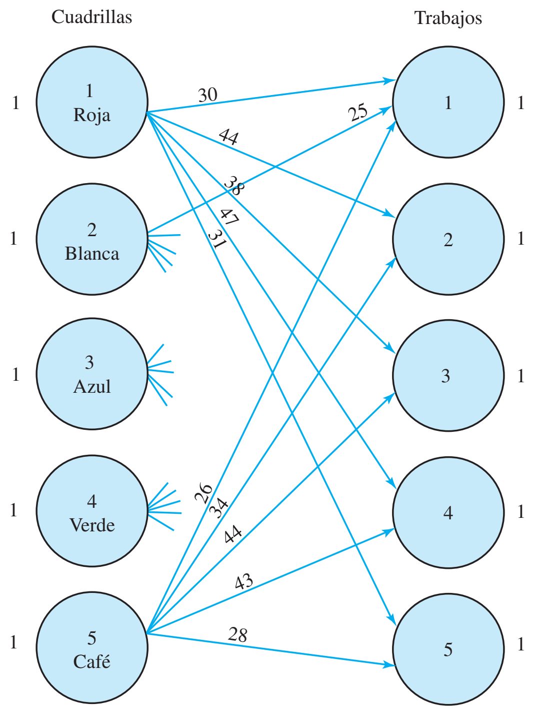


b.

$$
\begin{array}{ll}
\text{Min} & 10x_{11} + 16x_{12} + 32x_{13} + 14x_{21} + 22x_{22} + 40x_{23} + 22x_{31} + 24x_{32} + 34x_{33} \\
\text{s.a.} & \\
& x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 1 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 1 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 1 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \\
& x_{ij} \geq 0 \quad \text{con todos los } i, j
\end{array}
$$

Solución: $x_{12} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{33} = 1$
Tiempo total de finalización $= 64$

10. a.



b.

$$\text{Mín } 30x_{11} + 44x_{12} + 38x_{13} + 47x_{14} + 31x_{15} + 25x_{21} + \cdots + 28x_{55}$$

s.a.

$$\begin{aligned}
&x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} && \le 1\\
&x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} && \le 1\\
&x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} && \le 1\\
&x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} && \le 1\\
&x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} && \le 1\\
&x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51} && = 1\\
&x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} + x_{52} && = 1\\
&x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} + x_{53} && = 1\\
&x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} + x_{54} && = 1\\
&x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{55} && = 1\\
&x_{ij} \ge 0,\ i = 1, 2, \ldots, 5;\ j = 1, 2, \ldots, 5
\end{aligned}$$

Solución óptima:

Verde al trabajo 1	$ 26
Café al trabajo 2	34
Roja al trabajo 3	38
Azul al trabajo 4	39
Blanca al trabajo 5	25
	$162

Como los datos están en cientos de dólares, el costo de instalación total de los 5 contratos es de $16,200.

12. a. Esta es la variación del problema de asignación en el que múltiples asignaciones son posibles. A cada centro de distribución se le pueden asignar hasta 3 zonas de clientes.

El modelo de programación lineal de este problema tiene 40 variables (una por cada combinación de centro de distribución y la zona de clientes). Tiene 13 restricciones. Existen 5 restricciones de oferta (≤ 3) y 8 restricciones de demanda ($= 1$).

El problema también puede resolverse con el módulo "Transportation" de The Management Scientist. La solución óptima se da a continuación:

	Asignaciones	Costo ($1000s)
Plano	Kansas City, Dallas	34
Flagstaff	Los Angeles	15
Springfield	Chicago, Columbus, Atlanta	70
Boulder	Newark, Denver	97
	Costo total	$216

b. No se utiliza el centro de distribución de Nashville.

c. Se utilizan todos los centros de distribución. Columbus se cambia de Sprinfield a Nashville. El costo total se incrementa $11,000 a $227,000.

14. Una formulación de programación lineal puede desarrollarse como sigue. Que la primera letra de cada nombre de variable represente el profesor y las dos que siguen, el curso. Observe que la variable *DPH* no se crea porque esta asignación es inaceptable.

$$\text{Max } 2.8AUG + 2.2AMB + 3.3AMS + 3.0APH + 3.2BUG + \cdots + 2.5DMS$$

s.a.

$$\begin{aligned}
&AUG + AMB + AMS + APH && \le 1\\
&BUG + BMB + BMS + BPH && \le 1\\
&CUG + CMB + CMS + CPH && \le 1\\
&DUG + DMB + DMS && \le 1\\
&AUG + BUG + CUG + DUG && = 1\\
&AMB + BMB + CMB + DMB && = 1\\
&AMS + BMS + CMS + DMS && = 1\\
&APH + BPH + CPH && = 1\\
&\text{Todas las variables } \ge 0
\end{aligned}$$

Solución óptima	Calificación
A al curso de MS	3.3
B al curso de PhD	3.6
C al curso de MBA	3.2
D al curso de licenciatura	3.2
Calificación máxima total	13.3

16. a. El costo total es la suma del costo de compra más el costo de transporte. Mostramos el cálculo para la combinación División 1-Proveedor 1 y presentamos el resultado para las demás combinaciones de la División-Proveedor.

División 1-Proveedor 1

Costo de compra (40,000 × $12.60)	$504,000
Costo de transporte (40,000 × $2.75)	110,000
Costo total:	$614,000

Matriz de costos ($1000*s*)

	Proveedor					
División	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	614	660	534	680	590	630
2	603	639	702	693	693	630
3	865	830	775	850	900	930
4	532	553	511	581	595	553
5	720	648	684	693	657	747

b. Solución óptima:

Proveedor 1-División 2	$ 603
Proveedor 2-División 5	648
Proveedor 3-División 3	775
Proveedor 5–División 1	590
Proveedor 6-División 4	553
Total	$3169